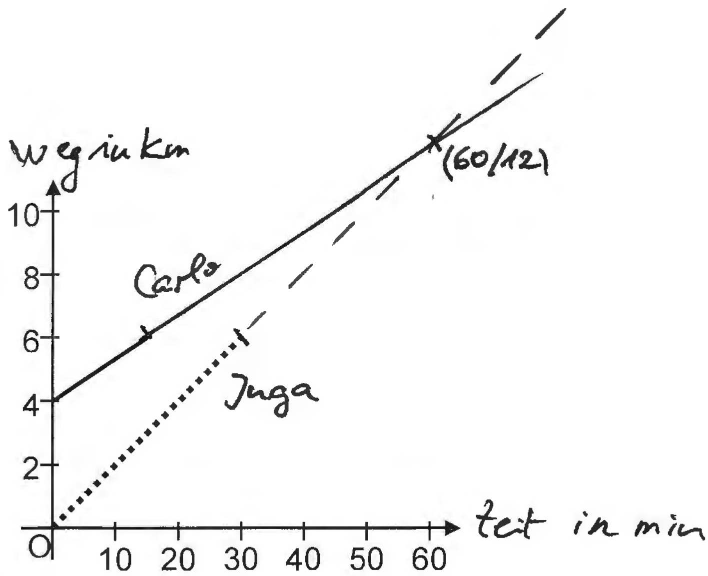
Kapitel 4 – Lineare Funktionen und Lineare Gleichungssysteme

Das vierte Kapitel ist in folgende **Unterkapitel** eingeteilt:
- Lineare Weg-Zeit-Verläufe
- Steigung und Verschiebungskonstante
- Tarifsysteme
- Systematisches Lösen von LGS

Weg-Zeit-Verläufe

Inga und Carlo besuchen beide die Gesamtschule Wald. Inga hat einen ca. 6 km langen Schulweg. Carlo wohnt näher an der Schule.
Beide starten um 7 Uhr von zu Hause aus.
Das Diagramm beschreibt den Schulweg der beiden.



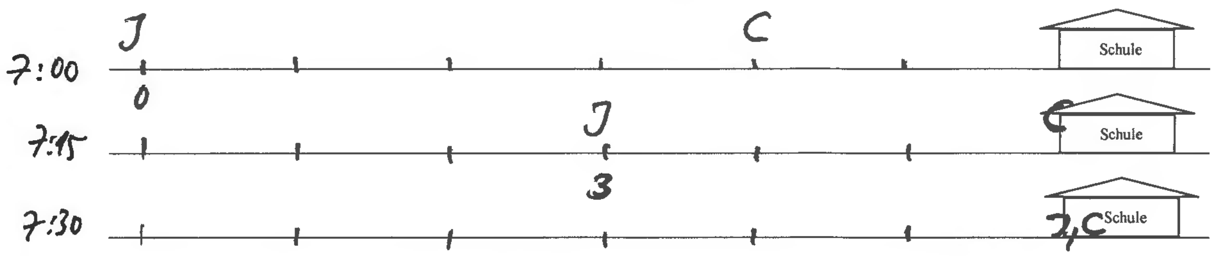
Weg-Zeit-Verläufe können durch *Strecken bzw. Geraden* dargestellt werden, wenn sich die Autos, Menschen etc. mit Konstanter Geschwindigkeit fortbewegen.

Weg-Zeit-Verläufe können durch eine *Wertetabelle* dargestellt werden:

Inga	
Zeit in min	Wegpunkt in km
0	0
10	2
20	4
30	6

Carlo	
Zeit in min	Wegpunkt in km
0	4
5	$4\frac{2}{3}$
10	$5\frac{1}{3}$
15	6

Bildergeschichten können Weg-Zeit-Verläufe darstellen:

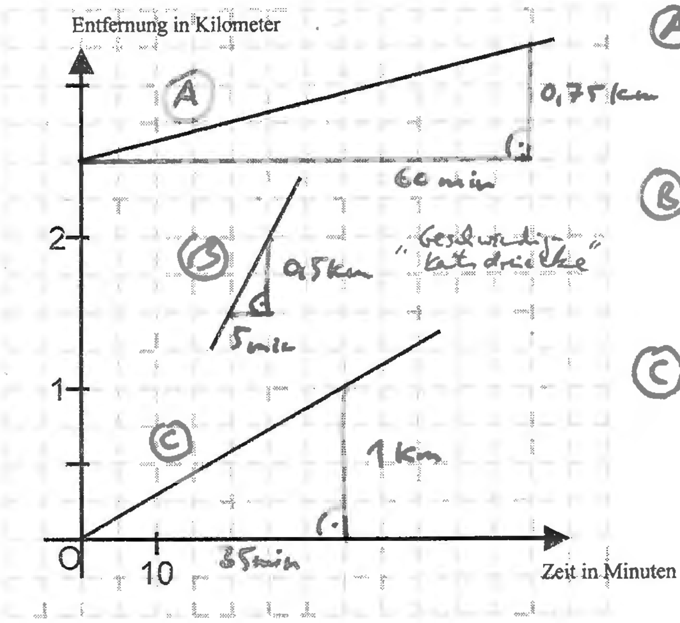


Weg-Zeit-Verläufe können durch einen *Rechenausdruck* beschrieben werden.
Zum Beispiel lautet der Rechenausdruck für Ingas Verlauf: $s(t) = t:5 = 0{,}2 \cdot t$

Weg-Zeit-Verläufe mit konstanter Geschwindigkeit sind eindeutige Zuordnungen der Zeit zum Weg, deren Schaubilder (Graphen) Geraden/Strecken sind. Solche Zuordnungen heißen lineare Funktionen. Der Rechenausdruck $s(t) = 0{,}2 \cdot t$ heißt die dazugehörige Funktionsgleichung zur Funktion s.

Funktionsgleichungen von Weg-Zeit-Verläufen bestimmen

Durchschnittsgeschwindigkeiten aus Weg-Zeit-Diagrammen bestimmen



A $v = \frac{0{,}75\,\text{km}}{60\,\text{min}} = 0{,}75\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

B $v = \frac{0{,}5\,\text{km}}{5\,\text{min}} \overset{\cdot 12}{=} \frac{6\,\text{km}}{60\,\text{min}}$

$= 6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

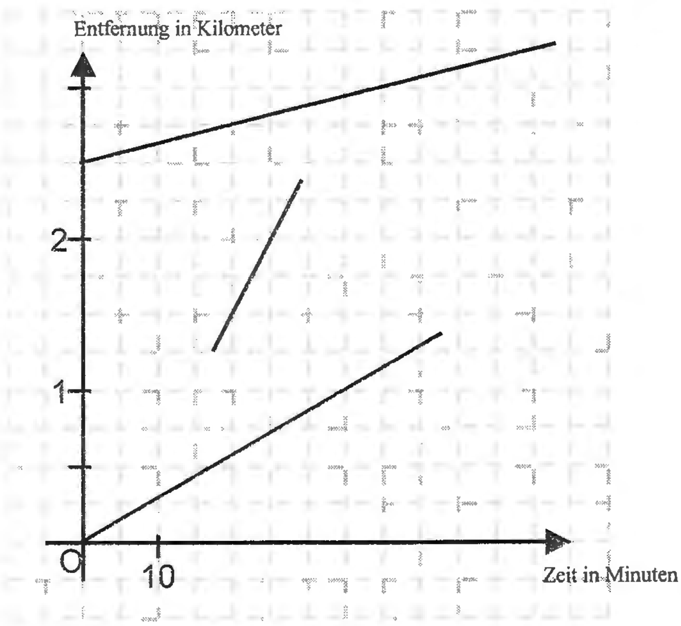
C $v = \frac{1\,\text{km}}{35\,\text{min}} \overset{:35}{=} \frac{1:35\,\text{km}}{1\,\text{min}}$

$\overset{\cdot 60}{=} \frac{1:35\cdot 60}{60\,\text{min}} \approx 1{,}71\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$$\text{Durchschnittsgeschwindigkeit} = \frac{\text{Wegänderung}}{\text{Zeitänderung}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

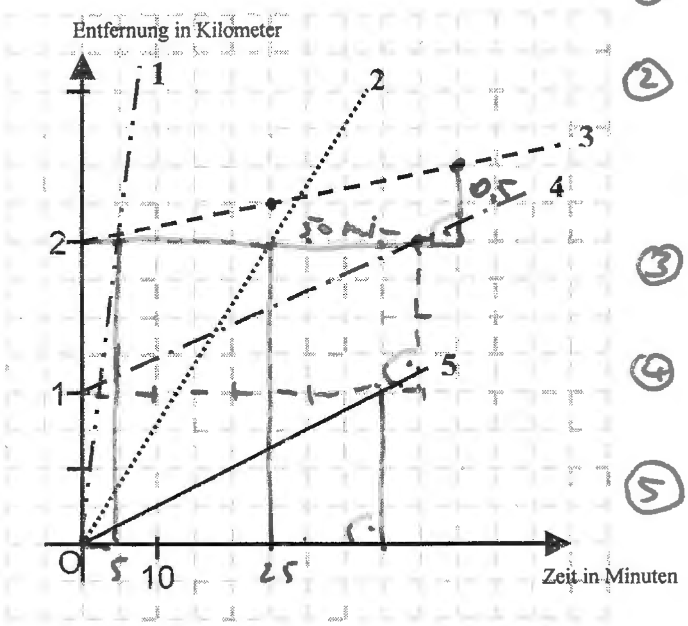
Funktionsgleichungen von Weg-Zeit-Verläufen bestimmen

Durchschnittsgeschwindigkeiten aus Weg-Zeit-Diagrammen bestimmen



Durchschnittsgeschwindigkeiten aus Weg-Zeit-Diagrammen bestimmen

Bestimme die Durchschnittsgeschwindigkeiten für die nebenstehenden fünf Weg-Zeit-Verläufe in km/min und km/h.



① $v = \frac{2\,km}{5\,min} \overset{\cdot 12}{=} 24\,\frac{km}{h}$

② $v = \frac{2\,km}{25\,min} \overset{:25}{=} \frac{2:25\,km}{1\,min}$

$\overset{\cdot 60}{=} \frac{2:25\cdot 60}{60\,min} \approx 4.8\,\frac{km}{h}$

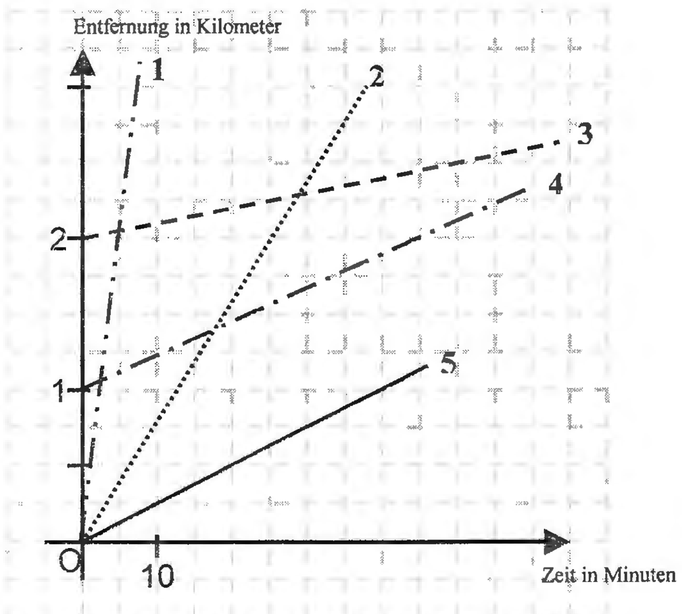
③ $v = \frac{0{,}5\,km}{50\,min} \overset{:5}{=} \frac{0{,}1\,km}{10\,min} \overset{\cdot 6}{=} 0{,}6\,\frac{km}{h}$

④ $v = \frac{1\,km}{45\,min} \overset{:3}{=} \frac{1:3\,km}{15\,min} \overset{\cdot 4}{=} \frac{4}{3}\,\frac{km}{h}$

⑤ $v = \frac{1\,km}{40\,min} \overset{:4}{=} \frac{1:4\,km}{10\,min} = 1{,}5\,\frac{km}{h}$

Durchschnittsgeschwindigkeiten aus Weg-Zeit-Diagrammen bestimmen

Bestimme die Durchschnittsgeschwindigkeiten für die nebenstehenden fünf Weg-Zeit-Verläufe in km/min und km/h.



Durchschnittsgeschwindigkeit aus einer Wertetabelle bestimmen

Ein Autofahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit ohne Pause auf der Autobahn A1 in Richtung Dortmund. Nach 20 Minuten Autobahnfahrt passiert er Kilometerstein 50. Nach 55 Minuten fährt er an Kilometerstein 120 vorbei.

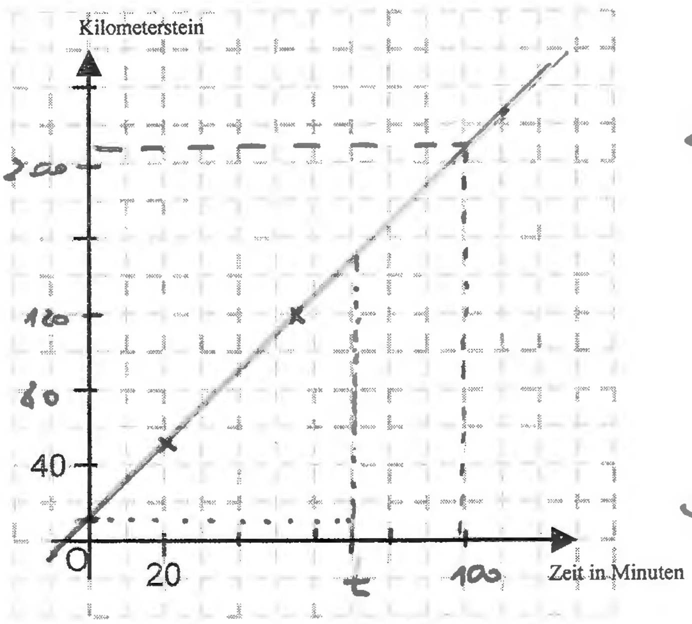
Trage zunächst die gegebenen Daten in folgende Wertetabelle ein:

Fahrzeit in Minuten	0	20	55	100
Kilometerstein auf der A1	10	50	120	210

Bestimme die Durchschnittsgeschwindigkeit des Autos in km/min und km/h.

$$V = \frac{120\text{ km} - 50\text{ km}}{55\text{ min} - 20\text{ min}} = \frac{70\text{ km}}{35\text{ min}} = 2\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Zeichne den Graphen des Weg-Zeit-Verlaufs in folgendes Koordinatensystem:



$s(100) \approx 210$

$s(0) \approx 10$

Bestimme zeichnerisch und rechnerisch die fehlenden Werte in der Wertetabelle.

$s(100) = 120 + 2 \cdot 45 = 210$

$s(0) = 50 - 2 \cdot 20 = 10$

$s(t) = 10 + 2 \cdot t$

Startpunkt $s(0)$

Durchschnittsgeschwindigkeit

Durchschnittsgeschwindigkeiten aus Wertetabellen bestimmen

Vier Mottoradfahrer fahren mit gleichmäßiger Geschwindigkeit und ohne Pause auf der A3 in Richtung Süden. Folgende Wertetabellen geben an, nach welcher Zeit ein Fahrer welchen Kilometerstein auf der Autobahn A3 passiert.

Bestimme die Durchschnittsgeschwindigkeiten der Fahrer und fülle anschließend die Tabelle aus. Runde jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma.

Fahrer1 $v = \frac{315\text{ km} - 250\text{ km}}{1\text{ h} - 0{,}5\text{ h}} = 130 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Fahrzeit in Stunden	0	0,5	1	1,5	1,75
Kilometerstein auf der A3	185	250	315	380	412,5

Fahrer2 $v = \frac{(400-260)\text{ km}}{(2{,}75-1{,}25)\text{ h}} = \frac{140\text{ km}}{1{,}5\text{ h}} \approx 93{,}33 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Fahrzeit in Stunden	0	1,25	2,75	3	4
Kilometerstein auf der A3	143,33	260	400	423,33	516,67

Fahrer3 $v = \frac{(470-240)\text{ km}}{(2{,}5-0{,}25)\text{ h}} = \frac{230\text{ km}}{2{,}25\text{ h}} \approx 102{,}22 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Fahrzeit in Stunden	0	0,25	2,5	3	4
Kilometerstein auf der A3	214,44	240	470	521,11	623,33

Fahrer4 $v = \frac{(350-250)\text{ km}}{(1{,}2-0{,}1)\text{ h}} = \frac{100\text{ km}}{1{,}1\text{ h}} \approx 90{,}91 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Fahrzeit in Stunden	0	0,1	1,20	3,5	4
Kilometerstein auf der A3	240,91	250	350	559,09	604,55

Durchschnittsgeschwindigkeiten aus Wertetabellen bestimmen

Vier Mottoradfahrer fahren mit gleichmäßiger Geschwindigkeit und ohne Pause auf der A3 in Richtung Süden. Folgende Wertetabellen geben an, nach welcher Zeit ein Fahrer welchen Kilometerstein auf der Autobahn A3 passiert.

Bestimme die Durchschnittsgeschwindigkeiten der Fahrer und fülle anschließend die Tabelle aus. Runde jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma.

Fahrer1

Fahrzeit in Stunden	0	0,5	1	1,5	1,75
Kilometerstein auf der A3		250	315		

Fahrer2

Fahrzeit in Stunden	0	1,25	2,75	3	4
Kilometerstein auf der A3		260	400		

Fahrer3

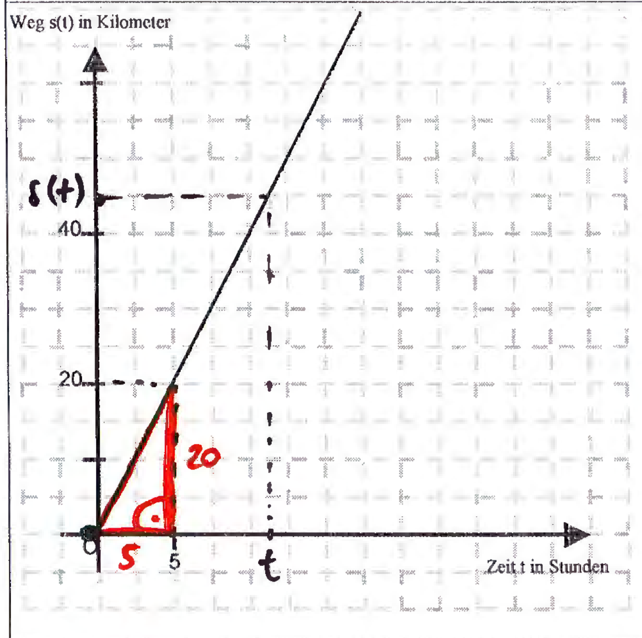
Fahrzeit in Stunden	0	0,25	2,5	3	4
Kilometerstein auf der A3		240	470		

Fahrer4

Fahrzeit in Stunden	0	0,1	1,20	3,5	4
Kilometerstein auf der A3		250	350		

Funktionsgleichung aus einem Graphen bestimmen

Gerade steigt, $s(0) = 0$

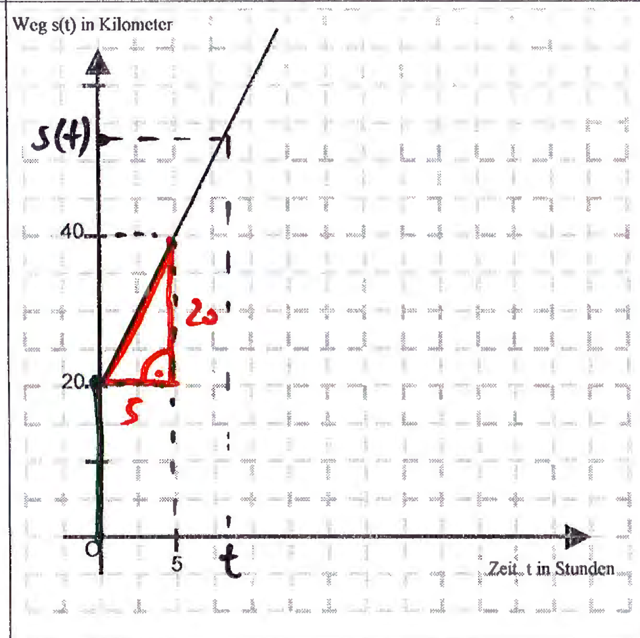


Zeit t in h	0	5	10	15
Weg s(t) in km	0	20	40	60

$$v = \frac{20\,km}{5\,h} = 4\,\frac{km}{h}$$

$$s(t) = 4 \cdot t$$
$$= v \cdot t$$

Gerade steigt, $s(0) \neq 0$

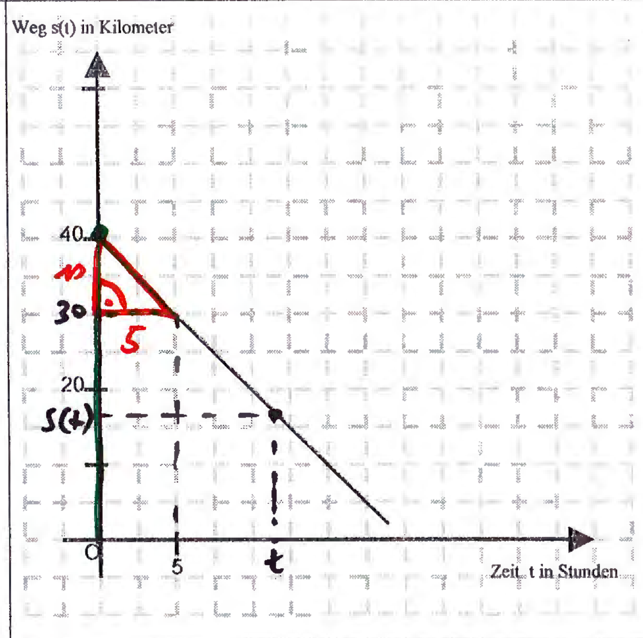


Zeit t in h	0	5	10	15
Weg s(t) in km	20	40	60	80

$$v = \frac{20\,km}{5\,h} = 4\,\frac{km}{h}$$

$$s(t) = 20 + 4t$$
$$= s(0) + 4t$$

Gerade fällt, $s(0) \neq 0$



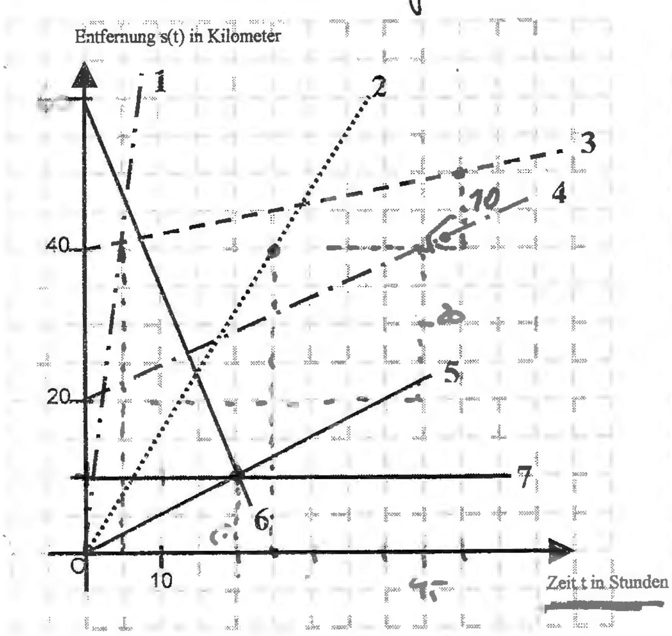
Zeit t in h	0	5	10	15
Weg s(t) in km	40	30	20	10

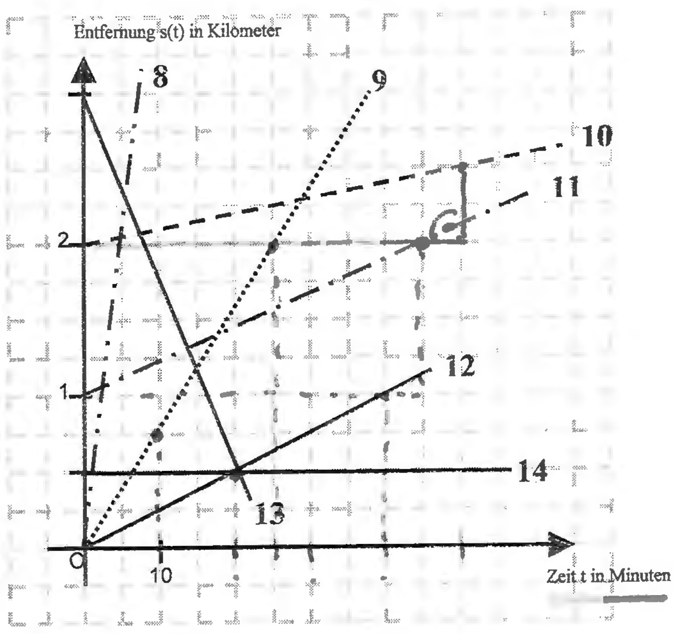
$$v = \frac{10\,km}{5\,h} = 2\,\frac{km}{h}$$

$$s(t) = 40 - 2t$$
$$= s(0) - v\,t$$

Weg $s(t)$ = Startwert $s(0)$ $\pm$ Geschwindigkeit $\cdot$ Zeit t

Funktionsgleichung aus Graphen bestimmen





1: $v = \frac{40}{5}\,\frac{km}{h} = 8 \qquad s(t) = 8 \cdot t \qquad s(0) = 0$

2: $v = \frac{40}{25}\,\frac{km}{h} = 1{,}6\,\frac{km}{h} \qquad s(t) = 1{,}6 \cdot t$

3: $v = \frac{10}{50} = 0{,}2\,\frac{km}{h} \qquad s(0) = 40$

$s(t) = 40 + 0{,}2 \cdot t$

4: $v = \frac{20}{45}\,\frac{km}{h} = 0{,}\overline{4}\,\frac{km}{h} \qquad s(0) = 20$

$s(t) = 20 + 0{,}\overline{4} \cdot t$

5: $v = \frac{10}{20}\,\frac{km}{h} = 0{,}5\,\frac{km}{h} \qquad s(0) = 0$

$s(t) = 0{,}5 \cdot t$

6: $v = \frac{50}{20}\,\frac{km}{h} = 2{,}5\,\frac{km}{h} \qquad s(0) = 60$

$s(t) = 60 - 2{,}5 \cdot t$

7: $v = 0 \qquad s(0) = 10$

$s(t) = 10 + 0 \cdot t = 10$

8: $v = \frac{2}{5} = 0{,}4\,\frac{km}{min} \qquad s(0) = 0$

$s(t) = 0{,}4 \cdot t$

9: $v = \frac{2}{25} = 0{,}08\,\frac{km}{min} \qquad s(0) = 0$

$s(t) = 0{,}08 \cdot t$

10: $v = \frac{0{,}5}{50} = 0{,}01\,\frac{km}{min} \qquad s(0) = 2$

$s(t) = 2 + 0{,}01 \cdot t$

11: $v = \frac{1}{45} = 0{,}0\overline{2}\,\frac{km}{min} \qquad s(0) = 1$

$s(t) = 1 + 0{,}0\overline{2} \cdot t$

12: $v = \frac{1}{40} = 0{,}025\,\frac{km}{min} \qquad s(0) = 0$

$s(t) = 0{,}025 \cdot t$

13: $v = \frac{2{,}5}{20} = 0{,}125\,\frac{km}{min} \qquad s(0) = 3$

$s(t) = 3 - 0{,}125 \cdot t$

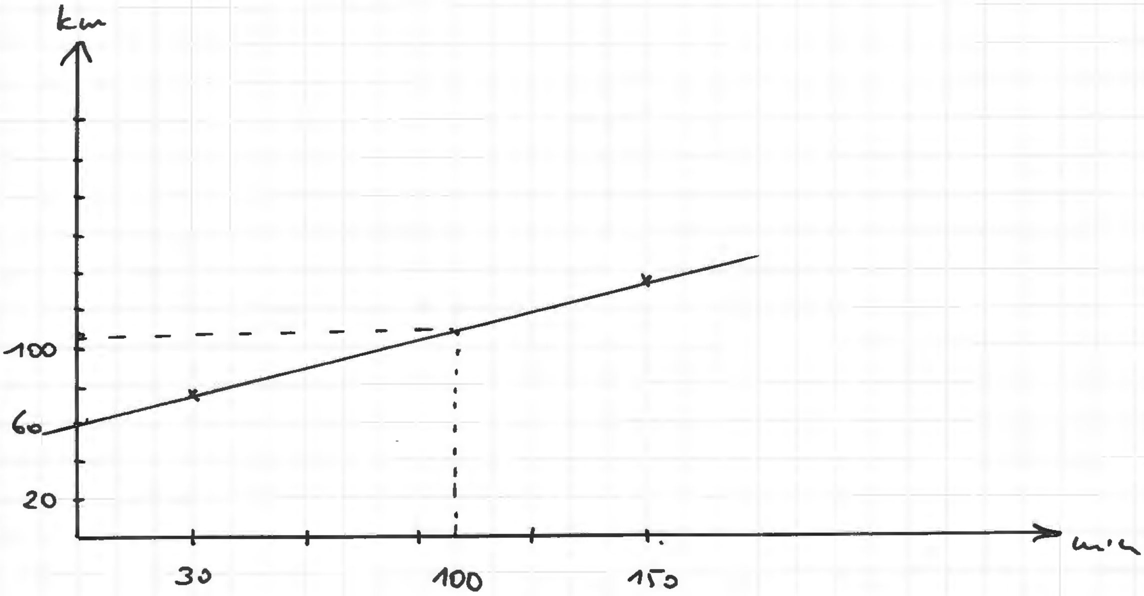
14: $v = 0 \qquad s(0) = 0{,}5$

$s(t) = 0{,}5 + 0 \cdot t = 0{,}5$

Rheindampfer

a) $v = \frac{135-75}{150-30} \, \frac{km}{min} = 0{,}5 \, \frac{km}{min} = 30 \, \frac{km}{h}$

b)



c) Der Startpunkt liegt bei ca. 60 km und nach 100 passiert er ≈ km 110.

d) $s(0) = 75 - 0{,}5 \cdot 30 = 75 - 15 = 60$ [km]

e) $s(t) = 60 + 0{,}5 \cdot t$

f) $s(100) = 60 + 0{,}5 \cdot 100 = 60 + 50 = 110$ [km]

Übungsaufgabe
Funktionsgleichung aus Wertetabelle erstellen

a) $v = \frac{140-0}{16-2} = \frac{140}{14} = 10 \left[\frac{km}{h}\right]$

$s(0) = 0 - 10 \cdot 2$ $\quad s(t) = -20 + 10 \cdot t$

b) $v = \frac{265-220}{35-15} = \frac{45}{20} = 2,25 \left[\frac{km}{h}\right]$

$s(0) = 220 - 2,25 \cdot 15 = 186,25 \, [km]$

$s(t) = 186,25 + 2,25 \cdot t$

c) $v = \frac{18,5-15,5}{3,8-2,6} = \frac{3}{1,2} = 2,5 \left[\frac{km}{h}\right]$

$s(0) = 15,5 - 2,5 \cdot 2,6 = 9 \, [km]$

$s(t) = 9 + 2,5 \cdot t$

d) $v = \frac{2-1}{0,6-0,2} = \frac{1}{0,4} = 2,5 \left[\frac{km}{h}\right]$

$s(0) = 1 - 2,5 \cdot 0,2 = 0,5 \, [km]$

$s(t) = 0,5 + 2,5 \cdot t$

e) $v = 0 \, \frac{km}{h}$ $\quad s(0) = 21 \, km$ $\quad s(t) = 21$

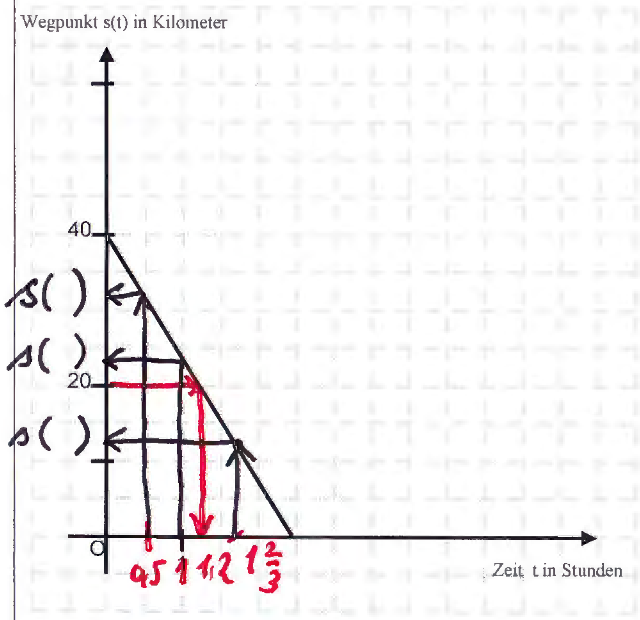
f) $v = \frac{-30}{15} \, \frac{km}{h} = -2 \, \frac{km}{h}$ $\quad s(t) = 1500 - 2 \cdot t$

Wertetabellen anlegen – Funktionswerte und t Werte bestimmen

Peter startet seine Radtour von Meinerzhagen aus ins 40 km entfernte Leverkusen. Er legt mit seinem Fahrrad eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $16\frac{2}{3}$ km/h zurück. Sein Weg-Zeit-Verlauf wird durch folgende Funktionsgleichung beschrieben:

$$s(t) = 40 - 16\frac{2}{3} \cdot t$$

Das dazugehörige Weg-Zeit-Diagramm lautet:



$s(0,5) \approx 31$

$s(1) \approx 24$

$s(1\frac{2}{3}) \approx 12$

Gegeben: t - Wert Gesucht: s(t) - Wert (Funktionswert)

Bestimme rechnerisch die Wegpunkte, die Peter nach 30 min, 1 h und 1h 40 min erreicht!

$s(0,5) = 40 - 16\frac{2}{3} \cdot \quad = 31,\overline{6}$

$s(1) = 40 - 16\frac{2}{3} \cdot \quad = 23,\overline{3}$

$s(1\frac{2}{3}) = 40 - 16\frac{2}{3} \cdot \quad = 12,\overline{2}$

t in Stunden	s(t) in km
0,5	$31,\overline{6}$
1	$23,\overline{3}$
$1\frac{2}{3}$	$12,\overline{2}$

Man nennt s( ) den Funktionswert von s an der Stelle . (hier: zur Zeit).

Gegeben: s(t) Gesucht:

Bestimme rechnerisch, nach welcher Zeit Peter Kilometerpunkt 20 erreicht!

$s(t) = 20$

$40 - 16\frac{2}{3} \cdot t = 20 \quad | -40$

$-16\frac{2}{3} t = -20 \quad | : (-16\frac{2}{3})$

$t = 1,2\,h = 1h\ 12\,min$

t in Stunden	s(t) in km	
1,2	20	
1,8	10	← Übg.
2,22	3	← Übg.
2,4	0	← Übg.

Nach 1h 12min erreicht er Km-Punkt 20.

Teste Dich

Aufgabe 1 $s(0{,}25) = 35{,}8\overline{3}$ $s(0{,}75) = 27{,}5$ $s(2) = 6{,}\overline{6}$ $s(2{,}2) = 3{,}\overline{3}$

a) *Bestimme im Einführungsbeispiel rechnerisch die Wegpunkte von Peters Radtour nach 15 Minuten, 45 Minuten, 2 Stunden und 2 Stunden 12 Minuten.*

b) *Bestimme rechnerisch, nach welcher Zeit Peter den Wegpunkt 10 erreicht und wann er in Leverkusen ankommt.* $s(t) = 10 \Rightarrow t = 1{,}8\,h = 1h\ 48\,min$

$s(t) = 0 \Rightarrow t = 2{,}4\,h = 2h\ 24\,min$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktionsgleichung s(t) = 50 + 0,5 t.

Berechne die fehlenden Werte der folgende Wertetabelle, die zur obigen Funktionsgleichung gehört: $50 + 0{,}5t = 52 \Rightarrow t = 4$

t	1	2,7	4	5,5	$100\frac{1}{3}$	251	$1000,\overline{6}$
s(t)	50,5	67,5	52	52,75	$100,1\overline{6}$	175,5	$5053,\overline{3}$

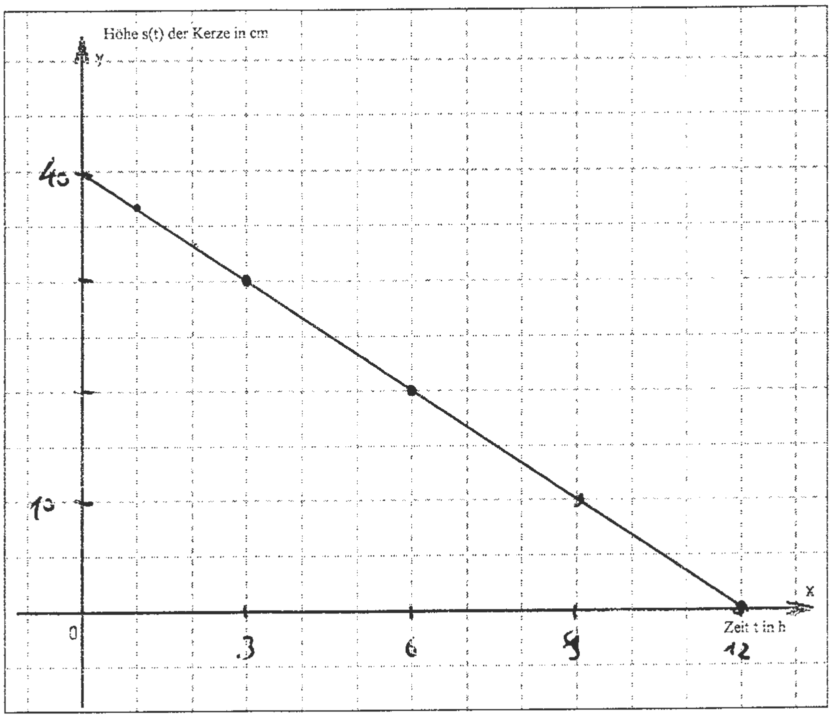
$50 + 0{,}5t = 175{,}5 \Rightarrow t = 251$

Aufgabe 3*

Eine 40 cm lange Kerze brennt 12 Stunden lang, bis sie abgebrannt ist.

a) *Fülle die Wertetabelle aus und stelle den Brennverlauf graphisch im Koordinatensystem dar.*

t Zeit [h]	s(t) Kerzenhöhe [cm]
0	40
1	$36\frac{2}{3}$
2	$33\frac{1}{3}$
3	30
4	$26\frac{2}{3}$
5	$23\frac{1}{3}$
6	20
7	$16\frac{2}{3}$
8	$13\frac{1}{3}$
9	10
10	$6\frac{2}{3}$
11	$3\frac{1}{3}$
12	0



b) *Berechne die Geschwindigkeit an, mit der die Kerze abbrennt (in cm/h).* $v = \frac{40\,cm}{12\,h} = 3\frac{1}{3}\,\frac{cm}{h}$

c) *Gib die Funktionsgleichung zum Abbrennvorgang der Kerze an.* $s(t) = 40 - 3\frac{1}{3}\cdot t$ (t in h)

d) *Berechne mithilfe der Funktionsgleichung, welche Höhe die Kerze nach 5,5h [6,75h; 9h30min; 10h24min] hat.* $s(5{,}5) = 21{,}\overline{6}$ $s(6{,}75) = 17{,}5$ $s(9{,}5) = 8{,}\overline{3}$ $s(10{,}4) = 5{,}\overline{3}$

e) *Berechne, nach welcher Zeit die Kerze eine Höhe von 11,5 cm hat.* $s(t) = 11{,}5$

$40 - 3\frac{1}{3}t = 11{,}5 \quad | -40$

$-3\frac{1}{3}t = -28{,}5 \quad | : (-3\frac{1}{3})$

$t = 8{,}55\,h = 8h\ 33\,min$

Aufgabe 4**

Gegeben sei die folgende Wertetabelle eines linearen Weg-Zeit-Verlaufs:

t in h	0	3	5	10,5	10	$20\frac{1}{3}$
s(t) in km	0	30	50	105	100	$203,\overline{3}$

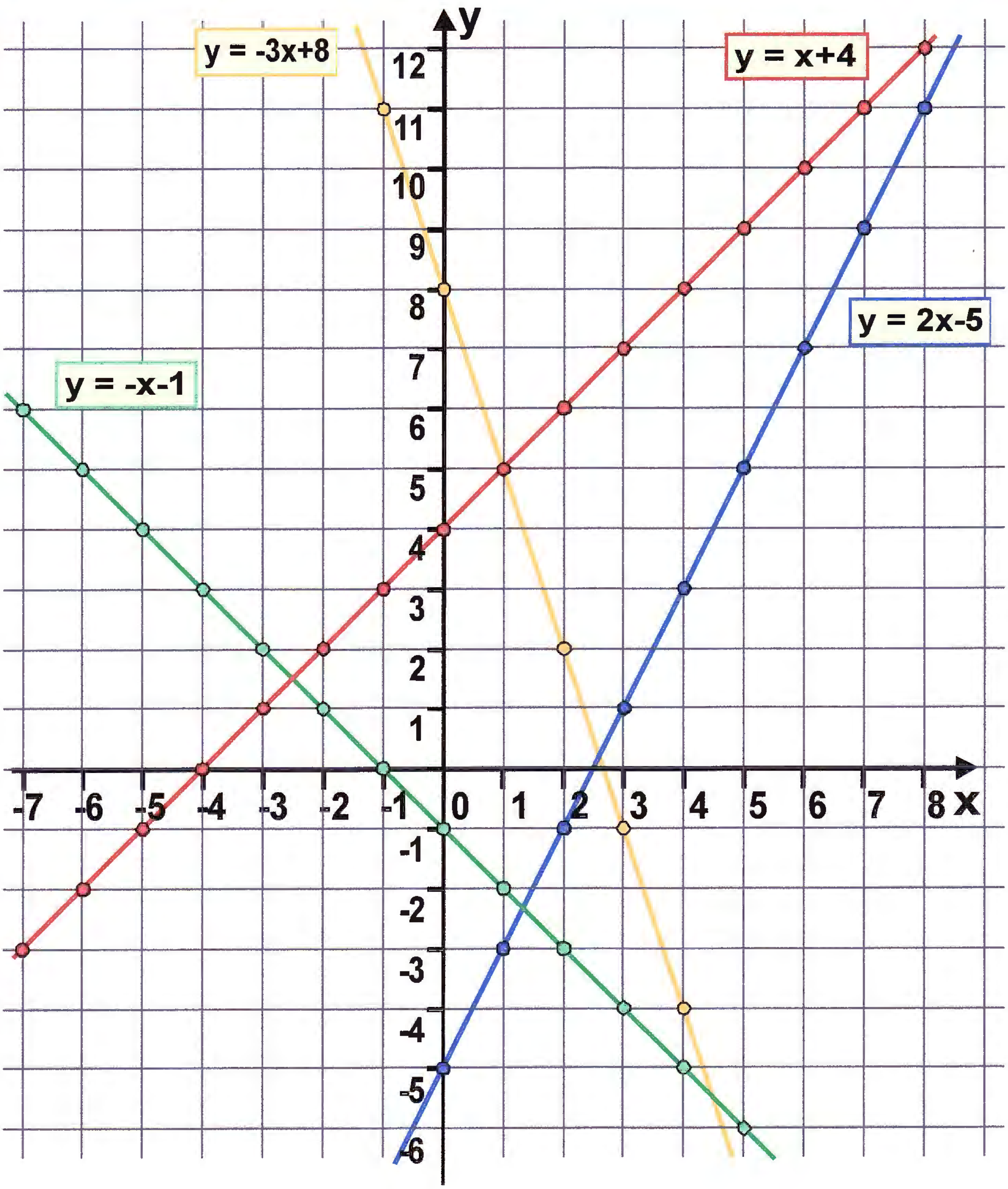
Berechne die fehlenden Werte. [Tipp: Bestimme zunächst die Funktionsgleichung]

$v = \frac{50-30}{5-3}\,\frac{km}{h} = 10\,\frac{km}{h}$ $s(0) = 30 - 3\cdot 10 = 0\ km$ $s(t) = 10\cdot t$

Die lineare Funktion y=m·x+b:

dwu-Unterrichtsmaterialien.de
mlf107fL

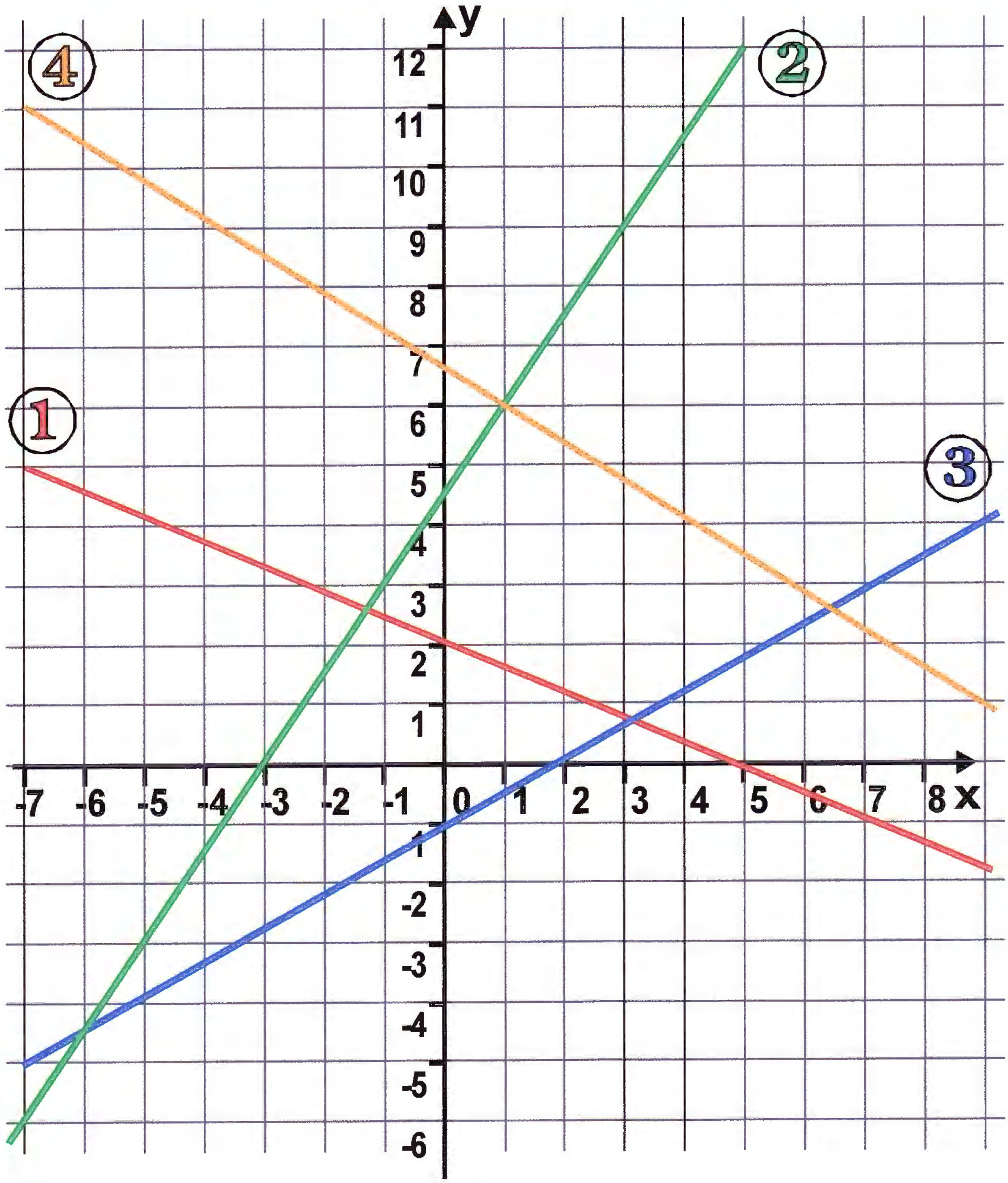
x=	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y= x+4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y= -x-1	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
y= 2x-5	-19	-17	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11
y=-3x+8	29	26	23	20	17	14	11	8	5	2	-1	-4	-7	-10	-13	-16



Erkennen linearer Funktionen:

dwu-Unterrichtsmaterialien.de
mlf201fL

	Steigungsfaktor m	Konstante b	Funktionsgleichung
	30:(-70) = -0,43	+2	y = -0,43x + 2
	60:40 = 1,5	+4,5	y = 1,5x + 4,5
	30:53 = 0,57	-1	y = 0,57x - 1
	38:(-60) = -0,63	+6,6	y = -0,63x + 6,6



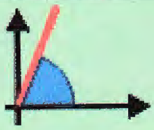
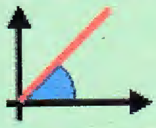
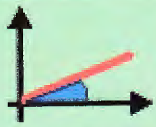
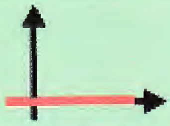
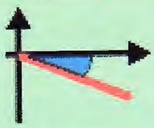
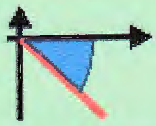
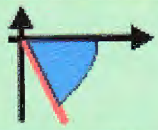
Bedeutung der Variablen der linearen Funktion:

$$y = m \cdot x + b$$

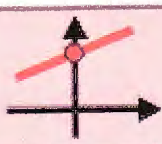
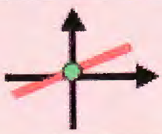
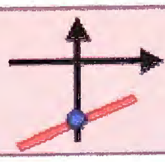
m = Steigungsfaktor
b = Verschiebungskonstante

Die Variablen der Funktionsgleichung der linearen Funktion haben folgende Bedeutung:

Steigungsfaktor m:

$m > 1$	*Steigungswinkel > 45°*	
$m = 1$	*Steigungswinkel = 45°*	
$0 < m < 1$	*Steigungswinkel < 45°*	
$m = 0$	*Steigungswinkel = 0°*	
$-1 < m < 0$	*|Steigungswinkel| < |-45°|*	
$m = -1$	*Steigungswinkel = -45°*	
$m < -1$	*|Steigungswinkel| > |-45°|*	

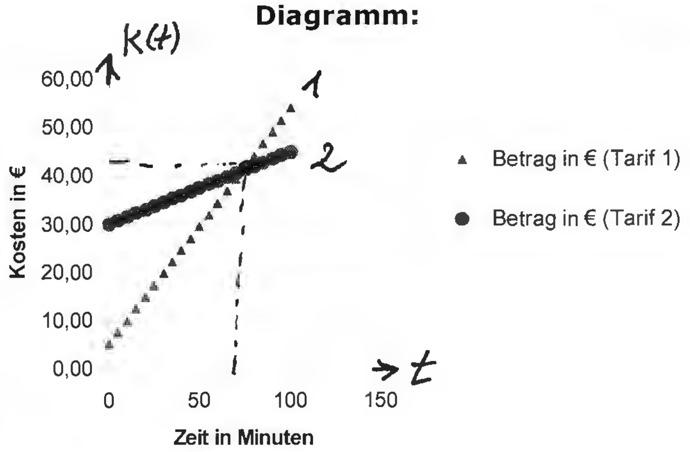
Verschiebungskonstante b:

$b > 0$	*Verschiebung nach oben*	
$b = 0$	*keine y-Verschiebung*	
$b < 0$	*Verschiebung nach unten*	

Tarifsysteme

Ein Telefonkonzern bietet zwei Handy-Tarife zur Auswahl:			
Tarif 1		**Tarif 2**	
Alle Preise in € inkl. MwSt.		Alle Preise in € inkl. MwSt.	
Grundgebühr	4,95	Grundgebühr	29,95
Taktung	60/1	Taktung	60/1
Verbindungskosten ins Festnetz		Verbindungskosten ins Festnetz	
Hauptzeit	0,49	Hauptzeit	0,15

Diagramm:



$S\ (\approx 70/42)$

<u>Tarif 1</u>

$K(t) = 4{,}95\,€ + 0{,}49\,\frac{€}{min} \cdot t$

$K(t) = 4{,}95 + 0{,}49 \cdot t$

<u>Tarif 2</u>

$K(t) = 29{,}95\,€ + 0{,}15\,\frac{€}{min} \cdot t$

$K(t) = 29{,}95 + 0{,}15 \cdot t$

Am Schnittpunkt S muss gelten

$$4{,}95 + 0{,}49 \cdot t = 29{,}95 + 0{,}15 \cdot t \quad | -4{,}95$$

$$0{,}49 \cdot t = 25 + 0{,}15 \cdot t \quad | -0{,}15 \cdot t$$

$$0{,}34 \cdot t = 25 \quad | :0{,}34$$

$$\underline{\underline{t \approx 73{,}5\ min}}$$

Ab <u>ca. 74 min</u> wird Tarif 2 günstiger als Tarif 1.