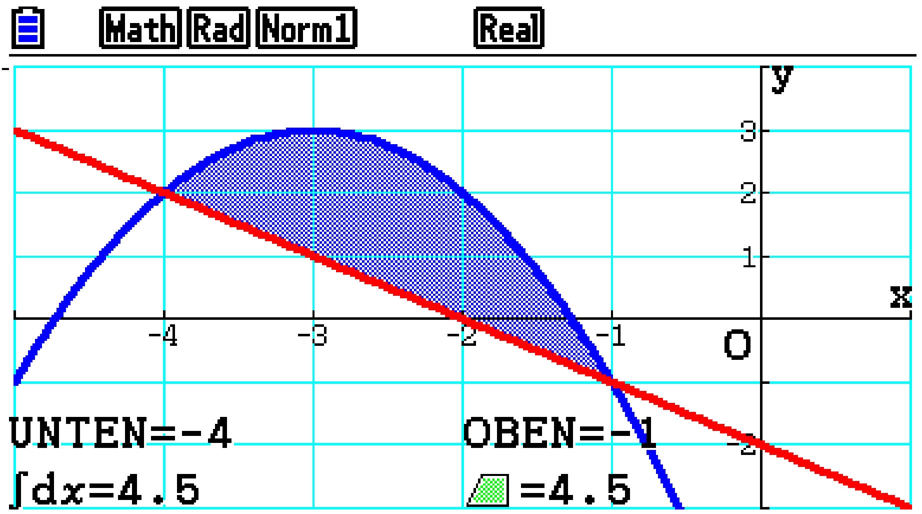
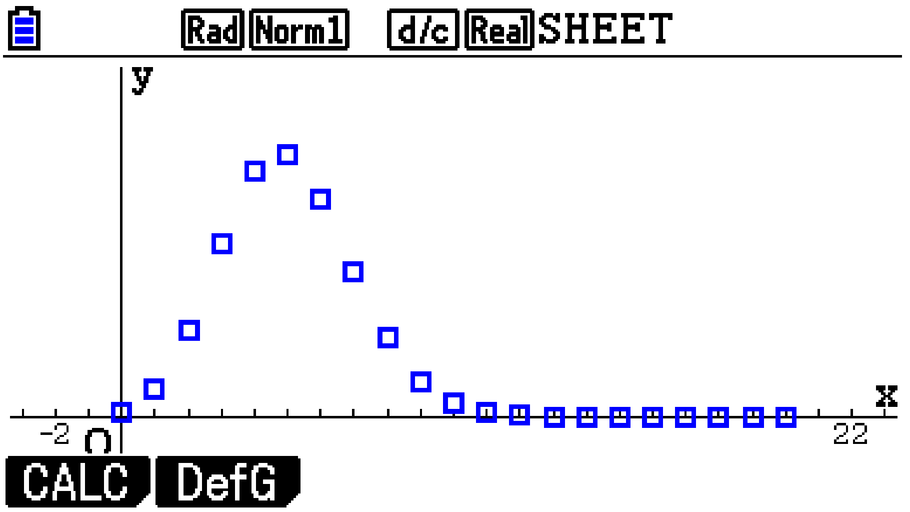
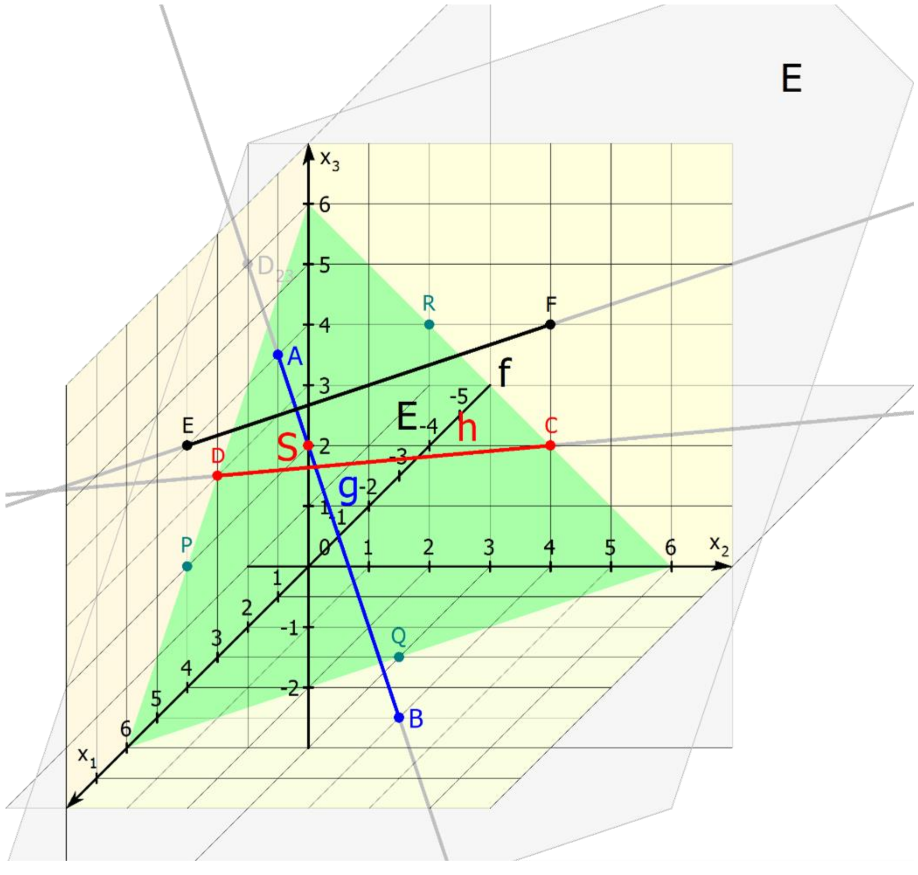


Mathematik in der Jahrgangsstufe 12 (Q1-Phase)

angelehnt an den KLP Mathematik NRW 2015

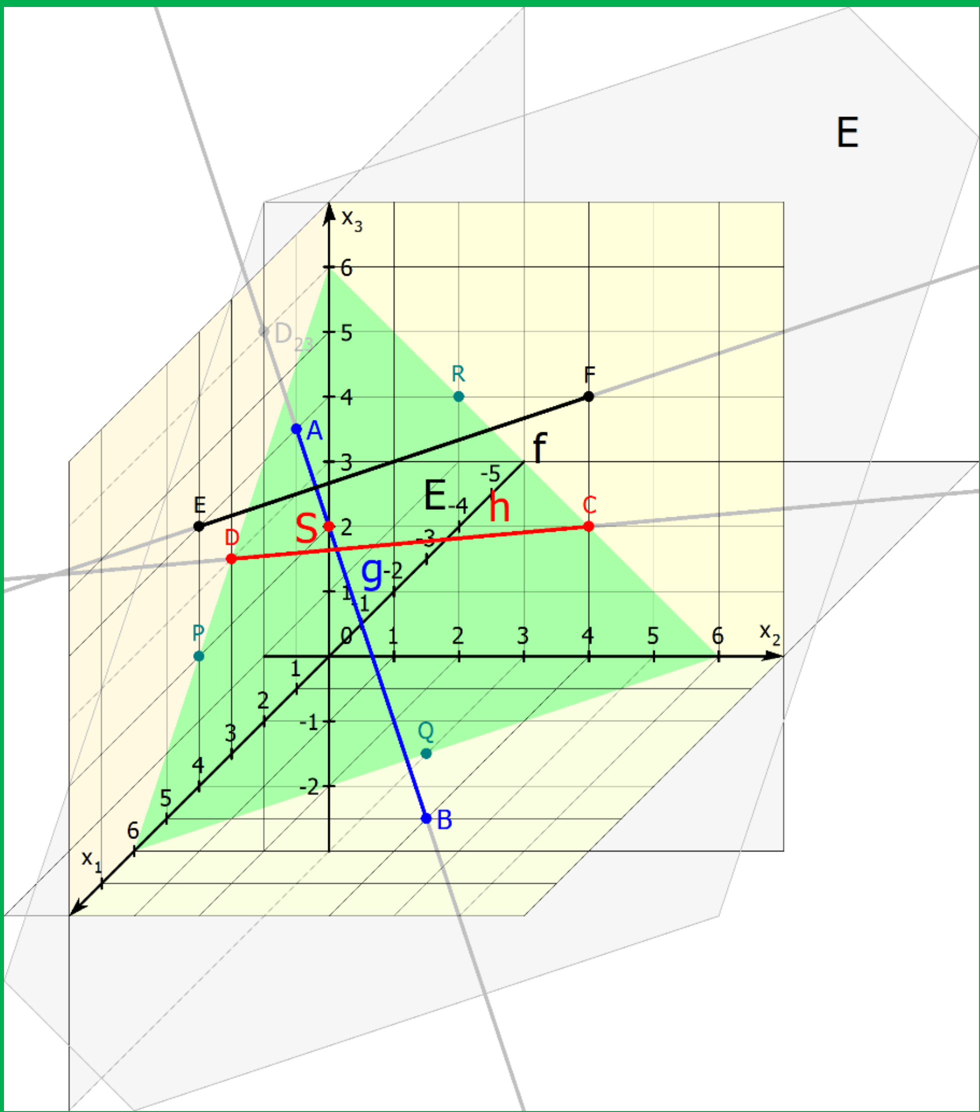
Autor: Jörn Meyer





Inhaltsverzeichnis

Lektion 1: Geraden und Ebenen im Raum



Lektion 1: Darstellung von Geraden und Ebenen im Raum

1.1 Noch fit? – Vektoren und Modellieren mit dem 3D-Modell

Wichtige Merksätze aus der E-Phase

Was ist ein Vektor?

(1) Ein **Vektor** $\overrightarrow{AB}$ beschreibt die Verschiebung eines Punktes A zu einem Punkt B und wird festgelegt durch seinen **Betrag** (Länge), seine **Richtung** (parallel zu einer Geraden durch die Punkte A und B) und seine **Orientierung** (ablesbar an der Pfeilspitze). $\overrightarrow{AB}$ repräsentiert unendlich viele Vektoren der gleichen Klasse (gleicher Betrag, gleiche Richtung und gleiche Orientierung wie $\overrightarrow{AB}$**).**

(2) Ein Vektor $\vec{a}$ besitzt einen **Gegenvektor** **-**$\vec{a}$, der sich nur um die Orientierung von $\vec{a}$ unterscheidet. Führt man die Verschiebung gemäß dem Vektor $\vec{a}$ und dann gemäß dem Vektor **-**$\vec{a}$ hintereinander durch, kann dieser Gesamtvorgang durch den Nullvektor $\vec{0}$ beschrieben werden.

(3) Die Verschiebung eines Punktes A zu einem Punkt B kann auf direktem Wege oder auch durch „Umwege“ mit mehreren Verschiebungen zu weiteren Punkten (z. B. C, D, und E) erzielt werden. In der Vektorschreibweise gilt dann: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB}$.

(4) Die Subtraktion $\vec{a} - \vec{b}$ von zwei Vektoren ist analog zur Subtraktion bei Zahlen definiert als die Addition des Gegenvektors, d. h. $\vec{a} + (-\vec{b})$.

Rechengesetze für Vektoren:

Kommutativgesetz der Vektor-Addition: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Assoziativgesetz der Vektoraddition: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Distributivgesetz der S-Multiplikation (r ist eine reelle Zahl): $\mathbf{r} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \mathbf{r} \cdot \vec{a} + \mathbf{r} \cdot \vec{b}$

Spezielle Punkte im Raum

(1) Bei **Punkten auf den Koordinatenachsen** sind zwei Koordinaten Null.
(2) Bei **Punkten auf den Koordinatenebenen** ist eine Koordinate Null.

Rechnen mit Vektoren im 3D-Raum

(1) Vektoren **addiert**, indem man ihre Komponenten addiert: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

(2) Der **Gegenvektor** von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ lautet $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$

(3) Vektoren werden „komponentenweise“ subtrahiert: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$

(4) Wird ein Vektor mit einer reellen Zahl r (Skalar, **skalare Multiplikation**) multipliziert, so kann dies nur die Länge bzw. die Orientierung verändern. Es gilt dann: $\mathbf{r} \cdot \vec{a} = \mathbf{r} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$

Der **Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$** zweier Punkte A und B lässt sich berechnen als Differenz der dazugehörigen Ortsvektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$. In Koordinatenschreibweise ergibt sich also mit den Punkten $A(a_1/a_2/a_3)$ und $B(b_1/b_2/b_3)$:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Für die Punkte A(-2/5/4) und B(-4/-1/5) gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die **Länge eines Vektors $\vec{a}$** ist: $\mathbf{a} = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$

Will man nun den Vektor bestimmen, der die gleiche Richtung und Orientierung wie der Vektor $\vec{a}$ hat und die Länge 1 besitzt, dividiert man $\vec{a}$ durch seine Länge a und erhält den sogenannten **Einheitsvektor in Richtung $\vec{a}$:** $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{1}{a} \cdot \vec{a}$.

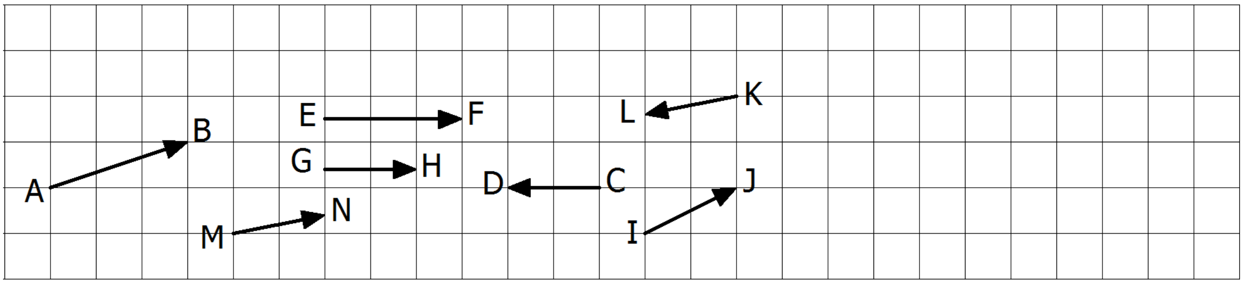
Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Spiegelung und Projektion

(1) Bei einer **senkrechten Projektion** eines Punktes **in eine Koordinatenebene** wird eine Koordinate des Punktes Null gesetzt, während die anderen Koordinaten unverändert bleiben.
(2) Bei einer **Spiegelung** eines Punktes **an einer Koordinatenebene** ändert eine Koordinate des Punktes ihr Vorzeichen, während die anderen beiden Koordinaten unverändert bleiben.
(3) Bei einer **senkrechten Projektion** eines Punktes **in eine Koordinatenachse** werden zwei Koordinaten des Punktes Null gesetzt, während die dritte Koordinate unverändert bleibt.
(4) Bei einer **Spiegelung** eines Punktes **an einer Koordinatenebene** ändern zwei Koordinaten des Punktes ihr Vorzeichen, während eine Koordinate unverändert bleibt.
(5) Bei einer **Spiegelung** eines Punktes **am Koordinatenursprung** ändern alle Koordinaten des Punktes ihr Vorzeichen.

Aufgabe 1: Skalar und Vektor

a) Es sind folgende sieben Vektoren gegeben.



(1) **Untersuche** die oben befindlichen Vektoren auf einen Zusammenhang bezüglich **Länge, Richtung** und **Orientierung**.

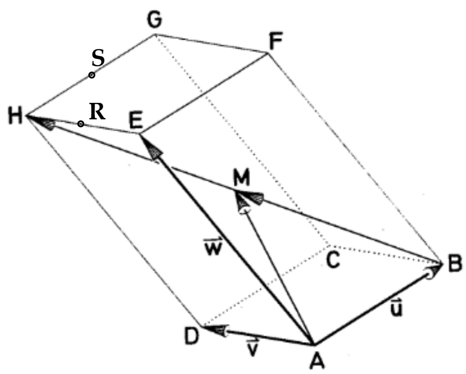
(2) **Zeichne** die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ mit den folgenden Eigenschaften oben **ein**:

- Der Vektor $\vec{a}$ hat die gleiche Richtung wie der Vektor $\overrightarrow{IJ}$, ist aber doppelt so lang.
- Der Vektor $\vec{b}$ ist gleich $\vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.
- Der Vektor $\vec{c}$ ist gleich $\vec{b} - 3\,\overrightarrow{GH}$.

b) **Fasse** unter Angabe der Rechengesetze für Vektoren den folgenden Vektorausdruck so weit wie möglich **zusammen**: $120(-\vec{d} + 0{,}5\vec{e}) + 30\vec{d} - (-90\vec{d}) + (-60\vec{e})$.

Aufgabe 2: Spat

Im Spat ABCDEFGH ist M der Mittelpunkt der Raumdiagonalen $\overline{BH}$. Die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ und $\overrightarrow{AE} = \vec{w}$ spannen den Spat auf (vgl. Abb. rechts).



a) **Drücke** die Vektoren $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{FD}$ und $\overrightarrow{BH}$ durch die Spannvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aus und **zeige**, dass folgenden Formel gilt: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$.

b) Seien nun A (4/0/0), B (4/3/0), D (0/1/0) und E (2/1/3). Ferner sind Punkte R und S die Mittelpunkte der Kanten $\overline{EH}$ und $\overline{GH}$.

(1) **Berechne** die Koordinaten der übrigen Eckpunkte des Spats sowie des Punktes M.

(2) **Weise** mithilfe der Vektorrechnung **nach**, dass das Viereck ACRS ein Trapez ist.

(3) **Zeichne** den Spat und den Mittelpunkt M als Schrägbild in ein Koordinatensystem.

(4) **Gib** die Bildkoordinaten der Eckpunkte des Spats ABCDEFG **an**, wenn er …

i. an der x_1-x_2-Ebene gespiegelt wird.
ii. an der x_3-Achse gespiegelt wird.
iii. am Koordinatenursprung gespiegelt wird.
iv. senkrecht in die x_2-x_3-Ebene projiziert wird.
v. senkrecht in die x_1-Achse projiziert wird.

Aufgabe 3: Ballonfahrt[1]

Die Position eines Heißluftballons am Himmel wird durch drei Koordinaten – Osten, Norden, Höhe – (jeweils in km) bestimmt (der Ursprung ist der Tower eines Sportflugplatzes). Die Flugrichtung hängt vom Wind ab, dessen Richtung durch einen Vektor angegeben wird (jede Komponente in km/h). Der Ballon startet im Punkt (2 | 2 | 0) und wird direkt beim Steigflug vom Wind erfasst und fährt eine Stunde in Richtung $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Da Heißluftballons nicht höher als 3 km fliegen dürfen, macht der Ballonfahrer den Brenner aus, und der Ballon gleitet für zwei Stunden in Richtung $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Von dort fliegt er 30 Minuten in Richtung $\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ändert sich der Wind auf $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$. Nach zwei weiteren Stunden ist er gelandet.

a) **Bestimme**, an welchem Ort der Ballon schließlich landet und **berechne** die Entfernung des Zielorts vom Startpunkt.

b) **Untersuche**, wie viele Kilometer der Ballon insgesamt zurückgelegt hat.

c) **Stelle** die Situation im Modell **dar**. **Überprüfe** die Ergebnisse aus den Aufgabenteil b) und c) durch eine Messung. [Der Aufstieg des Ballons kann mit einem Stab dargestellt werden; von dort an mit Gummibändern weiterarbeiten (1 km pro Einheit).]

Weiterführendes zum Umgang mit dem 3D-Modell

Aufgabe 4: Versicherungsbetrug[2]

Am 1. April 2008 meldete sich beider Lloyd-Versicherung in London ein Vertreter der Never-Come-Back-Airline. Er gab vor, dass der Flug NCB 123 auf dem Weg von Südengland-International-Airport (0 | 0 | 0) nach Havanna (Kuba) über dem Bermuda-Dreieck abgestürzt sei. Da die Never-Come-Back-Airline bereits in den vergangenen Jahren oft durch dubiose Geschäftspraktiken aufgefallen war, werden die Angaben der Fluggesellschaft besonders kritisch begutachtet. Stutzig macht auch die Tatsache, dass außer dem Piloten kein Mensch an Bord gewesen sein soll. Von der internationalen Flugüberwachung lässt man sich die automatisch über Funk durchgegebenen Flugdaten des vermissten Fluges durchgeben. Bis zum „Funkabbruch“ wurden folgende Flugbewegungen aufgezeichnet:

Kursvektor	$\begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -300 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100 \\ -200 \\ 0 \end{pmatrix}$
Dauer	10-11 Uhr	11-13 Uhr	13-14 Uhr	14-17 Uhr

Die Kursvektoren geben die jeweilige Geschwindigkeit (km/h) in östlicher und nördlicher Richtung über dem Boden an.

[1] Modifiziert nach EISEN, V.: Handlungsorientierter Mathematikunterricht. MUED, Appelhülsen 2017, 28.
[2] Modifiziert nach EISEN, V.: Handlungsorientierter Mathematikunterricht. MUED, Appelhülsen 2017, 32.

a) **Prüfe**, ob ein Versicherungsbetrug vorlag.

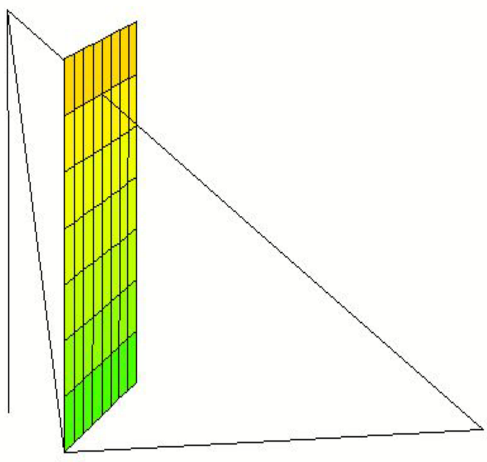
b) **Stelle** die Situation mit dem 3D-Modell **dar**.

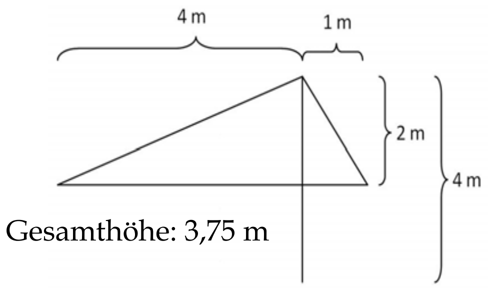
c) **Stelle** eine Projektion des Fluges in die x_1x_2-Ebene **grafisch dar**.

[Darstellung im Modell: Man kann die Vektoren direkt mit einem wasserlöslichen Folienstift auf die x_1x_2-Ebene zeichnen (100 km pro Einheit).]

Aufgabe 5: Skulptur[3]

Anlässlich des Jahres der Mathematik 2008 will die Mathe-AG der Schule eine Mathe-Skulptur auf dem Schulhof errichten. Es soll ein großes Dreieck aus Stahlrohren um bzw. durch eine bestehende Betonwand gebaut werden. Titel des Kunstwerks: „Rechter Winkel". Die AG hat eine Skizze und einen Grundriss angefertigt. Nun beginnt das Rechnen…





a) **Berechne**, wie lang die einzelnen Rohre sein müssen.

b) **Begründe**, ob die Skulptur ihren Titel zu Recht trägt.

c) **Stelle** die Situation im Modell **dar**. Dabei kann die Betonwand z. B. bei entsprechender Wahl des Ursprungs durch die x_1x_3 – Ebene repräsentiert werden. Die Dreiecksseiten, die dann im Ursprung beginnen, werden auf der x_1x_2 – Ebene aufgezeichnet bzw. mit einem Draht eingefügt (1 m pro Einheit). Die Längen können nachgemessen werden; die Winkel nur zum Teil.

[3] Modifiziert nach EISEN, V.: Handlungsorientierter Mathematikunterricht. MUED, Appelhülsen 2017, 30.

1.2 Darstellung von Geraden im Raum

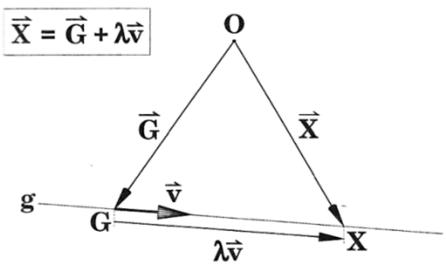
Aufgabe 1: Informationstext und erste Beispiele von Geraden im Raum

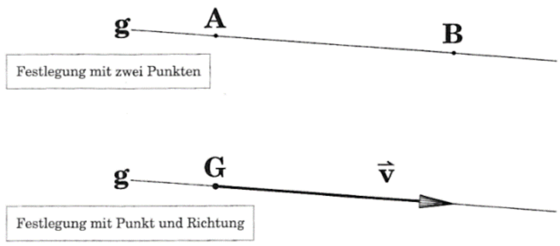
a) **Lies** den folgenden Informationstext und **erstelle** eine kurze Präsentation.

b) **Bearbeite** anschließend die beiden Beispiele. **Notiere** mögliche Unklarheiten.

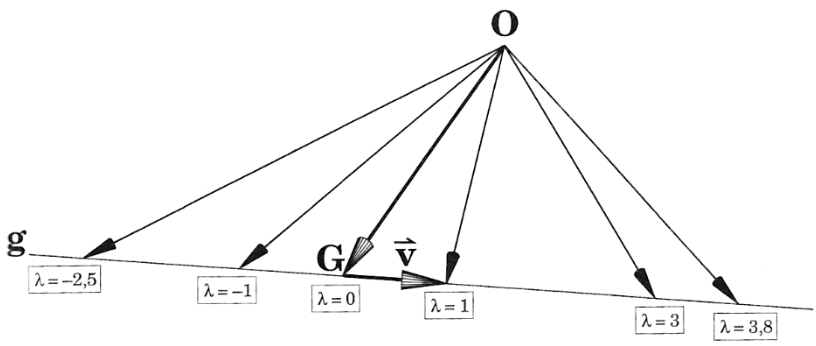
Bei der Darstellung von Geraden im Raum haben wir zwei Möglichkeiten, um eine Gerade g festzulegen:

(1) Es sind zwei Punkte vorgegeben.
(2) Es sind ein Punkt und eine Richtung vorgegeben.





Um zu einem beliebigen Punkt X zu gelangen, startet man vom Ursprung zu einem Geradenpunkt G und von dort mit einem Vielfachen des Vektors $\vec{v}$ zum Punkt X. Daher gilt die wichtige Gleichung: $\vec{X} = \vec{G} + \lambda \cdot \vec{v}$



Merke: Ist G ein beliebiger Punkt der Geraden g und $\vec{v}$ ein Vektor in Richtung g. Dann nennt man g: $\vec{X} = \vec{G} + \lambda \cdot \vec{v}$ eine Gleichung von g. G heißt **Aufpunkt**, $\vec{G}$ **Stützvektor**, $\vec{v}$ **Richtungsvektor** und λ der **Parameter** der Geradengleichung.

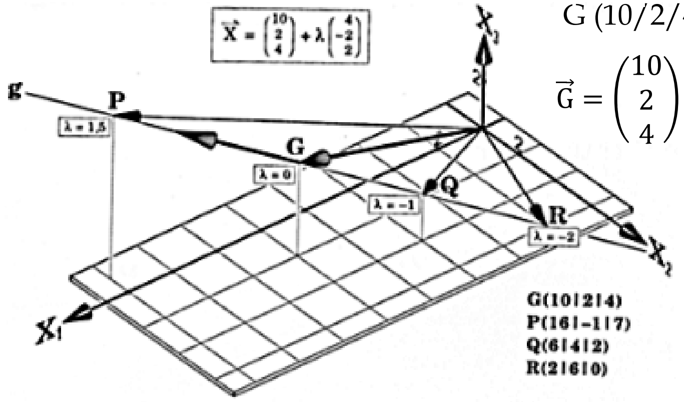
Zwei erste Beispiele:

a) G(10/2/4) und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) A(6/4/2); B(16/-1/7) $\Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 16 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Wir lernen nun, dass dieselbe Gerade – im Gegensatz zur Normalform y = mx + b in der Ebene – beliebig viele Geradengleichungen besitzen kann.

Betrachte das folgende Arbeitsblatt und **erläutere** die vier Fälle. **Fülle** die Lücken aus.



G (10/2/4) heißt **Aufpunkt**

$\vec{G} = \begin{pmatrix}10\\2\\4\end{pmatrix}$ heißt **Stützvektor**

$\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$ heißt **Richtungsvektor**

$\lambda = 0 \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix}10\\2\\4\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\2\\4\end{pmatrix} \Rightarrow G(10/2/4) \in g$

$\lambda = 1{,}5 \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix}10\\2\\4\end{pmatrix} + 1{,}5\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\-1\\7\end{pmatrix} \Rightarrow P(16/-1/7) \in g$

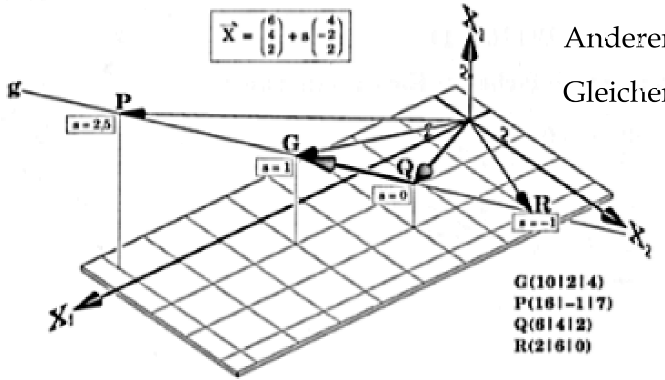
$\lambda = -1 \Rightarrow \vec{X} =$

$\lambda = -2 \Rightarrow \vec{X} =$

$S(6/0/7) \notin g$, da

Merke:

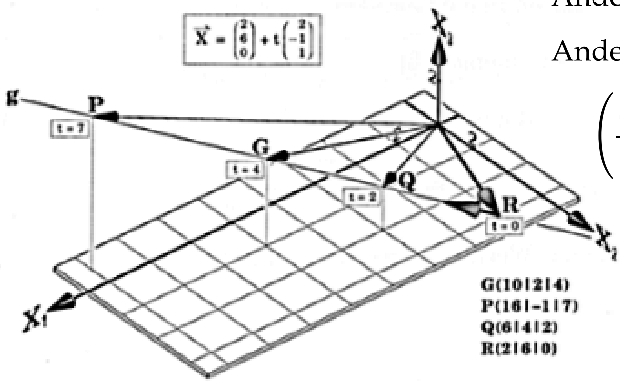
- Alle Richtungsvektoren sind **parallel**.
- Man nennt sie **kollinear**.
- Sie unterscheiden sich nur um einen **Vorfaktor**.



Anderer **Aufpunkt Q (6/4/2)**

Gleicher **Richtungsvektor**

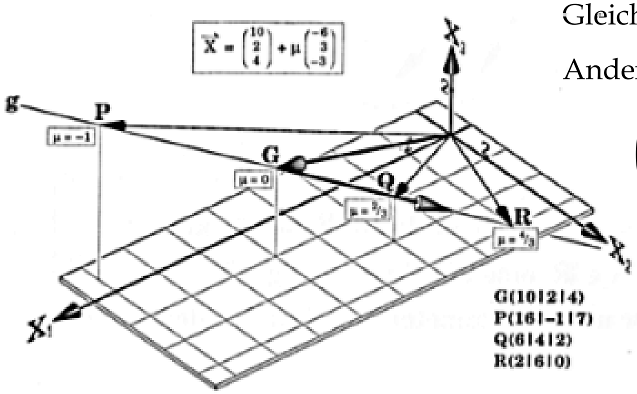
$\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$



Anderer **Aufpunkt R (2/6/0)**

Anderer **Richtungsvektor**

$\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \quad \cdot \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$



Gleicher **Aufpunkt G (10/2/4)**

Anderer **Richtungsvektor**

$\begin{pmatrix}-6\\3\\-3\end{pmatrix} = \quad \cdot \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Schon fit?

a) **Lies** in der folgenden Abbildung die Koordinaten der Punkte A bis O **ab**.

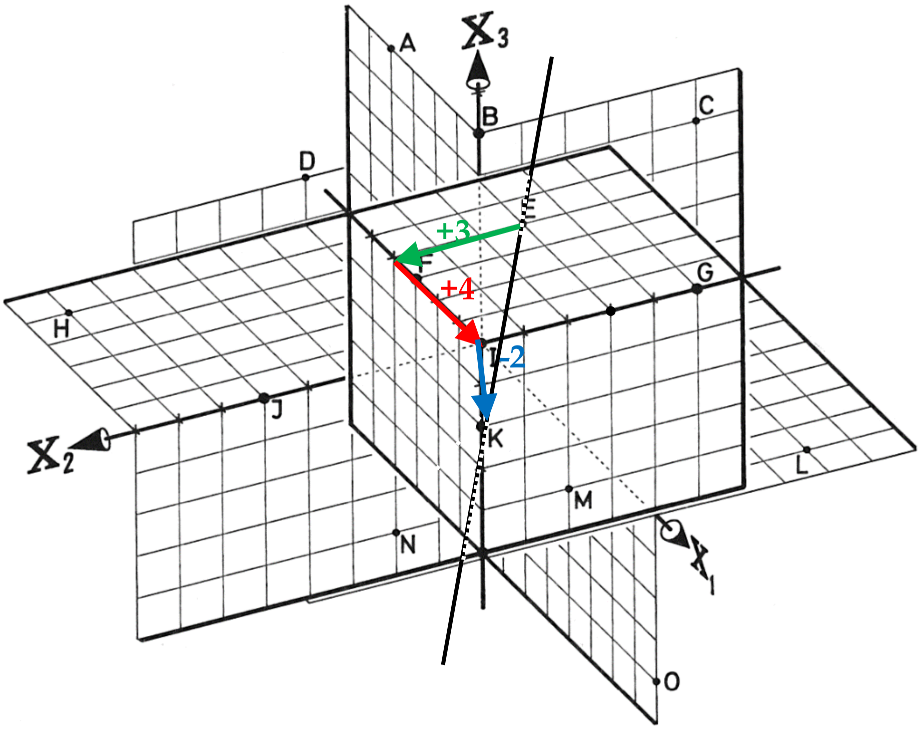
b) **Zeichne** Geraden durch die Punkte K und O sowie K und N in das KOS **ein**.

c) **Bestimme** für die beiden Geraden unter b) jeweils eine Gleichung einer Geraden durch Ablesung und durch eine Rechnung (vgl. Kasten unten).

d) Gegeben sei die Gerade g, die durch die beiden Punkte P (2/1/2) und Q (-1/4/-4) verläuft.

   a) **Untersuche** rechnerisch, in welchem Punkt die Gerade g die x_1x_2-Ebene schneidet.

   b) **Stelle** die Gerade g im 3D-Modell **dar** und **überprüfe** das Ergebnis aus (1) am 3D-Modell.



A (-4/0/5)
B (0/0/5)
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
N
O

Ablesung:

$$g_{EK}: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$g_{KO}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$g_{KN}: \vec{X} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Rechnung:

$$g_{EK}: \vec{X} = \vec{E} + \lambda \cdot \overrightarrow{EK} = \vec{E} + \lambda \cdot (\vec{K} - \vec{E}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$g_{KO}: \vec{X} = \vec{K} + \mu \cdot \overrightarrow{KO} = \vec{K} + \mu \cdot (\vec{O} - \vec{K}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{X} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = \quad \wedge \begin{matrix} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

Die Gerade g schneidet die x_1x_2-Ebene in

e) Weitere Übungsaufgaben zur Darstellung von Geraden im Raum:[4]

(1) **Gib** eine Gleichung der Geraden g **an**, die durch A in Richtung $\vec{v}$ verläuft.

(i) A(0/3/1) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (ii) A(2/4/6) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ (iii) A(0/0/0) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ (iv) A(-1/-2/-7) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

(2) Sei g gegeben durch g: $\vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechne die Punkte P_i, die zu den Parameterwerten λ_i gehören:
$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 0;\ \lambda_3 = -1{,}5;\ \lambda_4 = 100$

(3) Stelle eine Gleichung der Geraden g auf, die durch A(1/2/3) geht und parallel ist zur …

(i) x_1-Achse (ii) x_3-Achse (iii) Gerade h: $\vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$.

(4) **Zeichne** folgende Geraden als Schrägbild in einem Koordinatensystem und **gib** die besondere Lage **an**.

(i) a: : $\vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ii) b: : $\vec{X}(\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(iii) c: : $\vec{X}(\lambda) = \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (iv) d: : $\vec{X}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) **Arbeite** das folgende Beispiel **durch** und erledige die Aufgaben (1) und (2).

Punkt auf Gerade ?

Liegen die Punkte P(−6|−5|5) und Q(14|0|7) auf der Gerade g : $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$?

Wir setzen die Punktkoordinaten in die Geradengleichung ein

P: $\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, zusammengefaßt $\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\mu = -2$, paßt! Also liegt P auf g und gehört zum Parameter −2.

Q: $\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, zusammengefaßt $\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Es gibt keinen passenden μ-Wert. Also liegt P nicht auf g.

(1) Seien g: $\vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{X}(\tau) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

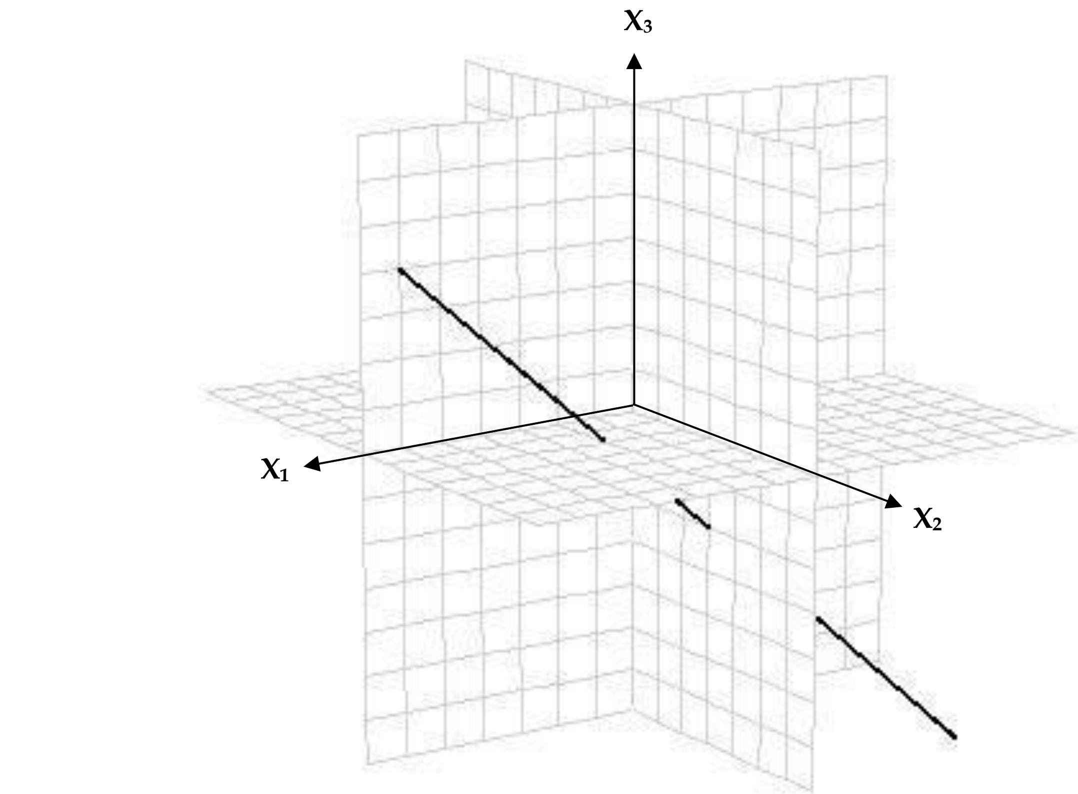
Untersuche, welcher der Punkte A(3/2/-5), B(-1/2/3), C(2/0/5), D(1/1/1) und E(-1/-2/3) auf welcher Gerade liegt. **Stelle** die Situation grafisch **dar**.

(2) Seien P(-7/12/18) und Q(3/-8/8). **Untersuche**, welcher der folgenden fünf Punkte A(4/-10/7), B(1/-4/10), C(-1/0/-12), D(-9/16/20) und E(-6/10/17) auf der Geraden durch P und Q bzw. auf der Strecke $\overline{PQ}$ liegen. **Stelle** die Situation grafisch **dar**.

[4] Aufgaben aus dem Lehrbuch: Anschauliche Analytische Geometrie von Barth, Krumbacher, Barth (2000)

Aufgabe 3: Darstellung von Geraden am 3D-Modell

Es wird eine Gerade g im 3D-Modell dargestellt (1 Kästchenlänge entspricht 1 Längeneinheit).



a) **Stelle** die Gerade im 3D-Modell mit Zahnstochern und Gummibänder **dar**.

b) **Gib** eine Gleichung für die Gerade g **an.**

c) **Ermittle** die Gleichung einer zweite Gerade h, die mit der Geraden g im 1 Quadranten des 3D-Modells einen Schnittpunkt S besitzt. **Stelle** die Gerade h im 3D-Modell **dar**.

d) Seien die beiden Geraden e: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und f: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \zeta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ gegeben.

Bestimme mithilfe des 3D-Modells den Schnittpunkt der beiden Geraden e und f. **Überprüfe** die Ablesung rechnerisch.

e) Versuche nun, selber Geraden zu finden, die alle drei Koordinatenebenen – wie oben die Gerade g – in Punkten mit ganzzahligen Koordinaten schneiden[5]. **Stelle** Deine Geraden unter Angabe der Geradengleichungen im Modell **dar** und erläutere **Deine** Vorgehensweise.

[5] Man spricht auch von sogenannten Spurpunkten S_1, S_2 und S_3, bei denen jeweils die x_1-, x_2- bzw. x_3-Koordinate Null ist. Schneidet die Gerade eine Koordinatenachse, dann werden die Spurpunkte mit S_{12} (Spurpunkt mit der x_3-Achse) S_{13} (Spurpunkt mit der x_2-Achse), S_{23} (Spurpunkt mit der x_1-Achse) bezeichnet.

1.3 Lagebeziehung zweier Geraden im Raum

Aufgabe: Alles eine Frage der Logik

Lies den Informationstext und **notiere** bestehende Unklarheiten.

In Aufgabe 2 f) 5 haben wir am Modell und durch geometrische Anschauung feststellen können, dass die beiden Geraden g und h sich im Punkt S(4/2/5) schneiden. Es wird nun rein rechnerisch der Schnittpunkt ermittelt:

$$g\colon \vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{und } h\colon \vec{X}(\mu) = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$$

Dafür schreiben wir den Vektor $\vec{X}$ in den beiden Geradengleichungen zunächst um (Begründe die Umformung):

$$g\colon \vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3\lambda\\2\lambda\\4+\lambda\end{pmatrix}$$

$$h\colon \vec{X}(\mu) = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+\mu\\2\\1+4\mu\end{pmatrix}$$

Der Ortsvektor $\overrightarrow{X_S}$ des Schnittpunktes S muss durch beide Geraden beschreibbar sein:

$$\overrightarrow{X_S} = \begin{pmatrix}1+3\lambda_S\\2\lambda_S\\4+\lambda_S\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+\mu_S\\2\\1+4\mu_S\end{pmatrix} \text{ oder ohne Index: } \vec{X} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3\lambda\\2\lambda\\4+\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+\mu\\2\\1+4\mu\end{pmatrix}$$

Nun muss man das folgende ungewohnte LGS (3 Gleichungen mit 2 Unbekannten) lösen:

(I) $3\lambda - \mu = 2$
(II) $2\lambda = 2$
(III) $\lambda - 4\mu = -3$

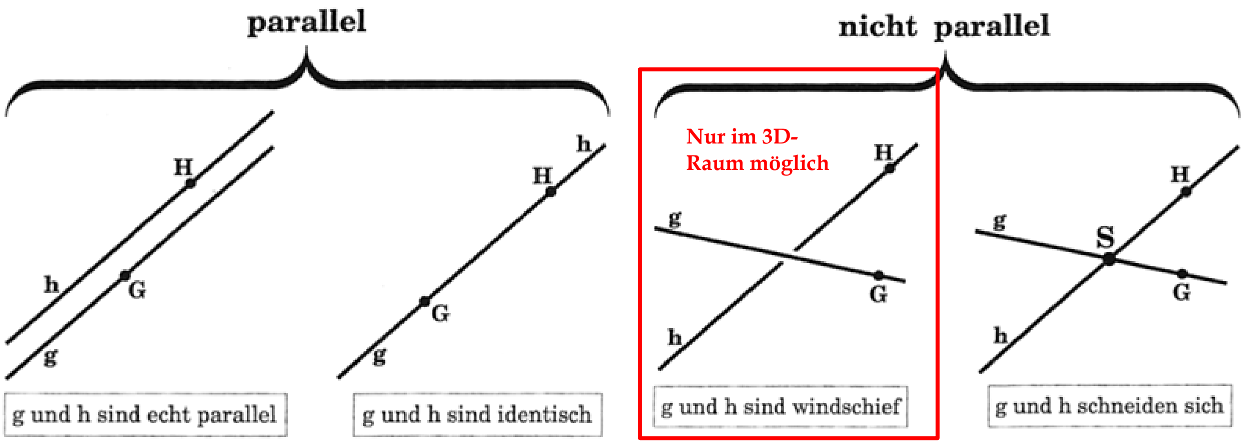
Lösungsstrategie für das LGS: Bestimme für zwei Gleichungen die Unbekannten λ und μ und setze die beiden Lösungen in die dritte Gleichung ein.

(II) liefert $\lambda = 1$. Setzt man $\lambda = 1$ in (I) ein erhält man $\mu = 1$.
Diese beiden Gleichungen müssen (III) erfüllen:
$1 - 4 \cdot 1 = -3 \cdot$ (wahr)

Hinweis: Wäre die letzte Aussage falsch, wären die beiden Geraden g und h windschief! (siehe unten)

$$\text{Also: } \vec{X} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+1\cdot 3\\0+1\cdot 2\\4+1\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix} \Rightarrow S(4/2/5)$$

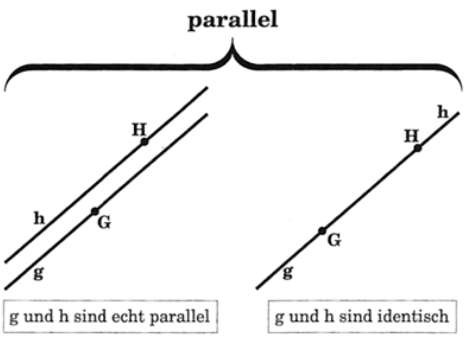
Nun wollen wir uns einer **systematischen Betrachtung der Lagebeziehung zweier Geraden** zuwenden. Dabei erhalten wir vier Fälle:

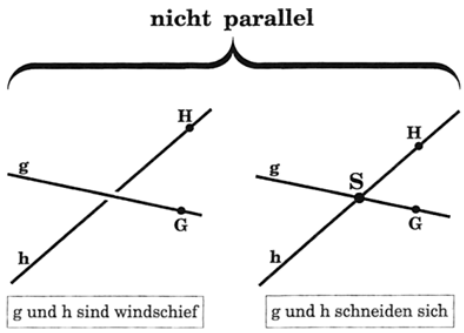


Welche Lage haben g und h zueinander?   **g: $\vec{X}(\lambda) = \vec{G} + \lambda \cdot \vec{u}$ und h(μ): h: $\vec{X} = \vec{H} + \mu \cdot \vec{v}$**

Frage 1	**Sind die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kollinear?** **Gibt es ein k mit $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$?**

g: $\vec{X} = \vec{G} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{X} = \vec{H} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind kollinear, da $\vec{u} = -\frac{1}{3} \cdot \vec{v}$.	g: $\vec{X} = \vec{G} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{X} = \vec{H} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind offenbar nicht kollinear, da es kein k gibt mit $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$.
Ja	**Nein**

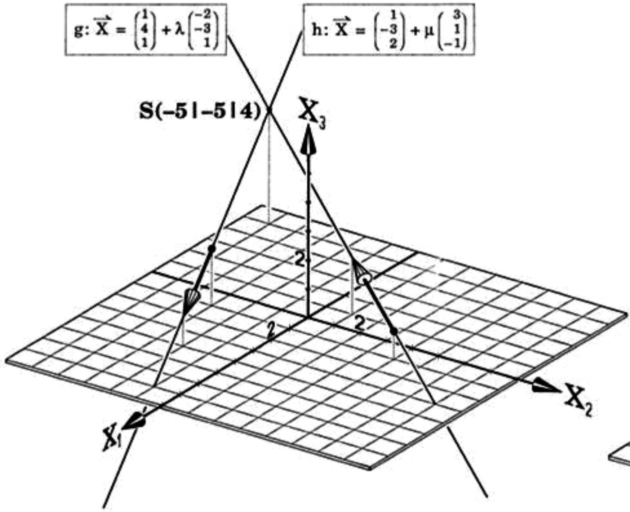


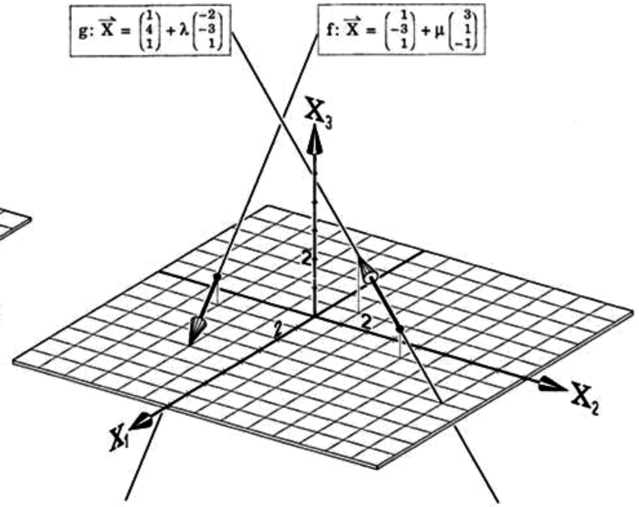


Frage 2	**Liegt der Punkt H auf g?** **Kann der Stützvektor $\vec{H}$ durch die Gerade g dargestellt werden?**		**Gibt es einen gemeinsamen Schnittpunkt S** **Stellen beide Gleichungen einen gemeinsamen Punkt dar?**	

g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\vec{H} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3\lambda \\ 1-\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$ $4 = 1 + 3\lambda \Rightarrow \lambda = 1$ $0 = 1 - \lambda \Rightarrow \lambda = 1$ $1 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 0{,}5$ ⇒ Es gibt kein eindeutiges λ ⇒ H ∉ g	g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\vec{H} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3\lambda \\ 1-\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$ $4 = 1 + 3\lambda \Rightarrow \lambda = 1$ $0 = 1 - \lambda \Rightarrow \lambda = 1$ $2 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 1$ ⇒ Es gibt ein eindeutiges λ ⇒ H ∈ g	g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1-2\lambda \\ 4-3\lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3\mu \\ -3+\mu \\ 1-\mu \end{pmatrix}$ $2\lambda + 3\mu = 0$ $3\lambda + \mu = 7$ $\lambda + \mu = 0$ ⇒ LGS ist nicht lösbar, da es keine eindeutig λ und μ gibt.	g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1-2\lambda \\ 4-3\lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3\mu \\ -3+\mu \\ 2-\mu \end{pmatrix}$ $2\lambda + 3\mu = 0$ $3\lambda + \mu = 7$ $\lambda + \mu = 1$ ⇒ λ = 3; μ = −2 lösen das LGS eindeutig ⇒ S (-5/-5/4)
Nein	**Ja**	**Nein**	**Ja**
g und h sind echt parallel	**g und h sind identisch**	**g und h sind windschief**	**g und h schneiden sich**

Grafisch können die beiden Geradenpaare der Fälle „Schnittpunkt“ und „Windschief“ wie rechts dargestellt werden. Löse die LGS händisch und anschließend unter Zuhilfenahme des GTR.





$\begin{pmatrix}1-2\lambda\\4-3\lambda\\1+\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3\mu\\-3+\mu\\2-\mu\end{pmatrix}$ (I) $2\lambda + 3\mu = 0$ (II) $3\lambda + \mu = 7$ (III) $\lambda + \mu = 1$ (II) – (III): $2\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 3$ λ in (III): $\mu = -2$ λ und μ in (I): $2{\cdot}3 + 3{\cdot}(-2) = 0$ (wahr) $\vec{S} = \begin{pmatrix}1-2{\cdot}3\\4-3{\cdot}3\\1+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-5\\4\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ S $(-5/-5/4)$	$\begin{pmatrix}1-2\lambda\\4-3\lambda\\1+\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3\mu\\-3+\mu\\1-\mu\end{pmatrix}$ (I) $2\lambda + 3\mu = 0$ (II) $3\lambda + \mu = 7$ (III) $\lambda + \mu = 0$ (II) – (III): $2\lambda = 7 \Rightarrow \lambda = 3{,}5$ λ in (III): $\mu = -3{,}5$ λ und μ in (I): $2{\cdot}3{,}5 + 3{\cdot}(-3{,}5) = 0$ (falsch) $\Rightarrow$ Das LGS ist unlösbar $\Rightarrow$ Es gibt keinen gemeinsamen Geradenpunkt $\Rightarrow$ g und h sind windschief.

Übungsaufgaben[6]:

1 Entscheiden Sie, ob die Geraden g und h parallel bzw. identisch sind.

a) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$; $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$

b) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$; $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\\3\end{pmatrix}$

c) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$; $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0{,}5\end{pmatrix}$

d) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\9\\8\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}8\\7\\0\end{pmatrix}$; $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\3{,}5\\0\end{pmatrix}$

2 Zwei der Geraden sind zueinander windschief. Wie kann man sofort erkennen, welche Geraden dies sind? Begründen Sie Ihre Antwort.

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$; $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$; $i\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

3 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S.

a) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$; $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\1\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-6\\-3\\3\end{pmatrix}$

b) $g\colon \vec{x} = t\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$; $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

c) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

d) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$; $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\-15\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-0{,}5\\1\\0\end{pmatrix}$

4 In Fig. 1 sind die Punkte P, Q und R die Mitten der jeweiligen Kanten.
a) Schneiden sich die Geraden g und h oder sind sie zueinander windschief?
b) Berechnen Sie die Länge der Stücke der Geraden, die innerhalb des „Daches" verlaufen.

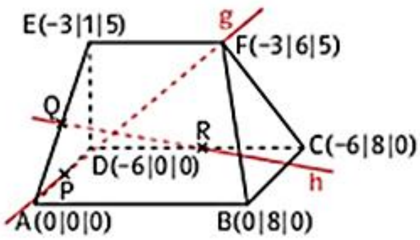


Fig. 1

Lösungen

1 Die Geraden g und h
a) sind identisch,
b) sind parallel,
c) sind identisch,
d) sind weder parallel noch identisch.

2 Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt S(1|2|3) (s. Stützvektor).
Die Geraden h und i haben den gleichen Richtungsvektor.
Also müssen laut Aufgabenstellung die Geraden g und i zueinander windschief sein.

3 a) g und h sind parallel und verschieden.
b) g und h sind windschief.
c) g und h schneiden sich im Punkt (2|1|3).
d) g und h schneiden sich im Punkt (−5|−15|1).

4 a) Die Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\6\\5\end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-6\\4\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4{,}5\\-3{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$ sind windschief.

b) Teil von g innerhalb des „Daches":
$|\overline{PF}| = \left|\begin{pmatrix}0\\6\\5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+6^2+5^2} = \sqrt{61} \approx 7{,}81$;

Teil von h innerhalb des „Daches":
$|\overline{QR}| = \left|\begin{pmatrix}4{,}5\\-3{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{38{,}75} \approx 6{,}22$

[6] Übungsaufgaben entstammen aus dem Lambacher Schweizer für die Q-Phase

1.4 Bewegungsaufgaben

Aufgabe 1: Darstellung von Flugbahnen im 3D-Modell[7]

Die Position eines Segelflugzeugs am Himmel wird durch drei Koordinaten – Osten, Norden, Höhe – (jeweils in m) bestimmt (der Ursprung ist der Tower eines Sportflugplatzes).

a) Der erste Segelflieger startet von einem Berg mit 300 Meter Höhe (0 | 100 | 300) und gleitet gleichmäßig zum Punkt (600 | 500 | 0).

(1) **Bestimme** eine Geradengleichung der Flugbahn.

(2) **Ermittle** die Position des Fliegers nach einem Viertel der Flugzeit.

(3) **Stelle** die Situation mit dem 3D-Modell **dar**. [Darstellung im Modell: mit Gummibändern (100 Meter pro Einheit).]

(4) **Zeichne** eine senkrechte Projektion der ersten Flugbahn in die x_1x_2-Ebene.

b) Der zweite Segelflieger startet von einem Berg mit 400 Meter Höhe (200 | 0 | 400) und gleitet bis (600 | 300 | 200). Dort dreht er und fliegt zum Landepunkt (200 | 600 | 0).

(1) **Bestimme** jeweils eine Geradengleichung zu den beiden Flugbahnen des Segelflugzeuges.

(2) **Untersuche,** welcher Flugabschnitt länger ist, und **gib** die Längen **an**.

(3) **Ermittle** die Position des Segelflugzeuges nach $\frac{7}{8}$ der Gesamtstrecke.

(4) **Stelle** die Situation mit dem 3D-Modell **dar**. [Darstellung im Modell: mit Gummibändern (100 Meter pro Einheit).]

Aufgabe 2: Zwei fliegende Modellhubschrauber[8]

Zwei Modellhubschrauber fliegen durch ein Zimmer. Der eine Hubschrauber fliegt von der Deckenlampe A (0 | 3 | 2,5) zum Nachttisch B (1 | 0 | 0,5). Der zweite Hubschrauber startet **gleichzeitig** beim Punkt C (0 | 1 | 2) und fliegt in die Richtung

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (alle Angaben in Metern).

a) **Stelle** die Situation im Modell **dar.** [Darstellung im Modell: 1 Längeneinheit entspricht 50 cm.]

b) **Zeichne** die senkrechten Projektionen der Flugbahnen in der x_1x_2-Ebene.

c) **Prüfe** rechnerisch, ob und ggf. wo und unter welcher Bedingung die Möglichkeit besteht, dass die beiden Hubschrauber zusammenstoßen.

---

[7] Verändert nach EISEN, V.: Handlungsorientierter Mathematikunterricht. MUED, Appelhülsen 2017, 38, 40.
[8] Verändert nach EISEN, V.: Handlungsorientierter Mathematikunterricht. MUED, Appelhülsen 2017, 43.

Aufgabe 3: Zwei fliegende Modellflugzeuge[9]

Zwei Modellflugzeuge fliegen über eine Wiese. Der eine Flieger fliegt von dem Punkt P_1 (10 | 0 | 20) in ein Tal zum Punkt P_2 (50 | 40 | -20). Der zweite Flieger ist startet zur gleichen Zeit in dem Tal beim Punkt P_3 (50 | 0 | -20) und fliegt gerade zurück zu seinem Besitzer im Punkt P_4 (30 | 60 | 0). (Alle Angaben in Metern.)

a) **Stelle** die Situation im Modell **dar.** [Darstellung im Modell: 1 Längeneinheit entspricht 10 m.]

b) **Zeichne** die senkrechten Projektionen der Flugbahnen in der x_1x_2-Ebene.

c) **Prüfe** rechnerisch, ob und ggf. wo die Möglichkeit besteht, dass die beiden Modellflugzeuge zusammenstoßen.

Aufgabe 4: Flugschule[10]

Eine Flugschule hat die Ausbildung ihrer neuen Flugschüler abgeschlossen und lässt diese das erste Mal ohne jede Begleitung fliegen. Der erste Schüler verliert plötzlich die Kontrolle. Sein Flugzeug gerät in einen 13-sekündigen Sturzflug vom Punkt A (1000 | -600 | 1350) zum Punkt B (0 | 400 | 100); dann hat er wieder alles im Griff. Der zweite Flugschüler setzt gerade zum Start an. Für den Startflug von C (600 | 600 | 0) nach D (-600 | -200 | 400) benötigt er 27 Sekunden. (Alle Angaben in Metern.)

a) **Überprüfe**, ob Kollisionsgefahr besteht.

b) Wenn der Abstand zwischen zwei Flugzeugen weniger als 100 Meter beträgt, spricht man von einem „Beinahezusammenstoß“. Wäre dies der Fall, müsste der erste Schüler noch einmal Flugstunden nehmen.

   Untersuche, ob der erste Schüler erneut Flugstunden nehmen muss.

c) Die Fluglehrer befinden sich auf dem Flughafen im Punkt (600 | 600 | 0). Auf Grund von schlechter Sicht können sie nur 800 Meter weit sehen.

   Prüfe nach, ob die Fluglehrer das Vergehen des (ehemaligen) Flugschülers überhaupt sehen konnten.

d) Um den ganzen Zusammenhang im Detail rekonstruieren zu können, werden noch die Geschwindigkeiten der beiden Flugzeuge und die Steigung des zweiten Fliegers benötigt.

   Bestimme die Geschwindigkeiten und Steigung des zweiten Flugzeuges.

e) **Stelle** die Situation im Modell **dar**.

Aufgabe 5: Kommunikationsfehler[11]

Zwei Passagiermaschinen durchfliegen eine Wolkendecke (Sichtweite: 500 Meter). Das erste Flugzeug befindet sich im Punkt $P_1(5{,}5 | -2{,}5 | 1)$ und fliegt 120 km/h schnell mit Kurs $\vec{v}$.

---

[9] Verändert nach EISEN, V.: Handlungsorientierter Mathematikunterricht. MUED, Appelhülsen 2017, 45.
[10] Modifiziert nach EISEN, V.: Handlungsorientierter Mathematikunterricht. MUED, Appelhülsen 2017, 96.
[11] Modifiziert nach EISEN, V.: Handlungsorientierter Mathematikunterricht. MUED, Appelhülsen 2017, 101.

Dabei gilt: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ein Fluglotse weißt den Piloten nach 1,37 Minuten an, den Kurs zu ändern und $P_3(0|4|3)$ anzusteuern. Dies kann ein gefährlicher Fehler sein, denn im selben Augenblick, in dem der erste Flieger im Punkt P_1 ist, befindet sich ein zweiter Flieger im Punkt $P_4(-1|-6|4{,}5)$ und fliegt auf Punkt $P_5(4|4|2)$ zu; bei momentaner Geschwindigkeit wird er für diese Strecke 4,36 Minuten benötigen. (Alle Angaben in Kilometern.)

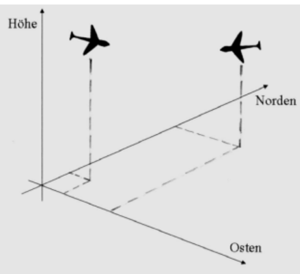
a) **Entscheide**, ob Kollisionsgefahr besteht.

b) **Überprüfe**, ob die Flugzeuge Sichtkontakt haben.

c) **Stelle** die Situation im Modell **dar**.

Aufgabe 6: Flugsicherheit[12]

„Glück gehabt!?", denkt sich Herr Falk, der Fotograf dieser beiden Kondensstreifen. Gegen 11 Uhr morgens, in einem Abstand von nur wenigen Sekunden, ziehen zwei Flugzeuge am Himmel vorbei. Die Bahnen der beiden Flugzeuge scheinen sich zu kreuzen und wäre die erste Maschine nur etwas später gekommen, wäre es dann zu einer Kollision gekommen? Durch dieses Ereignis in Unruhe versetzt, erkundigt sich der Mann nach den gesetzlichen Bestimmungen zur Flugsicherheit. Er erfährt Folgendes: Der Flugraum ist in kontrollierten und unkontrollierten Luftraum eingeteilt. Bis zu einer Höhe von 2500 Fuß (ft)[13] fliegen Luftfahrzeuge wie Drachen oder Hubschrauber, die nicht von der Flugsicherheit überprüft werden (In der Nähe von kontrollierten Flughäfen ist die Höhe auf 1000 ft abgesenkt.). Über dieser Höhe beginnt der kontrollierte Luftraum, in dem Flugzeuge einen vertikalen Mindestabstand von 1000 ft besitzen müssen. Der horizontale Mindestabstand bewegt sich zwischen 3 und 8 NM (nautical miles/Seemeilen)[14] und hängt von spezifischen Faktoren wie Flugzeuggewicht oder technische Ausstattung ab.



Die Flughäfen und das umliegende Gebiet werden vom Tower überwacht. Oberhalb von 10000 ft sind Bezirkskontrollen verantwortlich. Die Flugzeuge bewegen sich auf fest vorgegebenen Flugverkehrsstrecken, ähnlich wie Autoverkehrsstraßen. Die Strecken sind durch Navigationsanlagen am Boden oder durch Koordinatenschnittpunkte gekennzeichnet. Die Bordsysteme im Flugzeug empfangen die entsprechenden Signale von den Bodenanlagen oder via Satellit und führen das Flugzeug automatisch über das Flight Management System oder leiten die Signale an den Neben dem Piloten tragen Fluglotsen die Verantwortung für die Flugzeuge. Sie sind während des gesamten Fluges über den Flugweg informiert. Mit Hilfe von Radarantennen, die im ganzen Bundesgebiet verteilt sind, wird die Flugstrecke überwacht. Die Antennen messen in zeitlichen Abständen die Entfernung des Flugzeuges zur Antenne, die Höhe des Flugzeuges und die Richtung als Winkel. Die Daten werden vom Computer in drei Koordinaten – Norden, Osten, Höhe – (jeweils in Kilometer) übersetzt. Das ermöglicht eine Darstellung auf dem Monitor. Auf Nachfrage erhält Herr Falk jeweils vier Orte für die beiden Flugzeuge:

[12] Modifiziert nach EISEN, V.: Handlungsorientierter Mathematikunterricht. MUED, Appelhülsen 2017, 24.
[13] 1 Fuß sind 0,3048 m
[14] 1 Seemeile sind 1,852 km

Flugzeug/Zeit	11:00:00	11:00:20	11:00:40	11:01:00
Boeing 767-299	(1/-2/8,3)	(3/0/9,3)	(5/2/10,3)	(6/6/10,3)
Douglas DC 10-30F	(0/2/7,3)	(2/1/8,3)	(4/0/9,3)	(6/-1/10,3)

a) **Untersuche**, ob Herr Falk zur recht beunruhigt ist.

b) **Gib** weitere im Sachkontext sinnvolle Fragestellungen **an** und **beantworte** sie.

c) **Stelle** die Situation mit dem 3D-Modell **dar**.

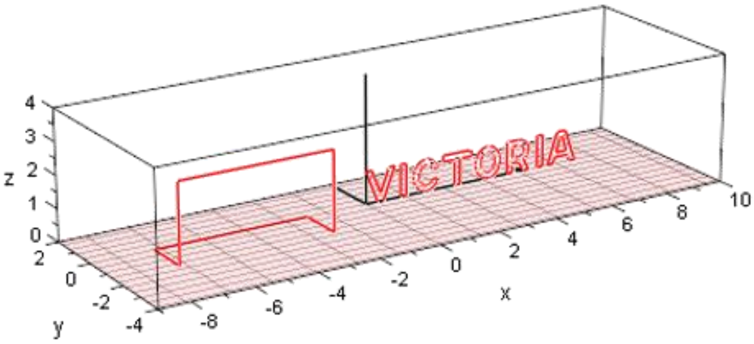
1.5 Projektionsaufgaben

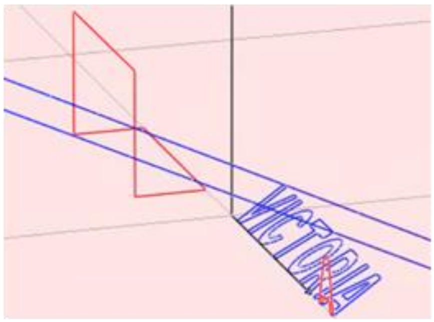
Aufgabe 1: Cam Carpets[15]

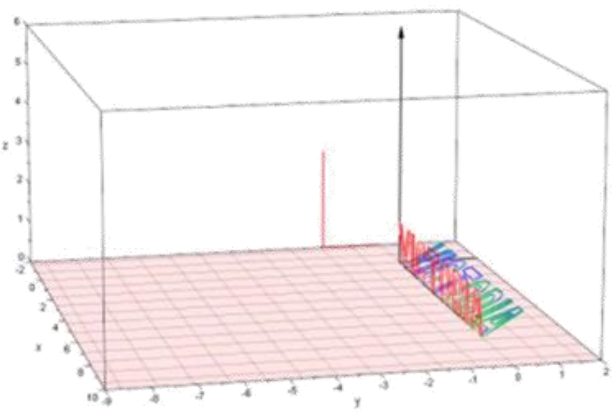
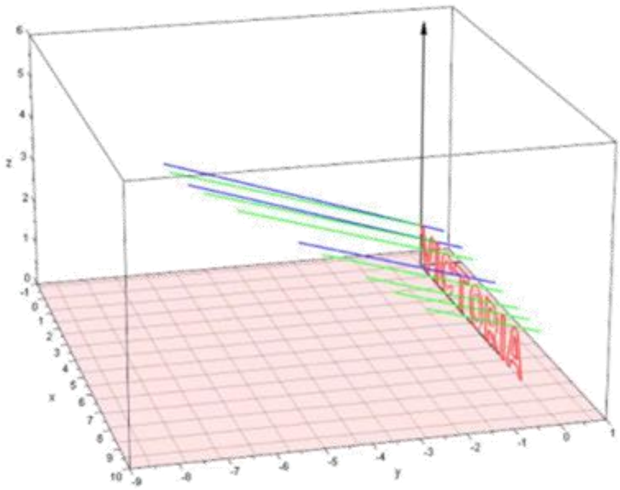
Rechts und links vom Tor befinden sich sogenannte **Cam Carpets** (Werbeteppiche). Sie sorgen mit ihrem dreidimensionalen Effekt dafür, dass Werbebotschaften optisch aufstehend erscheinen, obwohl sie flach auf dem Boden liegen.



Die folgenden Abbildungen und die Abbildung oben rechts zeigen deutlich, dass die Schrift auf den Cam Carpets verzerrt erscheint. Der Effekt, dass diese Buchstaben im Fernsehen wie aufrechtstehend wirken, beruht auf einer optischen Täuschung.





15 Idee von Klaus Gerber, Abbildungen von Günther von Stein, Fotos: www.stadionwelt.de.

a) **Erkläre**, wie es zum 3D-Effekt und der damit verbundenen optischen Täuschung kommt.

Im Rhein-Energie-Stadion des 1. FC Köln hat die Kamera die Position P (55,8/-53/32) und die linke obere Ecke des Buchstabens T des Wortes VICTORIA ist Q (2,8/0/1) (alle Einheiten in Meter). Nun soll der Buchstabe T unter der Projektionsrichtung von P nach Q in die x_1-x_2-Ebene (der Boden) projiziert werden. Dabei wird für alle Punkte des Buchstabens T zur Vereinfachung die Projektionsrichtung von P nach Q angenommen. Man geht also davon aus, dass es sich um eine sogenannte **Parallelenprojektion** handelt.

b) **Fertige** zunächst eine Skizze (keine Zeichnung!) der Situation **an**.

c) **Berechne** die Projektionsrichtung von P nach Q.

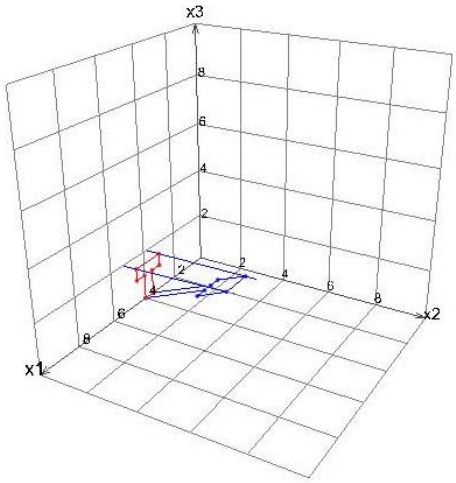
d) **Berechne** die Koordinaten des Projektionspunktes Q´, der entsteht, wenn man die Q unter der Projektionsrichtung von P nach Q in die x_1x_2-Ebene projiziert.

   [Tipp: Stelle die Projektionsgerade durch die Punkte P und Q auf und berechne den Spurpunkt S_3 dieser Geraden.]

e) **Berechne** die Koordinaten der Projektionspunkte R´ und S´ der rechten oberen Ecke R (3,8/0/1) und der rechten unteren Ecke S (3,8/0/0,75) unter der gleichen Projektionsrichtung wie unter c).

Aufgabe 2: Cam-Carpets mit dem 3D-Modell

Nun soll der Buchstabe T des Wortes VICTORIA auf den Boden neben dem Tor projiziert werden. Das T wird in einer neuen Modellierung bestimmt durch die Punkte A(3/0/1,5), B(4,5/0/1,5), C(4,5/0/1), D(4/0/1), E(4/0/0), F(3,5/0/0), G(3,5/0/1), H(3/0/1).



a) **Zeichne** die Punkte in ein Koordinatensystem und **stelle** die Eckpunktes des Buchstaben T mit einem wasserlöslichen Stift im 3D-Modell **dar**.

b) Die Projektionsrichtung ist näherungsweise $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   (1) **Gib** die Gleichung der Projektionsgeraden g durch den Punkt A **an**.

   (2) **Berechne** die Projektionspunkte A´, B´, C´, D´, E´, F´, G´ und H´.

   (3) **Zeichne** die Projektionspunkte in das Koordinatensystem aus Teil a).

   (4) **Stelle** das projizierte T mit dem wasserlöslichen Stift im 3D-Modell **dar**.

c) Die Kamera liegt im Punkt P. Der Punkt P befindet sich auf der Projektionsgeraden g und gleichzeitig im 4. Oktanten. Die Entfernung von P zu A ist 20-mal so groß wie die Entfernung von A zu A´.

   Berechne die Koordinaten des Kamerapunktes P.

Aufgabe 3: Wilder Westen[16]

In einer neuen Westernparodie „Late Noon" wird ganz klassisch mit dünnen Holzattrappen von Häusern gearbeitet. Der finale Showdown soll, wie der Name schon sagt, erst spät am Tag stattfinden, wenn die Sonne sehr tief steht. Dann kommen die Sonnenstrahlen mit der Richtung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Der Regisseur möchte, dass die beiden Duellanten auf den Punkten $P_1(4|1|0)$ und $P_2(2|1|0)$ stehen und ihr Duell in einer Entfernung von 2 Metern austragen. Die Holzattrappe in der Wüste kann mit folgenden Punkten beschrieben werden: $P_3(2|0|0)$; $P_4(2|0|2)$; $P_5(4|0|3)$; $P_6(6|0|2)$; $P_7(6|0|0)$. (Alle Einheiten sind in Metern angegeben.)

a) **Skizziere** die Szene und/oder **stelle** die Szene im 3D-Modell **dar**. **Beschreibe** die Probleme, die durch diese Konstellation auftreten könnten.

b) **Prüfe nach**, ob die Köpfe der 1,7 Meter hohen Duellanten im Schatten liegen und **erläutere** Deinen Lösungsweg.

[16] EISEN, V.: Handlungsorientierter Mathematikunterricht. MUED, Appelhülsen 2017, 58.

1.6 Geradenscharen

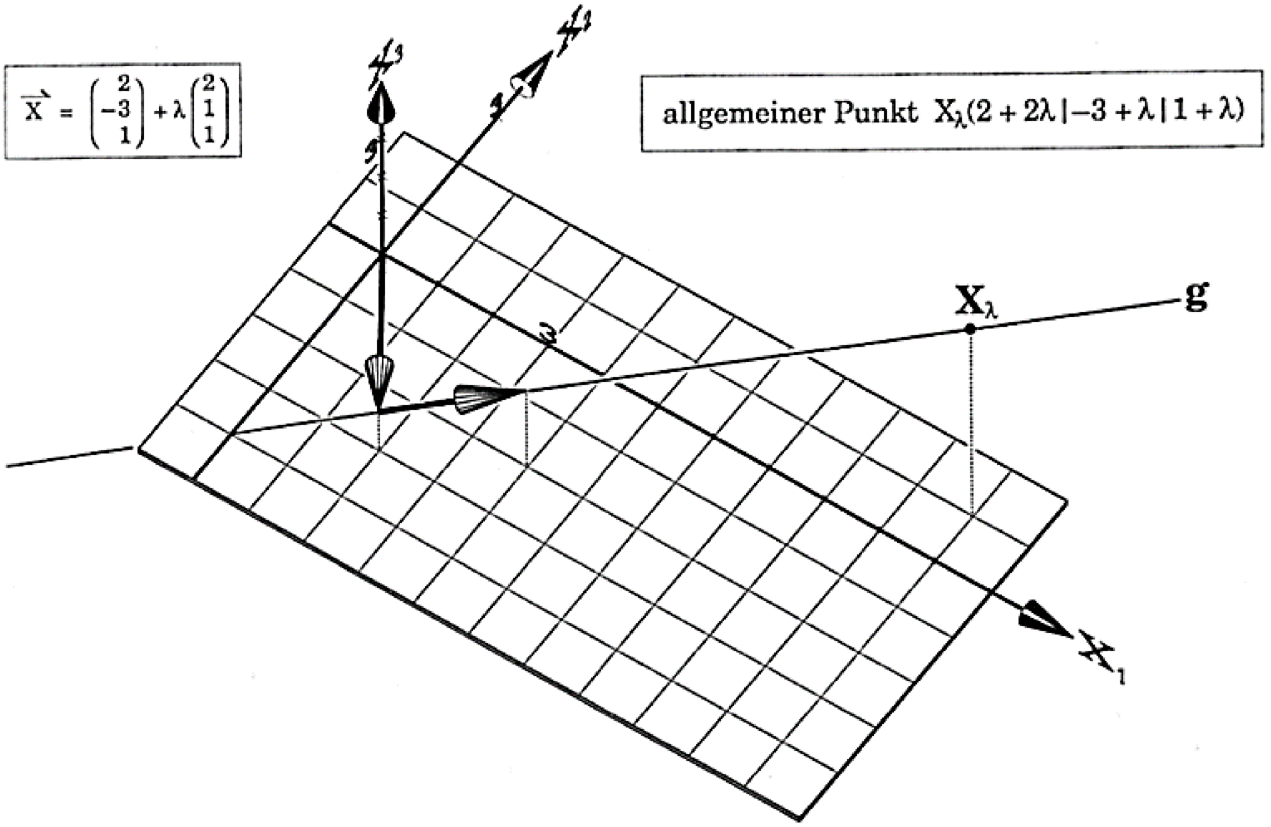
Aufgabe 1: Allgemeiner Geradenpunkt und Punkteschar[17]

(1) **Arbeite** den folgenden Informationstext zum allgemeinen Geradenpunkt und zur Punkteschar **durch** und erledige anschließend die Übungsaufgaben.

Allgemeiner Geradenpunkt

Manchmal ist es nützlich, mit dem **allgemeinen Geradenpunkt** zu arbeiten. Sein Ortsvektor ergibt sich, wenn man die rechte Seite der Geradengleichung zusammenfasst. So hat von

g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ der allgemeine Punkt X_λ den Ortsvektor $\overrightarrow{X_\lambda} = \begin{pmatrix} 2+2\lambda \\ -3+\lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix}$.



Mit dem allgemeinen Punkt findet man zum Beispiel bequem den Punkt P auf g, der 5 Einheiten über der x_1x_2-Ebene liegt. Für ihn gilt $x_3 = 5$, also $1 + \lambda = 5$, also $\lambda = 4$.

Eingesetzt in $\overrightarrow{X_\lambda}$ ergibt sich folglich $\overrightarrow{X_\lambda} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ergebnis: P (10/1/5) (vgl. Abb. oben).

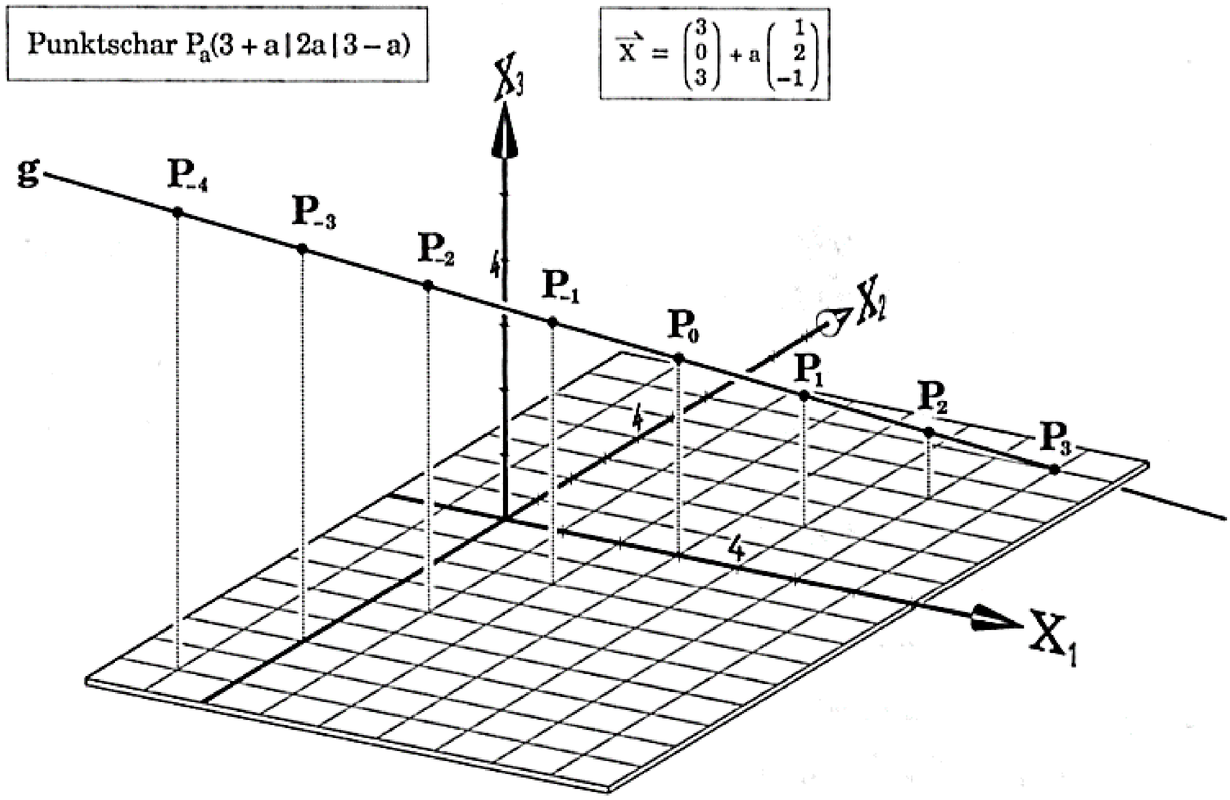
[17] Alle Abbildungen sind aus dem Lehrbuch: Anschauliche Analytische Geometrie von Barth, Krumbacher, Barth (2000)

Punkteschar

Kommt ein Parameter in den Punktkoordinaten vor, so spricht man von einer **Punkteschar**, zum Beispiel $P_a(3+a/2a/3-a)$. Um herauszufinden, ob die Schar P_a eine Gerade bildet, fasst man P_a als allgemeinen Geradenpunkt auf und versucht, den Ortsvektor $\overrightarrow{P_a}$ so zu zerlegen, dass eine Geradengleichung entsteht.

$\overrightarrow{P_a} = \begin{pmatrix} 3+a \\ 2a \\ 3-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+a \\ 0+2a \\ 3-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Die Punkte P_a bilden die Gerade g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

In der folgenden Abbildung ist dieser Sachverhalt zur Punkteschar dargestellt.



(2) Gegeben seien die Gerade g: $\vec{X}(\sigma) = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die Punkte $A(a_1/a_2/8)$, $B(-12/k/-k)$, $C(c_1/1/1)$, $D(2k/-3k/k)$, $E(4k-3/1/2k)$.

(1) **Berechne** die fehlenden Koordinaten in A bis E, so dass diese Punkte auf g liegen.

(2) **Ermittle** für die Punkte B bis E Geradengleichungen und interpretiere die Bedeutung dieser Geraden in Bezug auf die Gerade g und die Ergebnisse von Aufgabenteil (1).

(3) **Erläutere**, welchen geometrischen Ort die Punkteschar für A bildet.

(3) **Untersuche**, ob die Punkte P_a auf einer Geraden liegen. **Gib** ggf. die Gleichung der Geraden **an**.

(1) $P_a(1+2a/2-7a/-1-2a)$ (2) $P_a(3a-2/4/-6a)$ (3) $P_a(a/1/0)$

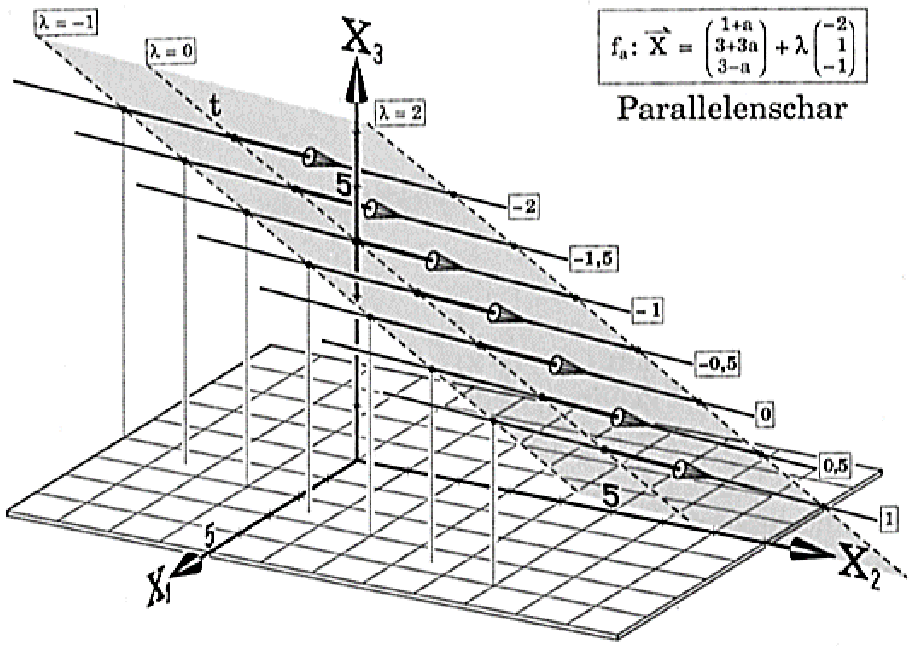
(4) $P_a(1+a/1-a/a+1)$ (5) $P_a(a^2/a/a+1)$ (6) $P_a(\frac{2}{a}/0/\frac{1}{a})$

Aufgabe 2: Parallelenschar und ebenes Geradenbüschel

a) **Arbeite** den folgenden Informationstext zur Parallelenschar und zum ebenen Geradenbüschel **durch** und erledige anschließend die Übungsaufgaben.

Kommt in einer Geradengleichung außer dem Geradenparameter (zum Beispiel λ) noch ein Parameter (zum Beispiel a) vor, dann beschreibt die Gleichung eine Geradenschar. Zu jedem Scharparameter a gehört eine Gerade der Schar. Man kann nun bei einer Schar Wünsche äußern, sich zum Beispiel Geraden mit bestimmten Eigenschaften heraussuchen oder den Ort von Punkten mit bestimmten Eigenschaften bestimmen. Wir behandeln hier nur die einfachen Fälle, in denen a linear auftritt.

1. Fall: Scharparameter nur im Aufpunkt: $f_a\colon \vec{X}(a,\lambda) = \begin{pmatrix} 1+a \\ 3+3a \\ 3-a \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.



Alle Schargeraden haben denselben Richtungsvektor: f_a ist eine Parallelenschar. Der Aufpunkt F_a liegt auf der Geraden t: $\vec{X}(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

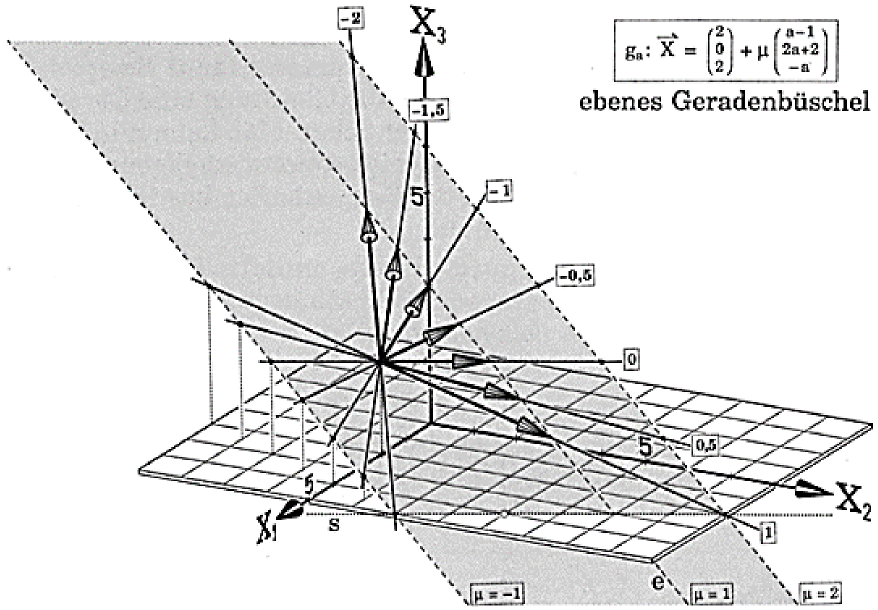
Welche Gerade schneidet die x_3-Achse?

Für diese Gerade gilt: ein Punkt Z (0/0/z) der x_3-Achse ist auch Punkt einer Schargerade fa. Das führt zu drei Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 1+a \\ 3+3a \\ 3-a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (1)\ 1 + a - 2\lambda = 0 \\ (2)\ 3 + 3a + \lambda = 0 \\ (3)\quad 3 - a - \lambda = z \end{array}$$

Die Gleichungen (1) und (2) liefern mit dem GTR a = -1 und $\lambda = 0$. Eingesetzt in die dritte Gleichung erhält man z = 4. Also schneidet f_{-1} die x_3-Achse im Punkt Z (0/0/4) mit dem Parameterwert $\lambda = 0$.

2. Fall: Scharparameter im Aufpunkt: $g_a\colon \vec{X}(a,\mu) = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}a-1\\2a+2\\-a\end{pmatrix}$.



Alle Schargeraden haben denselben Aufpunkt G (2/0/2). Die Punkte, die zum Parameter $\mu = 1$ gehören, liegen auf der Geraden e mit

$$e\colon \vec{X}(a,1) = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}a-1\\2a+2\\-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + a\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + a\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Die Schar g_a ist also ein ebenes Geradenbüschel mit G (2/0/2) als Trägerpunkt.

Welchen geometrischen Ort bilden die Spurpunkte in der x_1x_2-Ebene?

Aus $x_3 = 0$ folgt $2 - \mu a = 0$. Für $a = 0$ ergibt sich ein Widerspruch $2 = 0$. Die Gerade g_0 hat also keinen Spurpunkt in der x_1x_2-Ebene, sie ist daher echt parallel zur x_1x_2-Ebene. Für $a \neq 0$ folgt $\mu = \frac{2}{a}$. Es ergibt sich für den geometrischen Ort der Spurpunkte $\overrightarrow{S_{3_a}} = \begin{pmatrix}4-\frac{2}{a}\\4+\frac{4}{a}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{a}\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$. Der geometrische Ort ist die Gerade mit der Gleichung $s\colon \vec{X}(\alpha) = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + \alpha\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ ohne den Aufpunkt (4/4/0), weil der Parameter $\alpha = \frac{1}{a}$ nicht Null sein kann.

b) Sei $g_a\colon \vec{X}(a,\mu) = \begin{pmatrix}-14\\2\\2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}7\\a\\-1\end{pmatrix}$.

Bestimme a so, dass die Schargerade

(1) parallel ist zur x_1x_3-Ebene.

(2) durch den Ursprung geht.

(3) durch W (w_1/-4/5) geht. Ermittle W.

c) Sei $h_a: \vec{X}(a,\mu) = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4a \\ 4 \\ 13 - 6a \end{pmatrix}$.

Bestimme a so, dass die Schargerade

(1) parallel ist zur x_1x_2-Ebene.

(2) die x_2x_3-Ebene nicht schneidet.

(3) durch den Ursprung geht.

(3) die x_3-Achse schneidet. Ermittle den Schnittpunkt.

d) A (a/-2/3) und B (a + 4/0/5) legen eine Schar k_a von Geraden fest.

Bestimme die Schargeraden, welche die Koordinatenachsen schneiden, und **berechne** die Schnittpunkte.

1.7 Darstellung von Ebenen im Raum

Aufgabe 1: Unterschiedliche Darstellungsmöglichkeiten einer Ebene[18]

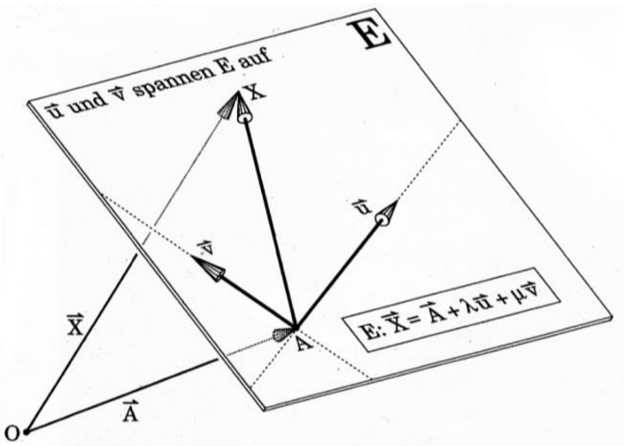
a) **Lese** den nachfolgenden Informationstext und **bearbeite** am Ende die Übungsaufgaben.

Wie kann eine Ebene im Raum eindeutig festgelegt werden?

Eine Ebene kann auf unterschiedlichen Arten eindeutig festgelegt werden:

- Ein Punkt und zwei Richtungen (zweier nicht kollinearer Vektoren)
- Drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen
- Eine Gerade und ein Punkt, der nicht auf der Geraden liegt
- Zwei echt parallele Geraden
- Zwei sich schneidende Geraden

Ein Punkt und zwei Richtungen (zweier nicht kollinearer Vektoren)



Eine Gleichung einer Ebene beschreibt die Ortsvektoren $\vec{X}$ aller Ebenenpunkte. Für diese Beschreibung eignet sich die Festlegung durch einen Punkt und zwei Richtungen am besten. Man wählt einen Punkt A der Ebene E als **Aufpunkt** und zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als **Richtungsvektoren**, die parallel zur Ebene liegen. Der Ortsvektoren $\vec{X}$ eines beliebigen Ebenenpunktes lässt sich darstellen als Summe von $\vec{A}$ und einer Linearkombination der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$:. Man erhält die Gleichung $\vec{X}(\lambda; \mu) = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$. λ, μ heißen **Parameter** des Punktes X. Die Gleichung heißt **Parametergleichung** oder Punkt-Richtungs-Gleichung der Ebene E.

Jeder Punkt der Ebene ist eindeutig durch das Parameterpaar $(\lambda; \mu)$ festgelegt. Der Punkt A und die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bestimmen in der Ebene ein (meist) schiefwinkliges Koordinatensystem mit A als Ursprung und (λ/μ) als Punktkoordinaten.

Merke: Ist A irgendein Punkt der Ebene E und sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei zu E parallele, nicht kollineare Vektoren, dann nennt man **E:** $\boldsymbol{\vec{X}(\lambda; \mu) = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ eine **Parametergleichung von E**. A heißt **Aufpunkt**, $\vec{A}$ heißt **Stützvektor**, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ heißen **Richtungsvektoren**, λ, μ heißen **Parameter** des Ebenengleichung.

[18] Alle Abbildungen sind aus dem Lehrbuch: Anschauliche Analytische Geometrie von Barth, Krumbacher, Barth (2000)

Beispiel: Bestimme eine Parametergleichung der Ebene E mit dem Stützvektor $\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und den nicht kollinearen (warum?) Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

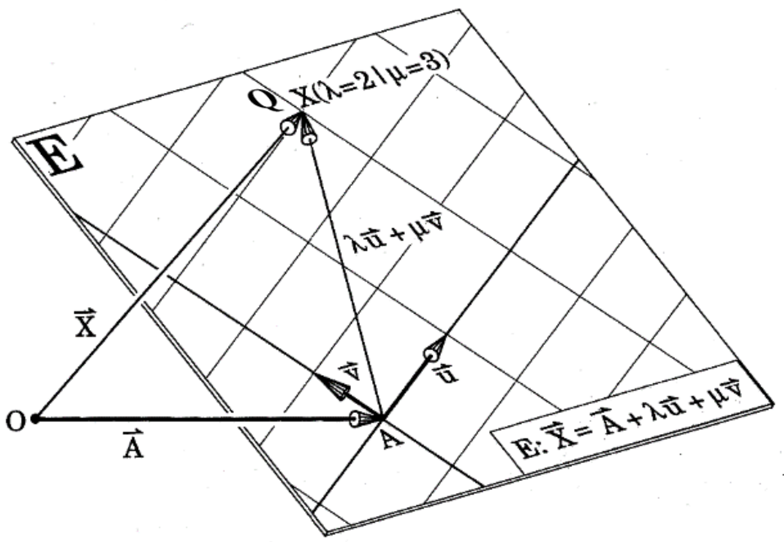
$\Rightarrow \mathbf{E}: \vec{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\mu} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$

Zu $\lambda = -1$ und $\mu = 2$ gehört $\vec{\mathbf{X}}(\mathbf{-1}; \mathbf{2}) = \vec{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} + (\mathbf{-1}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} + \mathbf{2} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Also gilt: P(5/7/2) liegt in der Ebene E.

Wie lauten die Koordinaten des Punktes Q, der in der Ebene E aus dem Beispiel liegt?

Vergleiche dazu die folgende Abbildung



$\vec{\mathbf{Q}} = \vec{\mathbf{X}}(\mathbf{2}; \mathbf{3}) = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} + \mathbf{2} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} + \mathbf{3} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{13} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{7} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Q(13/7/7)}$

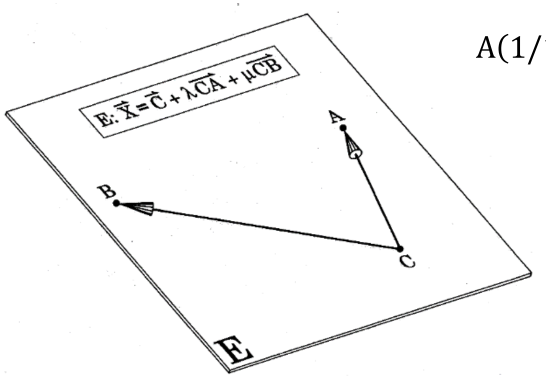
b) **Gib** eine Parametergleichung der Ebene E **an**, die den Punkt P(-2/1/7) enthält und von den Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

c) **Gib** die Punkte A, B, C und D **an**, die in der Ebene E: $\vec{X}(\lambda; \mu) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ liegen und die Parameterwerte (λ; μ) für A (0;0), B (0; 1), C (1; 0) und D (1; 1) haben.

d) **Untersuche**, ob die Punkte A (1/4/6), B (5/-7/0) und C (14/2/7) in der Ebene E mit der Parametergleichung E: $\vec{X}(\lambda; \mu) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegen, und **nenne** gegebenenfalls die zugehörigen Parameterwerte (λ; μ).

e) **Ermittle** mithilfe der folgenden Abbildungen jeweils eine Ebenengleichung in Parameterform.

<table>
<tr><th colspan="2">Bestimme mithilfe der Angaben eine Parametergleichung der Ebene E.</th></tr>
<tr><th>Drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen</th><th>Eine Gerade und ein Punkt, der nicht auf der Geraden liegt</th></tr>
<tr><td>



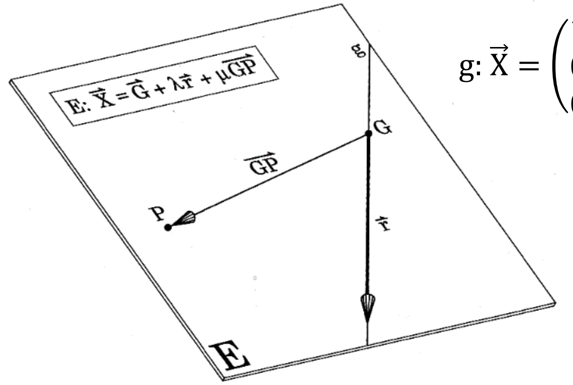
$A(1/1/0), B(0/1/1), C(1/0/1)$

$\overrightarrow{\mathbf{CA}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathbf{CB}} = \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

$\mathbf{E}: \vec{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\mu} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

</td><td>

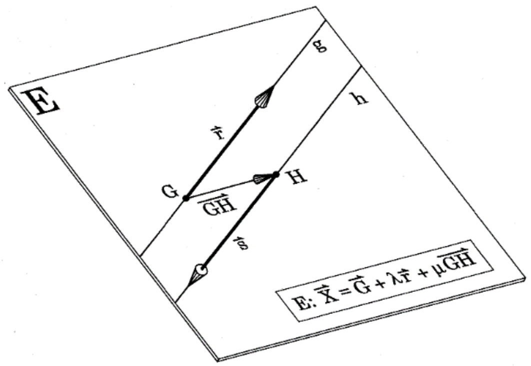


$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, P(1/1/1)$

$\overrightarrow{\mathbf{GP}} = \vec{\mathbf{P}} - \vec{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

$\mathbf{E}: \vec{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\mu}) =$

</td></tr>
<tr><th>Zwei echt parallele Geraden</th><th>Zwei sich schneidende Geraden</th></tr>
<tr><td>



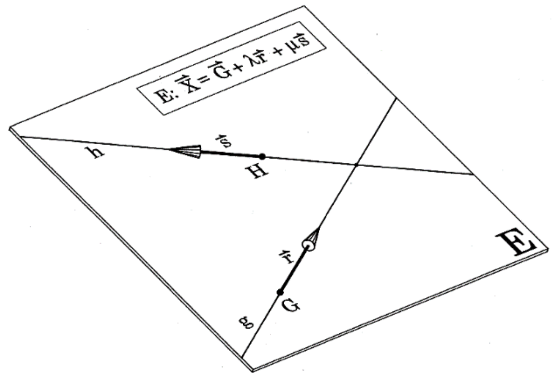
$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Warum sind g und h echt parallel?)

$\overrightarrow{\mathbf{GH}} =$ $\Rightarrow \mathbf{E}: \vec{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\mu}) =$

</td><td>



$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(Warum haben g und h einen Schnittpunkt?)

$\mathbf{E}: \vec{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\mu}) =$

</td></tr>
</table>

f) **Bestimme** eine Parametergleichung der Ebene E_{ABC} durch die Punkte A, B und C, wenn

(1) A (2/1/3), B (-1/0/5) und C (2/-7/3). (2) A (2/1/-3), B 7/-1/5) und C (-3/3/-11) (!)

g) **Gib** eine Parametergleichung der Ebene **an**, die festgelegt ist durch

(1) U (1/0/-1), V (0/0/0) und W (-2/-4/1)

(2) P(1/2/-1), g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(4) g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und k: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

h) Seien g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix}$ und f: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Bestimme die Parametergleichung der Ebene E. die g enthält und parallel zu f ist.

i) Seien A (3/0/2) und g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimme eine Parametergleichung der Halbebene H, die den Punkt A enthält und von der Geraden g begrenzt wird. **Fertige** eine Zeichnung im Koordinatensystem **an** und/oder **stelle** die Situation mit dem 3D-Modell **dar**.

Aufgabe 2: Schöner Wohnen[19]

Sabine ist unzufrieden mit ihrem Zimmer. Der hohe Raum in der Altbauwohnung gibt zwar ein luftiges Wohngefühl, aber die alte Zimmerdecke sieht schon ziemlich runtergekommen aus. Ein Foto in einer „Schöner Wohnen“ Zeitschrift hat ihr gut gefallen: Dort hat jemand die Decke mit einem großen Tuch abgehängt.
Sabines Zimmer ist 3 m breit, 3 m lang und 3,5 m hoch. Sie hat ein Bild im Kopf, wie es in ihrem Zimmer künftig aussehen soll: Sabine möchte ein großes Tuch zwischen die vier Zimmerecken spannen. Es soll dabei aber nicht parallel zum Boden befestigt werden, sondern so, dass der Eindruck einer in beide Richtungen gekippten Zimmerdecke entsteht.
Zur Umsetzung ihres Plans hat Sabine in drei der vier Zimmerecken jeweils Befestigungslöcher in unterschiedlichem Abstand zur Decke gebohrt: 0 cm, 50 cm, 100 cm und 200 cm. Beim Anbringen des Tuchs ist es ihr jedoch nicht gelungen, ihre Vorstellungen umzusetzen: ständig liegt das Tuch in Falten – hat sie etwas falsch gemacht?

a) **Begründe**, warum das Tuch in Falten liegt. **Gib** die Höhe der vier Befestigungspunkte an, damit das Tuch nicht in Falten liegt. [Zur Kontrolle: Verändere die Bohrung von 200 cm auf 150 cm.]

b) **Untersuche**, welche Form das Tuch hat. **Bestimme** Flächeninhalt, Umfang und Innenwinkel.

c) **Bestimme** weitere Befestigungspunkte des Tuches an der Wand.

d) **Gib** einen Term **an**, der einen beliebigen Punkt des Tuches vektoriell beschreibt.

e) **Stelle** die Situation mit dem 3D-Modell **dar**. [Darstellung im Modell: 50 cm pro Einheit.]

---

[19] Modifiziert nach EISEN, V.: Handlungsorientierter Mathematikunterricht. MUED, Appelhülsen 2017, 47.

1.8 Lagebeziehung von Ebene und Gerade

Aufgabe 1: Lagebeziehung von Gerade und Ebene

Sind eine Gerade g: $\vec{X}(r) = \vec{G} + r \cdot \vec{u}$ und eine Ebene E: $\vec{X}(s;t) = \vec{E} + s \cdot v + t \cdot \vec{w}$ mit den reellen Zahlen r, s, t gegeben, dann gibt es drei mögliche Lagebeziehungen:

(1) Die Gerade g und die Ebene E haben einen Schnittpunkt S.
(2) Die Gerade g liegt in der Ebene E.
(3) Die Gerade g ist parallel zur Ebene E.

a) Im Folgenden wird gezeigt, wie man rechnerisch zeigen kann, welcher Fall vorliegt.

Vollziehe die Rechnungen **nach** und **stelle** die Situation mit dem 3D-Modell **dar**.

1. Fall: g und E haben eine Schnittpunkt S:

$$g: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \text{ und } E: \vec{X}(s;t) = \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Gleichsetzen der Terme für den Geraden- und Ebenenvektor liefert ein System von drei Gleichungen mit den Unbekannten r, s und t, die mit dem GTR gelöst werden können:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{array} \underset{\text{GTR}}{\Longleftrightarrow} r = 1, s = 0, t = 1.$$

Setzt man z. B, r = 1 in g ein, dann folgt für den Schnittpunkt: $\vec{S} = \vec{X}(1) = \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$.

Also: S (2/1/3).

2. Fall: h liegt in E

$$h: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix} \text{ und } E: \vec{X}(s;t) = \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Gleichsetzen der Terme für den Geraden- und Ebenenvektor liefert:

$$\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 4 \\ -4 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

$\underset{\text{GTR}}{\Longrightarrow}$ 3x3 LGS hat unendlich viele Lösungen. Also liegt die Gerade h in E.

3. Fall: f verläuft parallel zu E

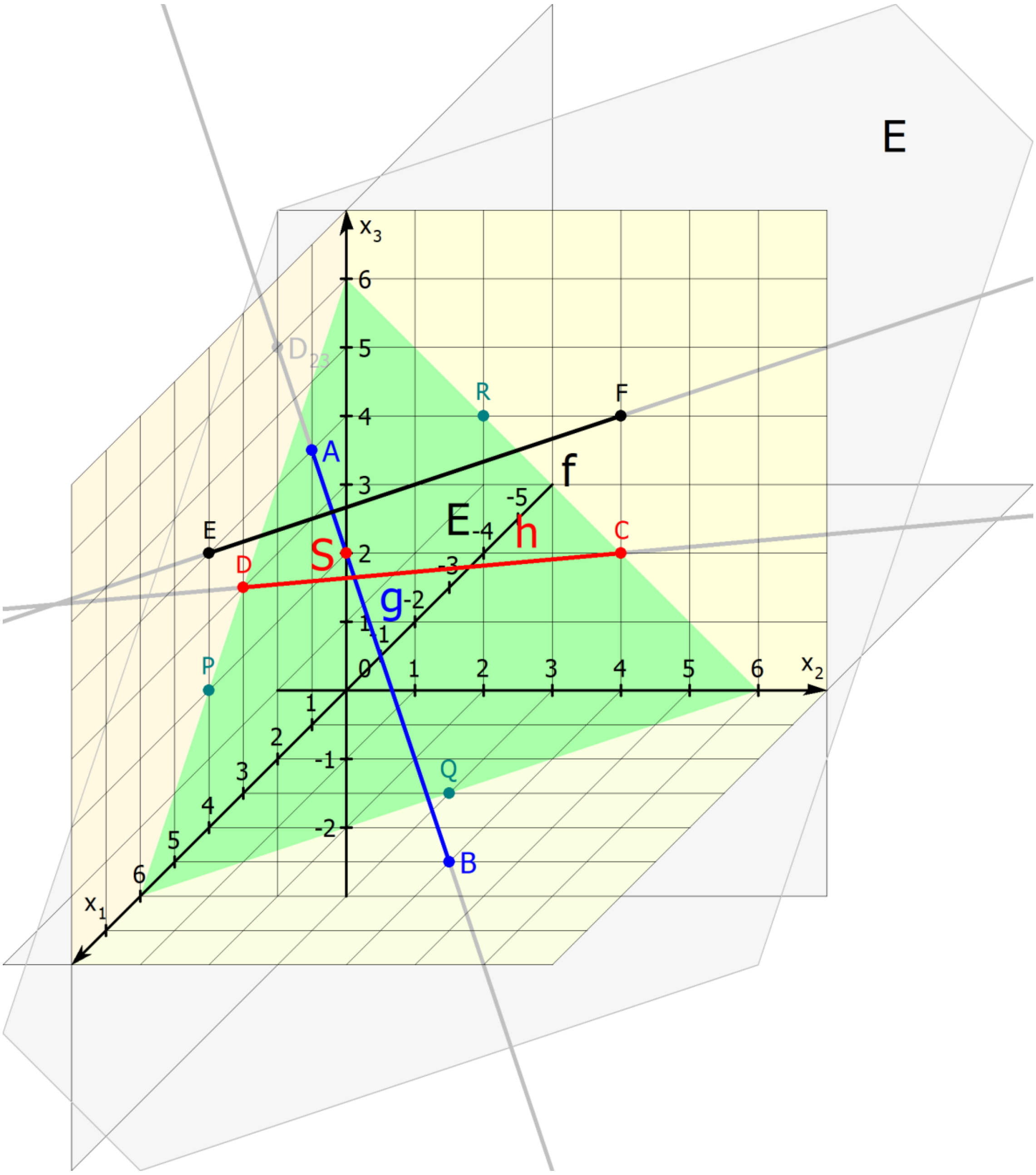
$$f: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ und } E: \vec{X}(s;t) = \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Gleichsetzen der Terme für den Geraden- und Ebenenvektor liefert:

$$\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}$$

$\underset{\text{GTR}}{\Longrightarrow}$ 3x3 LGS hat keine Lösungen. Also liegt die Gerade h parallel zu E.

Die folgende Abbildung stellt die Situation grafisch dar. Dabei können die angegebenen Punkte, die alle in einer der Grundebenen liegen, als Konstruktionspunkte für die Darstellung mit dem 3D-Modell verwendet werden.



Aufgabe 2: Düsenjet und Segelflieger

Ein privater Düsenjet fliegt auf seinem Kurs entlang einer Geraden g durch die Navigationspunkte A (0|2|6) und B (3|-4|0). Ein Segelflugzeug hält den Kurs h durch die beiden Punkte P (4|0|3) und Q (-2|-6|0). Für startende Flugzeuge eines nahegelegenen Flughafens ist die Ebene E durch die Punkte F (0|-5|6) sowie G (2|-1|0) und H (3|-4|3) als Luftraum für den Linienflugverkehr reserviert.

a) **Bestimme**, bei welchem Navigationspunkt sich ggf. die Kurse der beiden Privatflugzeuge schneiden.

b) **Überprüfe**, ob der Privatjet den reservierten Verkehrsluftraum durchquert.

c) **Prüfe nach**, ob das Segelflugzeug den Luftraum durchquert.

d) **Untersuche**, ob sich die Kurse schneiden, bevor die Flugzeuge die Startebene durchqueren.

e) **Stelle** die Situation im 3D-Modell **dar**. Zusatzfrage: Der Punkt H (3|-4|3) liegt nicht in einer Koordinatenebene. Wie ist es trotzdem möglich, die Ebene ohne zu Hilfenahme einer Stange darzustellen?

Aufgabe 3: Noch einmal „Wilder Westen"

Der Regisseur der Western Parodie lässt auf Ihren Rat hin nun den finalen Showdown an einem anderen Ort spielen. Die einzige schattenwerfende Kulisse in der Nähe der Schauspieler ist eine Kirchen-Attrappe, die mit folgenden Punkten beschrieben werden kann:

P_1 (1|0|0), P_2 (1|0|2), P_3 (4|0|2), P_4 (4|0|4), P_5 (5|0|6), P_6 (6|0|4), P_7 (6|0|0).

Die Sonnenstrahlen kommen mit der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Die beiden Darsteller werden auf den Punkten P_8 (3,5|4|0) und P_9 (1|4|0) stehen und ihr Duell austragen. (Alle Einheiten sind in Metern angegeben.)

a) **Skizziere** die Szene und/oder **baue** die Szene im 3D-Modell **nach**.

b) **Prüfe nach**, ob die Köpfe der 1,7 Meter hohen Duellanten im Schatten liegen und **erläutere** Deinen Lösungsweg.

c) **Erläutere**, wie sich die Situation in den nächsten Stunden verändern wird.

Exkurs: Lineare Gleichungssysteme und Gaußverfahren

Gleichungssysteme lassen sich mithilfe des **Gaußverfahrens** lösen. In Anlehnung an die Einführungsaufgabe (**Gleichungspuzzle**) erhält man folgenden Algorithmus:

Variablenschreibweise	Operation	Matrizenschreibweise	Operation
$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &=& -4 \\ \text{II} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 &=& 0 \\ \text{III} & 1{,}5x_1 + 5x_2 - 5x_3 &=& -9 \end{array}$	$\text{I} \cdot (-1) + \text{II}$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 5 & -5 & -9 \end{array}\right)$	$\| \cdot (-1)$
$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &=& -4 \\ \text{II} & -4x_2 + 3x_3 &=& 4 \\ \text{III} & 1{,}5x_1 + 5x_2 - 5x_3 &=& -9 \end{array}$	$\text{I} + \text{III} \cdot (-2)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ 1{,}5 & 5 & -5 & -9 \end{array}\right)$	$\| \cdot (-2)$
$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &=& -4 \\ \text{II} & -4x_2 + 3x_3 &=& 4 \\ \text{III} & -4x_2 + 8x_3 &=& 14 \end{array}$	$\text{II} \cdot (-1) + \text{III}$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 8 & 14 \end{array}\right)$	$\| \cdot (-1)$
$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &=& -4 \\ \text{II} & -4x_2 + 3x_3 &=& 4 \\ \text{III} & 5x_3 &=& 10 \end{array}$	Nach x_3, x_2 und x_1 auflösen	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$	$\| : 3$ $\| : (-4)$ $\| : 5$
$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 = -\frac{4}{3} - 2x_2 + \frac{2}{3}x_3 \\ \text{II} & x_2 = -1 + 0{,}75x_3 \\ \text{III} & x_3 = 2 \end{array}$	Von unten nach oben einsetzen	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -0{,}75 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$	$\Rightarrow \; x_3 = 2$
Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$	Lösungsvektor	x_3 in II einsetzen: $x_2 = -1 + 0{,}75 \cdot 2 = 0{,}5$ x_3 und x_2 in I einsetzen: $x_1 = -\frac{4}{3} - 2 \cdot 0{,}5 + \frac{2}{3} \cdot 2$ $= -1$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Das lineare Gleichungssystem kann als Produkt von **Matrix** und **Vektor** geschrieben werden:
$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1{,}5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$. Die Lösung heißt **Lösungsvektor** der Matrix-Vektor-Gleichung.

Aufgabe 1:

Löse folgende LGS mit dem Gauß-Verfahren. **Überprüfe** mit dem GTR.

a) $\begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 + 3x_3 &=& -17 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &=& -8 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &=& -7 \end{array}$

b) $\begin{array}{rcl} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 &=& 10 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &=& 2 \\ x_1 - 2x_3 &=& 7 \end{array}$

c) $\begin{array}{rcl} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 &=& 4 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 &=& 22 \\ -4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &=& 10 \end{array}$

Lösung: a) $(-5; -1; -1)$ b) $\left(\frac{7}{3}; -\frac{7}{6}; -\frac{23}{7}\right)$ c) $(9{,}5; 10{,}5; 5{,}5)$

Die folgende Tabelle gibt einen guten Überblick über die **Lösbarkeit von LGS**:

Genau eine Lösung		Keine Lösung		Unendlich viele Lösungen	
$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{array}$	$\| \cdot (-3)$	$\begin{array}{ccc\|c} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array}$	$\| \cdot (-3)$	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}$	$\| \cdot (-2)$
$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{array}$	$\| \cdot (-2)$	$\begin{array}{ccc\|c} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -14 & -14 & 2 \end{array}$	$\| \cdot (-2)$	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}$	$\| \cdot (-4)$
$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & -3 & 2 & -10 \end{array}$	$\| \cdot 3$ $\| \cdot (-10)$	$\begin{array}{ccc\|c} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 0 & -14 & -14 & 2 \end{array}$	$\| \cdot (-2)$	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}$	$\| \cdot (-1)$
$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & -17 & 34 \end{array}$	$\| : (-10)$ $\| : (-17)$	$\begin{array}{ccc\|c} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}$	$\Rightarrow 0 = -2$ (f)	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\| : (-5)$
$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -0{,}1 & 2{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$	$\Rightarrow x_3 = -2$	Der letzte Gleichungsblock ist unlösbar. Daher ist auch der erste Gleichungsblock und damit das LGS unlösbar: $\mathbb{L} = \{\ \}$		$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\Rightarrow 0 \cdot x_3 = 0$
x_3 in nach x_2 aufgelöste II einsetzen: $x_2 = 2{,}2 + 0{,}1 \cdot (-2) = 2$ x_3, x_2 in nach x_1 aufgelöste I einsetzen: $x_1 = 7 - 4 \cdot 2 - (-2) = 1$				$x_3 = \mu \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow x_2 = 2 + 2\mu$ $\Rightarrow x_1 = 6 - 2x_2 + 3\mu$ $= 6 - 2(2 + 2\mu) + 3\mu = 2 - \mu$	
Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$				Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \mu \\ 2 + 2\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$	

Aufgabe 2:

Löse folgende LGS mit dem Gauß-Verfahren. **Überprüfe** mit dem GTR.

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 7x_3 &= 12 \\ 5x_1 + 10x_3 &= 5 \\ -x_1 - 2x_2 &= -2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= -5 \\ 6x_1 + 3x_3 &= -9 \end{aligned}$

Lösung: a) $\mathbb{L} = \{(4; -2; -2)\}$ b) $\mathbb{L} = \{\ \}$ c) $\mathbb{L} = \left\{\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}t; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t; t\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$

1.9 Kontrollaufgaben

Kompetenzraster

Ich kann …	Kontrollaufgabe	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
LGS händisch mit dem Gaußverfahren lösen.	1a				
GTR-Lösung eines LGS interpretieren.	1b				
durch Teilungspunkte die Endpunkte einer Strecke berechnen.	1b				
die Länge einer Strecke berechnen.	1b				
die Projektionsgerade einer Gerade bestimmen.	1c				
zwei Geraden ohne GTR auf deren Lagebeziehung untersuchen.	1d				
bei einer Geradenschar eine Punktprobe durchführen.	1e				
eine Geradenschar in einen Ebene umwandeln.	1e				
Gleichungen geradlinig-konstanter Flugbahnen aufstellen.	2a				
Ortspunkte geradlinig-konstanter Flugbahnen berechnen.	2a				
Geschwindigkeiten geradlinig-konstanter Flugbahnen bestimmen.	2b				
gleiche x_3-Höhe zweier geradlinig-konstanter Flugbahnen berechnen.	2c				
den zurückgelegten Weg einer Flugzeuges berechnen.	2c				
geradlinig-konstante Flugbahnen auf Kollisionsgefahr untersuchen.	2d				
den geringsten Abstand zweier Flugzeuge berechnen.	2e				
den Effekt der Cam-Carpets erläutern.	3a				
Punkte in ein 3D-Koordinatensystem einzeichnen.	3b				
einen Projektionspunkt von Cam-Carpets berechnen.	3c				
die Länge eines Vektors zwischen zwei Punkten berechnen.	4a				
den Mittelpunkt einer Strecke berechnen.	4a				
zwei Geraden mit GTR auf deren Lagebeziehung untersuchen.	4b				
den Schnittpunkt zweier Geraden bestimmen.	4c				
eine Geradengleichung aufstellen.	4c				
eine Ebenengleichung aufstellen.	4d				
Strecken mithilfe von Richtungen und deren Längen abtragen.	4e				
eine Punkteprobe durchführen.	4e				
den Schnittpunkt von Gerade und Ebene bestimmen.	4f				
eine Schnittgerade zweier Ebenen berechnen.	4g				

Aufgaben ohne Benutzung von Hilfsmitteln

Aufgabe 1

a) (1) **Berechne** die Lösungsmenge des folgenden LGS.

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}$$

(2) Ein lineares Gleichungssystem besteht aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y. Dieses lineare Gleichungssystem wurde mit dem GTR gelöst. Als Lösungsmenge zeigt der GTR $x = x$ und $y = 2x$ an.

Interpretiere diese Lösung.

b) Die Punkte $R(4|5|6)$ und $S(7|8|9)$ teilen die Strecke $\overline{AB}$ in drei gleiche Teile.

(1) **Bestimme** die Koordinaten der Punkte A und B.

(2) **Berechne** die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

c) **Untersuche** die Geraden g und h (nach scharfem Hinschauen!) jeweils auf ihre gegenseitige Lage.

(1) $g: \vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X}(\mu) = \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

(2) $g: \vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

(3) $g: \vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

d) Gegeben sind die beiden Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Projiziert man g und h senkrecht in die x_1x_2−Ebene, so erhält man die Geraden g´ und h´.

(1) **Gib** die Gleichungen der Geraden g´ und h´ in Parameterform **an**.

(2) **Untersuche** die Lagebeziehung von g´ und h´.

e) Gegeben sind die Schar von Punkten $G_a(a/-2/3)$ und $H_a(a+4/0/5)$ $(a \in \mathbb{R})$ sowie die Geradenschar $g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

(1) **Zeige**, dass alle Punkte der Punktescharen G_a und H_a auf g_a liegen.

(2) **Weise nach**, dass durch die Schar von Geraden g_a eine Ebene festgelegt wird.

Aufgaben unter Nutzung von Hilfsmitteln

Aufgabe 2: Bewegungsaufgabe

Ein Flugleitsystem ortet zum Zeitpunkt t = 0 die Flugzeuge F_1 im Punkt A (−12,5 | −14 | 4) und F_2 im Punkt P (−11,4 | 13 | 5,5) und zwei Minuten später F_1 im Punkt B (−7,5 | −17 | 4,6) sowie F_2 im Punkt Q (−5,8 | 10 | 5,2).

Die Bewegung der Flugzeuge wird in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 km betrachtet. Die Flugzeuge bewegen sich während der Zeit der Beobachtung geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit. Runde alle Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

Physikalischer Hinweis: Betrachtet man das Zeit-Weg-Gesetz der gleichförmig geradlinigen Bewegung im Raum, so lautet dies $\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{s_0}} + \mathbf{t} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ mit $\vec{\mathbf{s_0}}$ als Startvektor, **t** als Zeit (hier in min) und $\vec{\mathbf{v}}$ als Geschwindigkeitsvektor. Dieses Zeit-Weg-Gesetz beschreibt eine Flugroute, die mathematisch als Geradengleichung interpretiert werden kann. Dann entspricht $\vec{\mathbf{s_0}}$ dem Stützvektor, **t** dem Parameter und $\vec{\mathbf{v}}$ dem Richtungsvektor. Also:

	mathematische Bedeutung	**physikalische Bedeutung**
$\vec{\mathbf{s}}$	Ortsvektor aller Geradenpunkte	Ortsvektor aller Punkte der Flugbahn
$\vec{\mathbf{s_0}}$	Stützvektor der Geraden	Ortsvektor zum Startpunkt
t	Parameter der Geraden	Zeitpunkt (hier in Minuten)
$\vec{\mathbf{v}}$	Richtungsvektor der Geraden	Geschwindigkeitsvektor des Flugzeuges

a) **Bestimme** eine Geradengleichung für die Flugroute der Flugzeuge F_1 und F_2 und **gib** die Positionen von F_1 und F_2 vier Minuten vor Beobachtungsbeginn **an**.

b) **Berechne** die Länge der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{PQ}$ und **bestimme** damit die Geschwindigkeiten der Flugzeuge F_1 und F_2 (in km/h).

c) **Ermittle** den Zeitpunkt nach Beobachtungsbeginn, an dem sich die Flugzeuge F_1 und F_2 auf gleicher Höhe befinden und **gib an**, welchen Weg F_2 in dieser Zeit zurückgelegt hat.

d) **Zeige**, dass für den Kurs der Flugzeuge F_1 und F_2 keine Kollisionsgefahr besteht.

e) **Untersuche**, nach welcher Zeit die beiden Flugzeuge den geringsten Abstand haben.

Aufgabe 3: Cam-Carpets

a) **Erläutere** anhand der beiden folgenden Abbildungen Abb. 1 und Abb. 2 die Funktionsweise der sogenannten „Cam-Carpets" (Werbeteppiche).

Neben dem Tor eines Stadions soll ein Werbeteppich erstellt werden, auf dem der Buchstabe P eines Werbeslogans als Parallelenprojektion unter der Blickrichtung $\vec{v}$ der Kamera erscheinen soll. Folgende Angaben gelten für die Modellierung:

- $P_1(0/3/0)$, $P_2(0/3/4)$, $P_3(0/3/7)$, $P_4(0/6/7)$, $P_5(0/6/4)$, dann wieder P_2 ergeben den unter der Kamerarichtung $\vec{v}$ sichtbaren Buchstaben P des Werbeslogans.
- Die Blickrichtung der Kamera lautet $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Hinweise für die Zeichnung: 1 Einheit in y- und z-Richtung entspricht 1 cm, 1 Einheit in x-Richtung beträgt 1 Diagonalen-Kästchen. Beachte insgesamt eine Breite von 10 cm und eine Höhe von 9 cm. Die genauen Größenangaben erkennst Du am folgenden Zahlenkreuz:

positive z-Achse → 8
negative y-Achse → 0 0 10 ← positive y-Achse
1 ← negative z-Achse

b) **Zeichne** die fünf Buchstaben als Schrägbild in ein Koordinatensystem.

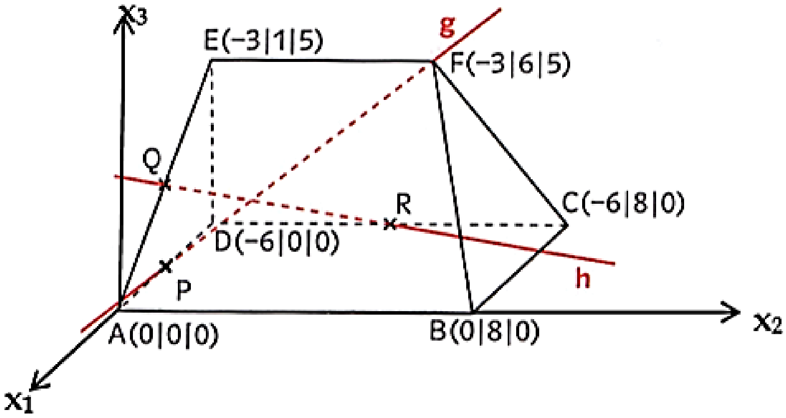
c) **Berechne** den Projektionspunkt P_2' des Punktes P_2 in der x_1-x_2-Ebene und **erläutere** ausführlich Deine Vorgehensweise.

d) **Ermittle** die Projektionspunkte zu P_1, P_3, P_4 und P_5.

e) **Zeichne** alle fünf Projektionspunkte in das Koordinatensystem aus Aufgabenteil b) ein.

Aufgabe 4: Lagebeziehung von Objekten im Raum

Die Punkte A, B, C, D, E und F legen folgenden Körper fest. P, Q und R sind die Mittelpunkte der jeweiligen Kanten. Die Geraden g und h verlaufen durch die Punkte P und F bzw. R und Q.



a) **Ermittle** die Länge des Vektors $\overrightarrow{PE}$.

b) Die Geraden g und h werden durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Untersuche die Lagebeziehung der beiden Geraden g und h.

c) Sei p die Gerade durch die Punkte A und E, q die Gerade durch die Punkte B und F.

(1) **Begründe** ohne Rechnung, dass p und q genau einen Schnittpunkt besitzen.

(2) **Bestimme** Gleichungen für die Geraden p und q und **berechne** ihren Schnittpunkt.

d) **Bestimme** eine Parametergleichung der durch die Punkte B, C und F verlaufenden Ebene E.

[Kontrollergebnis zum Weiterrechnen: E: $\vec{X}(r;s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$]

e) Vom Ursprung aus bewegt man sich 5 Einheiten in Richtung des Vektors $\overrightarrow{AC}$ und $\frac{40}{29}$ Einheiten in positive x_3-Richtung und $\frac{100}{29}$ Einheiten in positive x_2-Richtung.

(1) **Weise nach**, dass der Zielpunkt G $(-3/\frac{216}{29}/\frac{40}{29})$ lautet.

(2) **Zeige**, dass der Zielpunkt G in E liegt.

f) **Berechne** den Schnittpunkt der Ebene E mit der Gerade g_{AE} durch die Punkte A und E.

g) Die Ebene F geht durch die Punkte A, D und E und lautet F: $\vec{X}(t;u) = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ermittle eine Gleichung für die Schnittgerade der beiden nicht parallelen Ebenen E und F.

[Tipp: Durch Gleichsetzen erhältst Du ein LGS mit 3 Gleichung und 4 Unbekannten. Ergänze das 3x4-LGS durch eine vierte Gleichung $0 \cdot r + 0 \cdot s + 0 \cdot t + 0 \cdot u = 0$ zu einem 4x4-LGS. Verwende dann den GTR.]

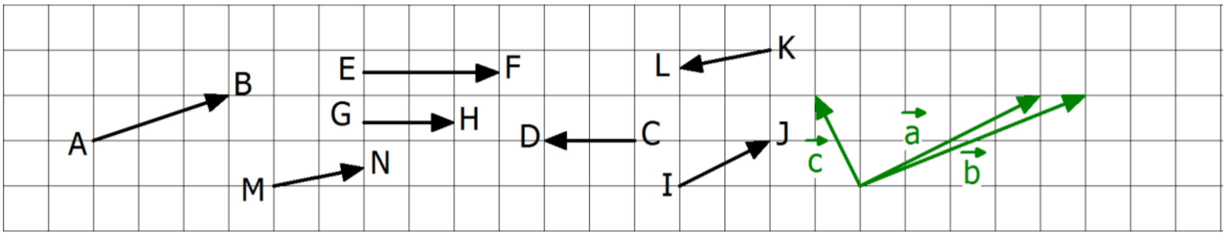
1.10 Lösungen

1.1 Noch fit? – Vektoren und Modellieren mit dem 3D-Modell

1a)

(1) Gleiche Richtung: $\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{LK}$; $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{GH}$; Gleiche Orientierung: $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{GH}$;Gleiche Länge: $\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{LK}$; $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{GH}$

(2)



1b)

$120(-\vec{d} + 0{,}5\vec{e}) + 30\vec{d} - (-90\vec{d}) + (-60\vec{e}) = -120\vec{d} + 60\vec{e} + 30\vec{d} + 90\vec{d} + (-60\vec{e}) = \vec{0}$.
$120(-\vec{d} + 0{,}5\vec{e}) = -120\vec{d} + 60\vec{e}$: Beim Ausmultiplizieren wird das Distributivgesetz angewendet.
$\cdots - (-90\vec{d}) = \cdots + 90\vec{d}$: Subtrahieren beutet Addition des Gegenvektors. Nach dem ersten Gleichheitszeichen dürfen die Summanden wegen des Kommutativgesetzes beliebig vertauscht werden und wegen des Assoziativgesetzes geeignet aneinandergebunden werden.

2a)

$\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$; $\overrightarrow{CE} = -\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$; $\overrightarrow{FD} = -\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$, $\overrightarrow{BH} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

$\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BH} = \vec{u} + \frac{1}{2} \cdot (-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} - \frac{1}{2} \cdot \vec{u} + \frac{1}{2} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$

2b)

(1) $\vec{C} = \vec{B} + \overrightarrow{AD} = \vec{B} + \vec{D} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C(0/4/0)$; $\vec{F} = \vec{B} + \overrightarrow{AE} = \vec{B} + \vec{E} - \vec{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow F(2/4/3)$

$\vec{G} = \vec{C} + \overrightarrow{AE} = \vec{C} + \vec{E} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow G(-2/5/3)$; $\vec{H} = \vec{D} + \overrightarrow{AE} = \vec{D} + \vec{E} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow H(-2/2/3)$

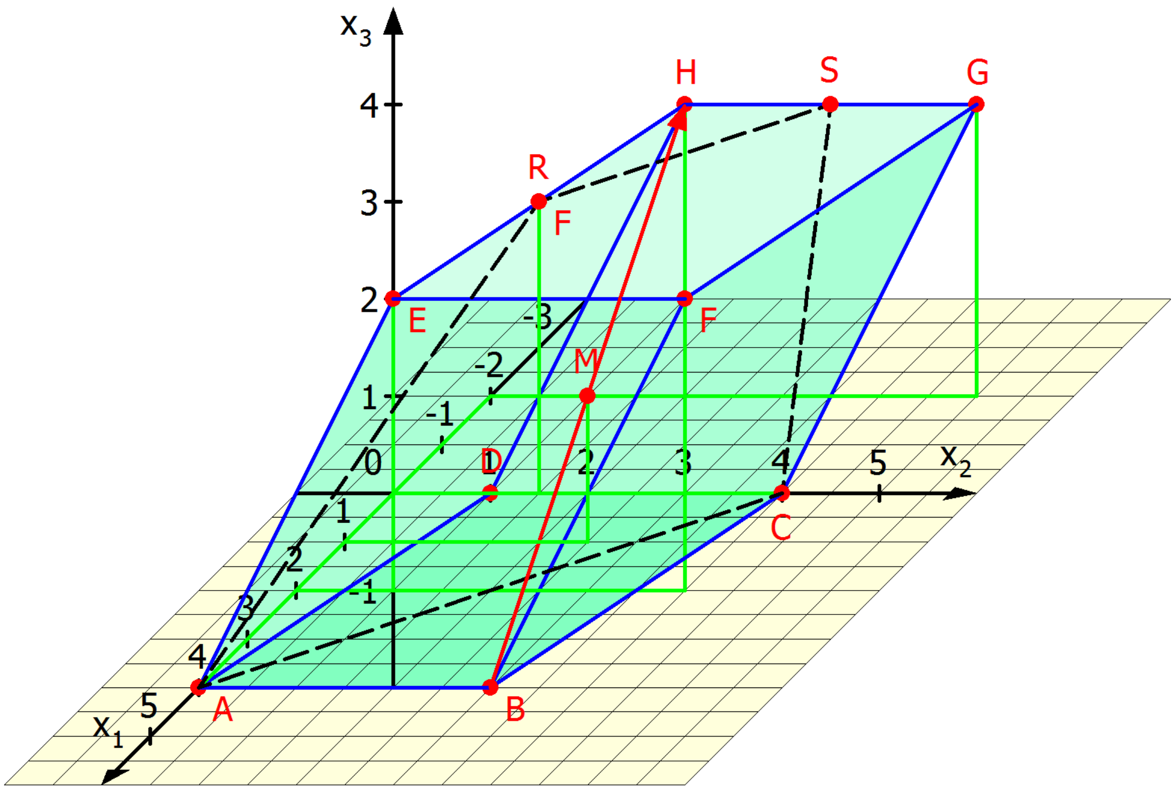
Formel für den Mittelpunkt: $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{B} + \vec{H}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow M(1/2{,}5/1{,}5)$

(2) Zu zeigen: $\overrightarrow{RS}$ hat die gleiche Richtung wie $\overrightarrow{AC}$, denn dann ist ACSR ein Trapez.

$\overrightarrow{RS} = \vec{S} - \vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{G} + \vec{H}) - \frac{1}{2}(\vec{E} + \vec{H}) = \frac{1}{2}(\vec{G} + \vec{H} - \vec{E} - \vec{H}) = \frac{1}{2}(\vec{G} - \vec{E}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da ABCD und EFGH parallele und deckungsgleiche Flächen im Spat sind. Wer konkret rechnet, erhält: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{RS}$ mit den Punkten R(0/1,5/3) und S(-2/3,5/3).

(3)



(4)

Spat	A	B	C	D	E	F	G	H
	(4/0/0)	(4/3/0)	(0/4/0)	(0/1/0)	(2/1/3)	(2/4/3)	(-2/5/3)	(-2/2/3)
Bild	A´	B´	C´	D´	E´	F´	G´	H´
i.	(4/0/0)	(4/3/0)	(0/4/0)	(0/1/0)	(2/1/-3)	(2/4/-3)	(-2/5/-3)	(-2/2/-3)
ii.	(-4/0/0)	(-4/-3/0)	(0/-4/0)	(0/-1/0)	(-2/-1/3)	(-2/-4/3)	(2/-5/3)	(2/-2/3)
iii.	(-4/0/0)	(-4/-3/0)	(0/-4/0)	(0/-1/0)	(-2/-1/-3)	(-2/-4/-3)	(2/-5/-3)	(2/-2/-3)
iv.	(0/0/0)	(0/3/0)	(0/4/0)	(0/1/0)	(0/1/3)	(0/4/3)	(0/5/3)	(0/2/3)
v.	(4/0/0)	(4/0/0)	(0/0/0)	(0/0/0)	(2/0/0)	(2/0/0)	(-2/0/0)	(-2/0/0)

3a)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Ballon landet beim Punkt E (6|-4|0). Punkte, an denen sich der Kurs ändert: B (5|4|3), C (3|0|1), D (0|-2|1)

Entfernung vom Start- zum Landeplatz: $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{52} \approx 7{,}21$ km

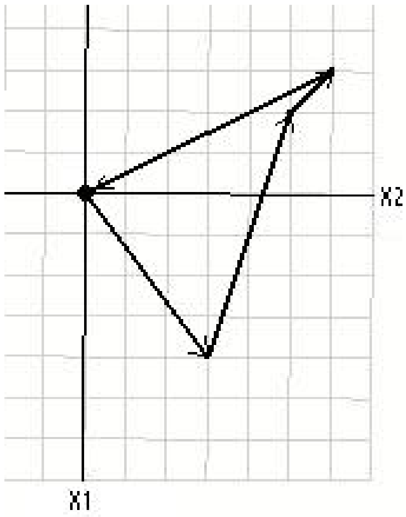
3b)

Gesamte Fluglänge: $L = \sqrt{22} + 2\sqrt{6} + 0{,}5\sqrt{52} + 2\sqrt{10{,}25} \approx 19{,}60$ km

Aufgabe 4: Flugsicherheit

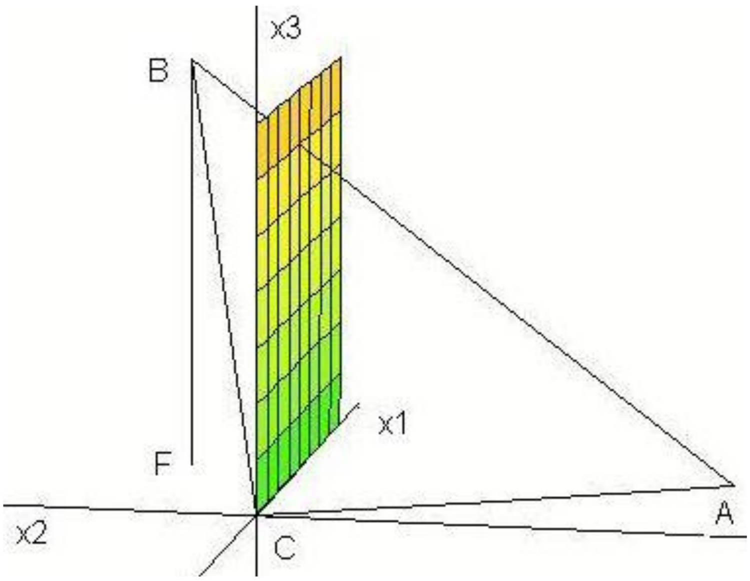
$$\begin{pmatrix}400\\300\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}-300\\100\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-100\\100\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}100\\-200\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Das Flugzeug ist zum Ausgangsflughafen zurückgekehrt und nicht im Bermuda-Dreieck abgestürzt. Also liegt ein versuchter Versicherungsbetrug vor.



Aufgabe 5: Skulptur

Wird das Koordinatensystem wie beschrieben gewählt, hat das Dreieck die Eckpunkte A (2|-4|0), B (2|1|3,75) und C (0|0|0). Der Fußpunkt der Stütze hat die Koordinaten F (2|1|0).



a)

Berechnet werden die Längen der Dreiecksseiten. Die Länge der Stütze $\overline{BF}$ kann unmittelbar als Differenz der x_3–Koordinaten von B und F abgelesen werden. $\overline{BF} = 3{,}75$ m.
Die Seite $\overline{AC}$ liegt beginnend im Ursprung in der x_1x_2–Ebene; die Länge $\overline{AC}$ kann direkt mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden: $\overline{AC} = \sqrt{20} \approx 4{,}4721$ m.

Die Seite $\overline{BC}$ ragt vom Ursprung aus in den 1. Oktanten; die Länge $\overline{BC}$ entspricht der Länge der Raumdiagonalen im Koordinatenquader des Punktes B. Zur Berechnung muss der Satz des Pythagoras zweifach angewandt werden, oder man verwendet die Formel für die Länge eines Vektors:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CF}^{\,2} + 3{,}75^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3{,}75^2} \approx 4.37 \text{ m}$$

Die Seite $\overline{AB}$ schneidet die x_1x_3–Ebene; die Länge $\overline{AB}$ entspricht dem Abstand d(A,B) der Punkte A und B und damit der Raumdiagonale im Quader mit A und B als gegenüberliegenden Ecken. Dessen Seitenlängen sind die Differenzen der jeweiligen Koordinaten von A und B. Zweimalige Anwendung des Satzes des Pythagoras ergibt (oder Anwenden der Formel für die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$):

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-2)^2 + (1-(-4))^2 + (3{,}75-0)^2} = \sqrt{0^2 + 5^2 + 3{,}75^2} = \sqrt{39{,}0625} = 6{,}25 \text{ m}$$

b)

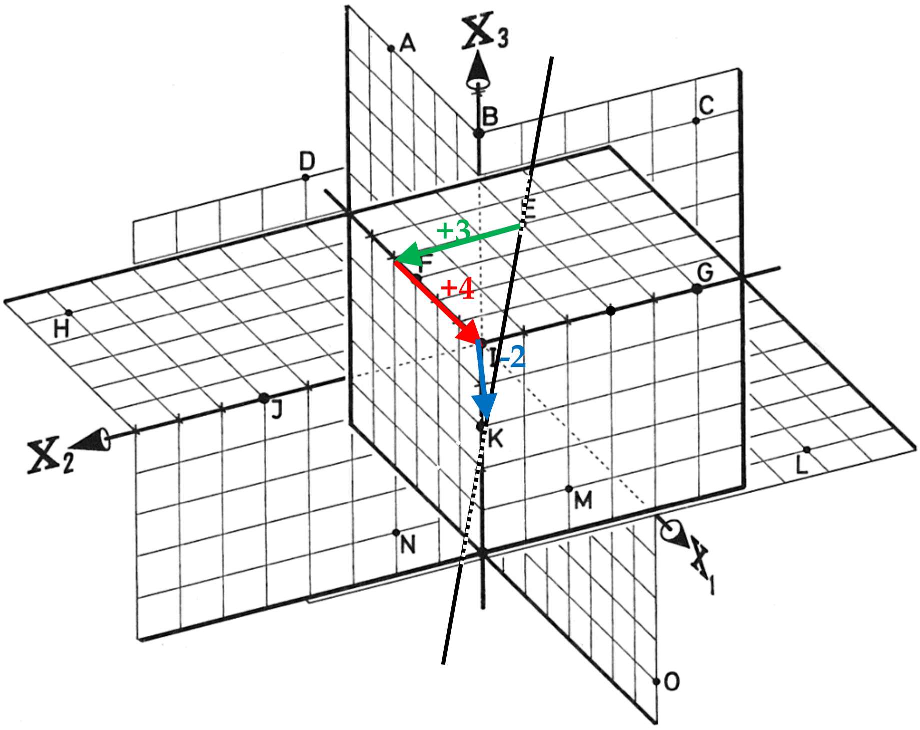
Geprüft wird, ob das Dreieck bei C einen rechten Winkel hat. Liegt bei C ein rechter Winkel vor, muss nach Satz des Pythagoras gelten: $\overline{AC}^{\,2} + \overline{BC}^{\,2} = \overline{AB}^{\,2}$

Mit den Ergebnissen aus a) gilt: 20 + 19,0625 = 39,0625, q. e. d.

Die Skulptur trägt ihren Titel also insofern zu Recht, als dass das Dreieck rechtwinkelig ist.

1.2 Darstellung von Geraden im Raum

2a) bis 2e)



A (-4/0/5)
B (0/0/5)
C (0/ -5/ 4)
D (0/ 4/5)
E (-4/-3/0)
F (-3/0/0)
G (0/-5/0)
H (-5/ 7/0)
I (0/0/0)
J (0/5/0)
K (0/0/-2)
L (7/-4/0)
M (0/-2/-4)
N (0/2/-4)
O (8/0/-4)

Ablesung:

$$g_{EK}: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$g_{KO}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$g_{KN}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Rechnung:

$$g_{EK}: \vec{X} = \vec{E} + \lambda \cdot \overrightarrow{EK} = \vec{E} + \lambda \cdot (\vec{K} - \vec{E}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$g_{KO}: \vec{X} = \vec{K} + \mu \cdot \overrightarrow{KO} = \vec{K} + \mu \cdot (\vec{O} - \vec{K}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$g_{KN}: \vec{X} = \vec{K} + \nu \cdot \overrightarrow{KN} = \vec{K} + \nu \cdot (\vec{N} - \vec{K}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2-3\lambda \\ 1+3\lambda \\ 2-6\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3} \wedge \begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

Die Gerade g schneidet die x_1x_2-Ebene in S(-3/2/0).

2f) (1)

(i) $\vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (ii) $\vec{X}(\lambda) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (iii) $\vec{X}(\lambda) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (iv) $\vec{X}(\lambda) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

(2)

λ_i	1	0	-1,5	100
P_i	(6/-2/0)	(2/0/-1)	(-4/3/-2,5)	(402/-200/99)

(3)

(i) $\vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ii) $\vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (iii) $\vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

(4)

(i) a ist die x_1-Achse.
(ii) b ist eine Parallele zur x_3-Achse durch den Punkt (0/1/0).
(iii) c verläuft durch den Ursprung und den Punkt (1/1/1) („Würfeldiagonale").
(iv) d liegt in der x_1x_3-Ebene und ist dort die erste Winkelhalbierende.

f) (1) A und B liegen auf g, C und E auf h.

(2) Alle Punkte liegen auf der Geraden durch die Punkte P und Q, keine liegt auf der Strecke $\overline{PQ}$:
P (λ = 0), Q (λ = 10), A (λ = -1), B (λ = 2), D (λ = 12), E (λ = 9)

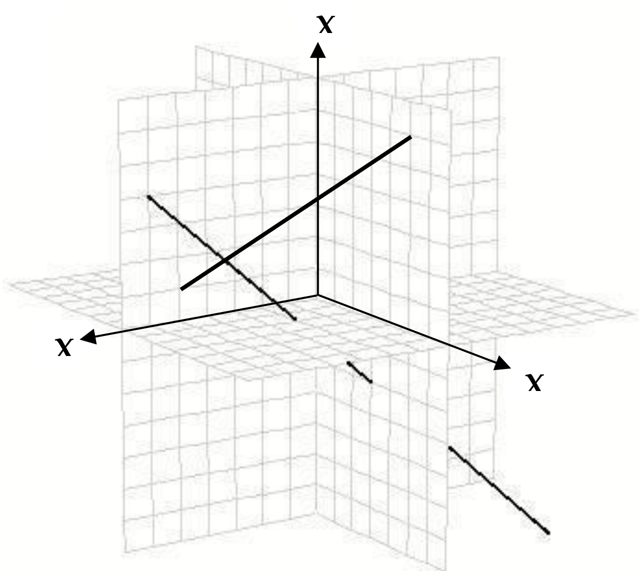
Aufgabe 3

b) $\vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{X}(\lambda = 0{,}5) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wähle h: $\vec{X}(\mu) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, g und h schneiden sich in (4/1/2).

d) Der Schnittpunkt lautet S (4/2/5) (ε = ζ = 1).

e) Die Gerade h von oben tut es. Man erhält die Spurpunkte S_1(0/5/6) (μ = −4), S_2(5/0/1) (μ = 1) und S_3(6/-1/0) (μ = 2). Man wählt einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten und ebenso einen Richtungsvektor mit ganzzahligen Koordinaten, die jeweils ein Teiler der entsprechenden Aufpunkt-Koordinaten sind.



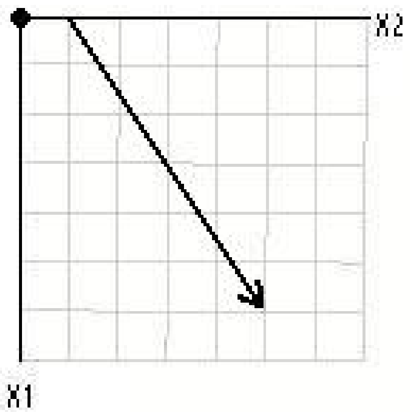
1.4 Bewegungsaufgaben

Aufgabe 1: Darstellung von Flugbahnen mit dem 3D-Modell

a) (1) $g: \vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 600 - 0 \\ 500 - 100 \\ 0 - 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \\ -300 \end{pmatrix}$

(2) $\vec{X}(0{,}25) = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} + 0{,}25 \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \\ -300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 225 \end{pmatrix}$

(4)



b) (1) $g: \vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 400 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 600 - 200 \\ 300 - 0 \\ 200 - 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 400 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ -200 \end{pmatrix}$

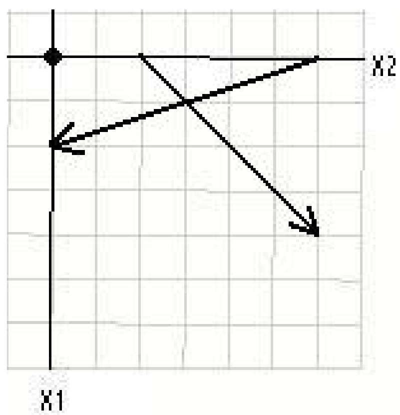
$h: \vec{X}(\mu) = \begin{pmatrix} 600 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 200 - 600 \\ 600 - 300 \\ 0 - 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -400 \\ 300 \\ -200 \end{pmatrix}$

(2) Beide Flugabschnitte sind gleich lang, da die Richtungsvektoren betragsmäßig gleiche Koordinaten haben. Genauer gilt für die Länge $L = \sqrt{400^2 + 300^2 + (-200)^2} \approx 538{,}32$

(3) Da beide Flugstrecken gleich lang sind, erreicht das Segelflugzeug $\frac{7}{8}$ der Gesamtstrecke bei $\mu = 0{,}75$, da $\frac{1+0{,}75}{1+1} = \frac{7}{8}$ (Sieben Achtel des Gesamtstrecke wird nach drei Viertel des zweiten Abschnitts erreicht.): $\vec{X}(0{,}75) = \begin{pmatrix} 600 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix} + 0.75 \cdot \begin{pmatrix} -400 \\ 300 \\ -200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 525 \\ 50 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Zwei fliegende Modellhubschrauber

b)



c)

$$g: \vec{X}(\lambda) = \vec{A} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-3 \\ 0{,}5-2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{X}(\mu) = \vec{C} + \mu \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

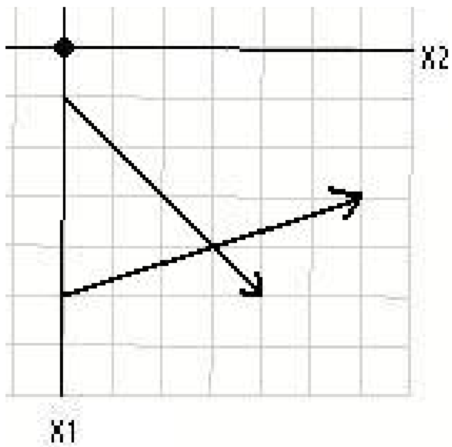
Da beide Hubschrauber unterschiedliche Richtungen haben, können sich ihre Flugbahnen entweder schneiden oder windschief sein. Im zweiten Fall besteht (bei Annahme, dass es sich um Punktmassen handelt) keine Kollisionsgefahr. Im ersten Fall hängt die Kollisionsgefahr davon ab, ob beide Flugzeuge den Schnittpunkt zeitgleich erreichen.

Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen liefert: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dies ergibt ein Gleichungssystem von drei Gleichungen mit zwei Unbekannten, dass in Gauß-Form dargestellt werden kann: $\left.\begin{matrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -2 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ -2 \\ -0{,}5 \end{matrix}$. Das LGS hat die Lösungen $\lambda = \mu = 0{,}5$. Der Schnittpunkt ist S (0,5/1,5/1,5). Im Modell ist dies (1/3/3).

Wenn Hubschrauber g den Vektor $\overrightarrow{AS} = 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$ in der gleichen Zeit zurücklegt wie Hubschrauber h den Vektor $\overrightarrow{CS} = 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} . = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$, würden beide Hubschrauber gleichzeitig bei S (0,5/1,5/1,5) ankommen, da sie zeitglich bei A bzw. C starten. Es gilt: $|\overrightarrow{AS}| = \sqrt{4{,}25} \approx 2{,}06$ und $|\overrightarrow{CS}| = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87$. Dies bedeutet, dass beide Hubschrauber den gemeinsamen Schnittpunkt genau dann gleichzeitig erreichen, wenn Hubschrauber g eine Strecke von 2,06 m in der gleichen Zeit t zurücklegt wie Hubschrauber h die Strecke 0,87 m. Genau dann gilt für die Geschwindigkeiten der beiden Hubschrauber $v_g = \frac{\sqrt{4{,}25}}{t} \Leftrightarrow t = \frac{v_g}{\sqrt{4{,}25}}$ und $v_h = \frac{\sqrt{0{,}75}}{t} \Leftrightarrow t = \frac{v_h}{\sqrt{0{,}75}}$. Durch Gleichsetzen erhält man $\frac{v_g}{\sqrt{4{,}25}} = \frac{v_h}{\sqrt{0{,}75}} \Leftrightarrow v_g = \frac{\sqrt{4{,}25}}{\sqrt{0{,}75}} v_h \approx 2{,}38 v_h$. Hubschrauber g muss also 2,38-mal so schnell sein wie Hubschrauber h, damit es zur Kollision kommt.

Aufgabe 3: Zwei fliegende Modellflugzeuge

b)



c)

$$g: \vec{X}(\lambda) = \overrightarrow{P_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 50-10 \\ 40-0 \\ -20-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ -40 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{X}(\mu) = \overrightarrow{P_3} + \mu \cdot \overrightarrow{P_3P_4} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 30-50 \\ 60-0 \\ 0-(-20) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Schnittpunktberechnung: $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix}$ liefert:

$$\left.\begin{array}{cc|c} 40 & 20 & 40 \\ 40 & -60 & 0 \\ -40 & -20 & -40 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \mu = 0{,}5 \text{ und } \lambda = 0{,}75.$$

Der Schnittpunkt der beiden Flugbahnen liegt bei S (40/30/-10). Ferner gilt:

$$\left[\overrightarrow{P_1S}\right] = \left|0{,}75 \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ -40 \end{pmatrix}\right| = 0{,}75 \cdot \sqrt{3 \cdot 40^2} = 30\sqrt{3} \approx 51{,}96 \text{ m}.$$

$$\left[\overrightarrow{P_3S}\right] = \left|0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix}\right| = 0{,}5 \cdot \sqrt{2 \cdot 20^2 + 60^2} = 10\sqrt{11} \approx 33{,}17 \text{ m}.$$

Beide Modellflugzeuge kollidieren genau dann, wenn Flugzeug g $\frac{30\sqrt{3}}{10\sqrt{11}} \approx 1{,}57$-mal so schnell ist wie Modellflugzeug h und sie zeitgleich bei P_1 bzw. P_3 starten.

Aufgabe 4: Flugschule

a) Richtung des ersten Flugzeuges: $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 400 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1000 \\ -600 \\ 1350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1000 \\ 1000 \\ -1250 \end{pmatrix}$. Für $\overrightarrow{AB}$ benötigt er 13 Sekunden. Dann legt das Flugzeug in einer Sekunde den anteiligen Richtungsvektor $\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -1000 \\ 1000 \\ -1250 \end{pmatrix}$ zurück. Man erhält insgesamt die Geradengleichung:

$$F_{AB}: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 1000 \\ -600 \\ 1350 \end{pmatrix} + \frac{s}{13} \cdot \begin{pmatrix} -1000 \\ 1000 \\ -1250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 - \frac{1000}{13}s \\ -600 + \frac{1000}{13}s \\ 1350 - \frac{1250}{13}s \end{pmatrix} \quad \text{für } s \geq 0 \text{ (s in Sekunden)}$$

Richtung des zweiten Flugzeuges: $\overrightarrow{CD} = \vec{D} - \vec{C} = \begin{pmatrix} -600 \\ -200 \\ 400 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1200 \\ -800 \\ 400 \end{pmatrix}$. Für $\overrightarrow{CD}$ benötigt er 27 Sekunden. Dann legt das Flugzeug in einer Sekunde den anteiligen Richtungsvektor $\frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -1200 \\ -800 \\ 400 \end{pmatrix}$ zurück. Man erhält insgesamt die Geradengleichung:

$$F_{CD}: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{27} \cdot \begin{pmatrix} -1200 \\ -800 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 - \frac{1200}{27}t \\ 600 - \frac{800}{27}t \\ \frac{400}{27}t \end{pmatrix} \quad \text{für } t \geq 0 \text{ (t in Sekunden)}$$

Setzt man die beiden Geraden gleich, erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1000-\frac{1000}{13}s \\ -600+\frac{1000}{13}s \\ 1350-\frac{1250}{13}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600-\frac{1200}{27}t \\ 600-\frac{800}{27}t \\ \frac{400}{27}t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1000}{13}s+\frac{1200}{27}t \\ \frac{1000}{13}s+\frac{800}{27}t \\ -\frac{1250}{13}s-\frac{400}{27}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -400 \\ 1200 \\ -1350 \end{pmatrix}$$

Durch die ersten beiden Koordinatengleichungen erhält man die beiden Lösungen s = 11,44 und t = 10,8. Diese beiden Lösungen erfüllen die dritte Gleichung nicht (-1260 ≠ -1350). Die beiden Flugbahnen schneiden sich als nicht. Daher besteht keine Kollisionsgefahr. [Einfacher hätte man auch s = t wählen können und zeigen können, dass es kein eindeutige t gibt, das alle drei Gleichungen erfüllt.]

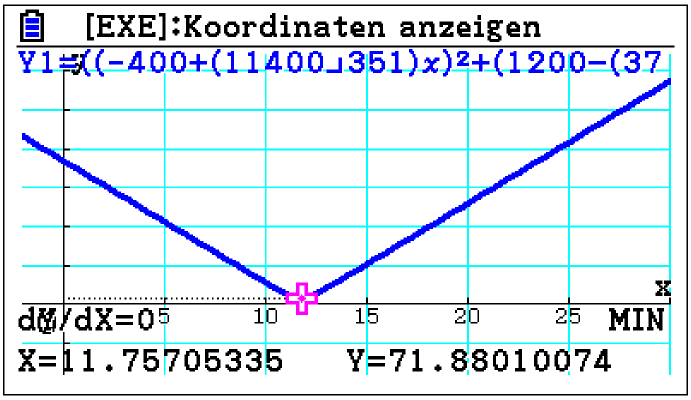
b) Für den zeitabhängigen Abstandsvektor beider Flugbahnen gilt (s = t):

$$\vec{d} = \vec{X}_{CD}(s) - \vec{X}_{AB}(s) = \begin{pmatrix} 600-\frac{1200}{27}s \\ 600-\frac{800}{27}s \\ \frac{400}{27}s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1000-\frac{1000}{13}s \\ -600+\frac{1000}{13}s \\ 1350-\frac{1250}{13}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -400+\frac{11400}{351}s \\ 1200-\frac{37400}{351}s \\ -1350+\frac{38950}{351}s \end{pmatrix}$$

Für die Länge des Abstandsvektors gilt:

$$|\vec{d}| = \sqrt{\left(-400+\frac{11400}{351}s\right)^2 + \left(1200-\frac{37400}{351}s\right)^2 + \left(-1350+\frac{38950}{351}s\right)^2}$$

Mithilfe des GTR erhält man folgende globale Minimumstelle:



Nach ca. 12 Sekunden ist der Abstand mit ca. 72 m am geringsten. Es stehen also weitere Flugstunden an.

c) Man berechne zunächst den Punkt des ersten Flugzeuges, an dem der Abstand zum zweiten Flugzeug am geringsten ist. Er hat den Ortsvektor:

$\vec{X}(11{,}76) = \begin{pmatrix} 1000 \\ -600 \\ 1350 \end{pmatrix} + \frac{11{,}76}{13} \cdot \begin{pmatrix} -1000 \\ 1000 \\ -1250 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 95{,}38 \\ 304{,}62 \\ 219{,}23 \end{pmatrix}$. Der Verbindungsvektor von Flughafen zum Ortspunkt des ersten Flugzeuges nach 11,76 Sekunden lautet: $\vec{X}(11{,}76) - \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -504{,}62 \\ -295{,}38 \\ 219{,}23 \end{pmatrix}$.

Seine Länge beträgt $\sqrt{(-504{,}62)^2 + (-295{,}38)^2 + 219{,}23^2} \approx 624{,}46 < 800$
Die Fluglehrer konnte den „Beinahezusammenstoß“ sehen.

d) Geschwindigkeit von Flugzeug 1: $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{13} = \frac{\left|\begin{pmatrix}-1000\\1000\\-1250\end{pmatrix}\right|}{13} \approx \frac{1887{,}46}{13} \approx 145{,}19$ m pro Sekunde = 522,68 km pro Stunde. Geschwindigkeit von Flugzeug 2: $\frac{|\overrightarrow{CD}|}{27} = \frac{\left|\begin{pmatrix}-1200\\-800\\400\end{pmatrix}\right|}{27} \approx \frac{1496{,}66}{27} \approx 55{,}43$ m pro Sekunde = 199, 56 km pro Stunde.

Die Steigung des zweiten Flugzeuges ist ca. 15,5 Grad. Beweis: Der senkrechte Projektionspunkt D´ von D in die x_1-x_2-Ebene ist $D´(-600/-200/0)$. Er bildet mit den beiden Punkten $C(600/600/0)$ und D ein rechtwinkliges Dreieck mit der längsten Seite von C nach D. Daher gilt:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\overline{DD´}}{\overline{CD´}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{400}{\sqrt{1200^2+800^2}}\right) \approx 15{,}5$$

e) Zur Darstellung im Modell: 100 m pro Einheit Die Flugbahn des Flugzeuges 1 lässt sich mit Punkt $P_1(4|0|6)$ und Punkt P_2 $(0|4|1)$ darstellen. Die Flugbahn des Flugzeuges 2 lässt sich mit Punkt $P_3(6|6|0)$ und Punkt P_4 $(0|2|2)$ darstellen.

Aufgabe 5: Kommunikationsfehler

a) Gesucht sind zunächst die Geradengleichung der beiden Flugzeuge.

Berechnung der **Flugbahn des ersten Flugzeuges:**

(1) Die Länge des Vektors $\vec{v}$ beträgt $|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+5^2+2^2} = \sqrt{30} \approx 5{,}75$. Der Vektor $\overrightarrow{v_0} = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$ zeigt daher in Richtung von $\vec{v}$ und hat die Länge 1 km.

(2) In 1,37 legt das Flugzeug mit einer Geschwindigkeit von 120 km pro Stunde (= 2 km pro Minute) 2,74 km zurück. Für P_2 der Kursänderung gilt daher:
$\overrightarrow{P_2} = \overrightarrow{P_1} + 2{,}74 \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}5{,}5\\-2{,}5\\1\end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}$.

(3) Ab dem Punkt P_2 fliegt es in Richtung P_3. Für die neue Richtung des ersten Flugzeuges gilt: $\overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{P_3} - \overrightarrow{P_2} = \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\4\\1\end{pmatrix}$. Ferner gilt $|\overrightarrow{P_2P_3}| = \sqrt{53} \approx 7{,}3$. Bei Geschwindigkeit von 120 km pro Stunde (2 km pro Minute) legt das Flugzeug pro Minute die Verschiebung $\frac{2}{\sqrt{53}} \cdot \begin{pmatrix}-6\\4\\1\end{pmatrix}$ zurück. Daher gilt für die erste Flugbahn (Puh!!):

$$F_1: \vec{X}(s) = \begin{cases} \begin{pmatrix}5{,}5\\-2{,}5\\1\end{pmatrix} + s \cdot \frac{2}{\sqrt{30}} \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} & \text{für } 0 \le s \le 1{,}37 \text{ (s in Minuten)} \\ \begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix} + (s-1{,}37) \cdot \frac{2}{\sqrt{53}} \cdot \begin{pmatrix}-6\\4\\1\end{pmatrix} & \text{für } s \ge 1{,}37 \text{ (s in Minuten)} \end{cases}$$

Für die **zweite Flugbahn** gilt:

(4) Richtung des zweiten Flugzeuges: $\overrightarrow{P_4P_5} = \overrightarrow{P_5} - \overrightarrow{P_4} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-6\\4{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\\-2{,}5\end{pmatrix}$.

(5) Für $\overrightarrow{P_4P_5}$ benötigt er 4,36 Minuten. Dann legt das Flugzeug in einer Minute den Richtungsvektor $\frac{1}{4{,}36} \cdot \begin{pmatrix}5\\10\\-2{,}5\end{pmatrix}$ zurück.

Dann gilt für die **zweite Flugbahn**: $F_2: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + \frac{t}{4{,}36} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$ für $t \geq 0$ (t in Minuten)

Nun erfolgt eine **Lageuntersuchung von F_1** ($t \geq 1{,}37$, da es vorher offenbar zu keiner Kollision gekommen ist) **und F_2** (s und t in Minuten)

$$F_1: \vec{X}(s) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (s - 1{,}37) \cdot \frac{2}{\sqrt{53}} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 8{,}26 \\ -1{,}51 \\ 1{,}62 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1{,}64 \\ 1{,}10 \\ 0{,}27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}26 - 1{,}64s \\ -1{,}51 + 1{,}10s \\ 1{,}62 + 0{,}27s \end{pmatrix} \quad s \geq 1{,}37$$

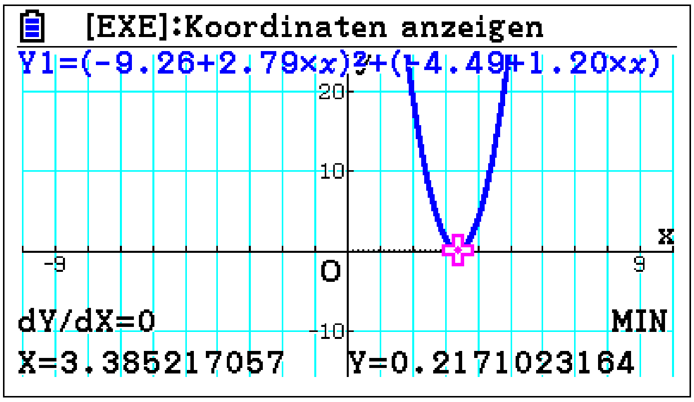
$$F_2: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + \frac{t}{4{,}36} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 + 1{,}15t \\ -6 + 2{,}30t \\ 4{,}5 - 0{,}58t \end{pmatrix} \quad t \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 8{,}26 - 1{,}64s \\ -1{,}51 + 1{,}10s \\ 1{,}62 + 0{,}27s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 1{,}15t \\ -6 + 2{,}30t \\ 4{,}5 - 0{,}58t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1{,}64s - 1{,}15t \\ 1{,}10s - 2{,}30t \\ 0{,}27s + 0{,}58t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9{,}26 \\ -4{,}49 \\ 2{,}88 \end{pmatrix}$$

Die ersten beiden Gleichungen liefern $s = 3{,}20$ und $t = 3{,}48$. Setzt man diese Werte in die dritte Gleichung ein, ergibt sich (bis auf Rundungsungenauigkeiten) eine wahre Aussage. Die beiden Flugbahnen schneiden sich also. Allerdings erreichen beide Flugbahnen den Schnittpunkt zu unterschiedlichen Zeiten. F_2 erreicht den Schnittpunkt 0,28 Minuten (ca. 17 Sekunden) später. Also kollidieren die Flieger nicht. [Alternativ und einfacher hätte man direkt s = t wählen können und zeigen können, dass es kein eindeutiges t gibt, das alle drei Koordinatengleichungen erfüllt.]

b) Betrachte den Differenzvektor $\vec{d} = \vec{X}_{F_2}(s) - \vec{X}_{F_1}(s) = \begin{pmatrix} -1 + 1{,}15s \\ -6 + 2{,}30s \\ 4{,}5 - 0{,}58s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8{,}26 - 1{,}64s \\ -1{,}51 + 1{,}10s \\ 1{,}62 + 0{,}27s \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -9{,}26 + 2{,}79s \\ -4{,}49 + 1{,}20s \\ 2{,}88 - 0{,}85s \end{pmatrix}$. Es gilt $|\vec{d}| = \sqrt{(-9{,}26 + 2{,}79s)^2 + (-4{,}49 + 1{,}20s)^2 + (2{,}88 - 0{,}85s)^2}$. Mithilfe des GTR lässt sich das globale Minimum von $|\vec{d}|$ berechnen. Dazu betrachten wir das Abstandsquadrat $D = |\vec{d}|^2$. Nach 3,39 Minuten beträgt das minimale Abstandsquadrat ca. 0,22 km². Daher beträgt der minimale Abstand ca. $\sqrt{0{,}22 \text{ km}^2} \approx 0{,}47$ km. Also können sich die Flieger sehen.



c) 1 km pro Einheit. Die ursprüngliche Flugbahn von F_1 lässt sich mit P_0 (5 | -5 | 0) und Punkt P_2(6 | 0 | 2) darstellen. Nach der Richtungsänderung fliegt das Flugzeug weiter zum Punkt P_3(0 | 4 | 3). Die Flugbahn von F_2 lässt sich mit Punkt P_6(2 | 0 | 3) und Punkt P_5(4 | 4 | 2) darstellen.

Aufgabe 6: Flugsicherheit

a) Die Boeing nimmt von 11:00:00 bis 11:00:40 an Höhe zu und fliegt in die Richtung $\vec{u_1}$ mit:

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 0-(-2) \\ 9{,}3-8{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 2-0 \\ 10{,}3-9{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Anschließend fliegt es in Reisehöhe in Richtung $\overrightarrow{u_2}$ mit:

$$\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 6-5 \\ 6-2 \\ 10{,}3-10{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das zweite Flugzeug fliegt im Steigflug in Richtung $\vec{v}$ mit:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-2 \\ 8{,}3-7{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-1 \\ 9{,}3-8{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ -1-0 \\ 10{,}3-9{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Angenommen beide Flugzeuge fliegen zwischen zwei Zeitpunkten mit konstanten Geschwindigkeiten, dann erhält man folgende Geradengleichungen:

$$F_{\text{Boeing}}: \vec{X}(s) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8{,}3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für s in 20} - \text{Sekundenschritte: } 0 \le s \le 2 \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 10{,}3 \end{pmatrix} + (s-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für s in 20} - \text{Sekundenschritte: } 2 \le s \le 3 \end{cases}$$

$$F_{\text{Douglas}}: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7{,}3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für t in 20} - \text{Sekundenschritte: } 0 \le t \le 3$$

Vermutung (1): Eine Vermutung ist, dass die beiden Flugbahnen sich kreuzen. Hier wird untersucht, ob die beiden Flugbahnen einen Schnittpunkt besitzen. Im Falle, dass beide Bahnen sich schneiden, ist ein Teil seiner Sorge berechtigt, da eine Kollision theoretisch möglich wäre.

Vermutung (2): Wenn die Bahnen windschief sind, muss weiter geprüft werden, zu welchem Zeitpunkt die beiden Flugbahnen den geringsten Abstand haben und wo sich die Flugzeuge befinden. Mit dieser Information kann dann überprüft werden, wie groß der minimale Horizontal- und Vertikalabstand ist.

Zu (1): $\vec{X}(s) = \vec{X}(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8{,}3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7{,}3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2s-2t \\ 2s+t \\ s-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Durch Addition der zweiten und dritten Gleichung (oder mit dem GTR) erhält man s = 1 und damit t = 2. Setzt man s und t in die erste Gleichung ein, erhält man einen Widerspruch. Weiter ist zu prüfen, ob auch der zweite Teil der Flugbahn des Boeings einen Schnittpunkt mit der Douglas besitzt (man setzt r = s – 2):

$$\vec{X}(s) = \vec{X}(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 10{,}3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7{,}3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} r-2t \\ 4r+t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die letzte Gleichung liefert t = 3 und mit Gleichung 1 folgt r = 1. Setzt man r und t in Gleichung 2 ein, ergibt sich ein Widerspruch, weshalb auch der zweite Teil der Boeing-Flugbahn und die Bahn der Douglas windschief sind.

Fazit: Herr Falk kann nun ein wenig beruhigter sein.

Zu (2): Nun ist noch zu prüfen, nach welchen Zeitpunkt der Abstand beider Flugbahnen am geringsten ist. Betrachte $0 \leq s \leq 2$: $\vec{d} = \vec{X}_{\text{Douglas}}(s) - \vec{X}_{\text{Boeing}}(s) = \begin{pmatrix} 2s-2s+1 \\ 2s+s-4 \\ s-s+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3s-4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nun folgt für die Länge des Abstandsverktors: $|\vec{d}| = \sqrt{1^2 + (3s-4)^2 + 1^2} = \sqrt{9s^2 - 24s + 18}$. Betrachtet man das Quadrat D der Länge des Abstandvektors erhält man $D(s) = 9s^2 - 24s + 18$. Für die Ableitung gilt: $D'(s) = 18s - 24 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{4}{3}$. Damit wird D als quadratische Funktion für $s = \frac{4}{3}$ minimal. Der Abstand beträgt $\sqrt{9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 24 \cdot \frac{4}{3} + 18} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$. Für den Abstandsvektor $\vec{d}$ gilt: $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Im Zeitpunkt $s = \frac{4}{3}$ befindet sich …

- der Boeing im Punkt mit dem Ortsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8{,}3 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 9\frac{19}{30} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3{,}67 \\ 0{,}67 \\ 9{,}63 \end{pmatrix}$
- die Douglas im Punkt mit dem Ortsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7{,}3 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 8\frac{19}{30} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}67 \\ 0{,}67 \\ 8{,}63 \end{pmatrix}$.

Damit ist der vertikale Abstand mit 1000 m zwar ausreichend, aber der horizontale Abstand mit 1 km deutlich zu gering. Da der Boeing und die Douglas sich ab 11:00:40 ($s > 2$) offenbar voneinander entfernen, bedarf es keiner weiteren Berechnungen.

Gesamtfazit: Die Flugsicherheit scheint nicht eingehalten worden zu sein.

b) Z. B. Geschwindigkeit der Flugzeuge:

- $|\vec{u_1}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 3$ km. Also beträgt die Geschwindigkeit des Boeings beim Ansteigen 3 km pro 20 Sekunden, also 9 km pro Minute, also $9 \cdot 60 = 540$ km pro Stunde.
- $|\vec{u_2}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{17}$ km. Die Geschwindigkeit des Boeings in Reisehöhe ist $3 \cdot \sqrt{17} \cdot 60 \approx 742$ km pro Stunde.
- $|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6}$. Das zweite Flugzeug steigt mit $3 \cdot \sqrt{6} \cdot 60 \approx 441$ km pro Stunde.

c) 1 km entspricht 1 Einheit. Für die Modellierung mit dem Modell legt man die x_1-x_2-Ebene des Modells in eine Höhe von $x_3 = 8{,}3$ km. Daher liegt der Aufpunkt des Boeings für $s = 0$ in der x_1-x_2-Ebene.

1.5 Projektionsaufgaben

Aufgabe 1

a) Cam Carpets werden hinter den Linien, aber noch vor den Banden flach auf dem Rasen ausgebreitet. Ihre Werbemotive sind gemäß dem Strahlensatz perspektivisch so gestaltet, dass sie aus dem Blickwinkel der Führungskamera wie aufrechtstehende Werbeflächen wirken. Sieht man die Schriftzüge jedoch nicht aus der Perspektive der Hauptkamera, die auf der Höhe der Mittellinie oberhalb der Haupttribüne angebracht ist, so wirken die Buchstaben deutlich verzerrt. Nur so kann man erkennen, dass die Buchstaben nur scheinbar aufrecht stehen und dass sie tatsächlich flach auf dem Boden liegen. Manchmal läuft sogar ein Spieler über diesen Teppich.

c) $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix}-53\\53\\-31\end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{Q'} = \vec{Q} + t\cdot\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}8\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-53\\53\\-31\end{pmatrix} \Leftrightarrow 1 - 31t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{31}.$

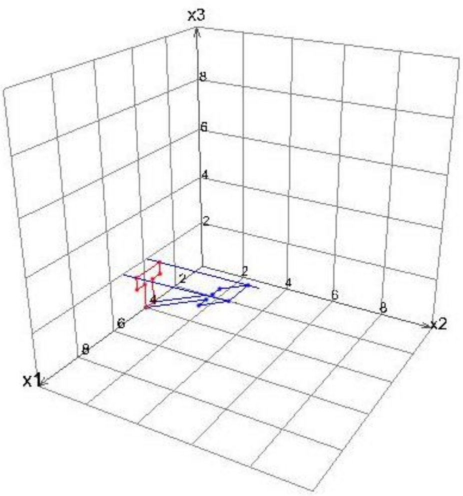
Daher ergibt sich: $\overrightarrow{Q'} = \vec{Q} + \frac{1}{31}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}2{,}8\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{31}\cdot\begin{pmatrix}-53\\53\\-31\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{169}{155}\\\frac{53}{31}\\0\end{pmatrix}$. Also: $Q'(\frac{169}{155} / \frac{53}{31} / 0)$.

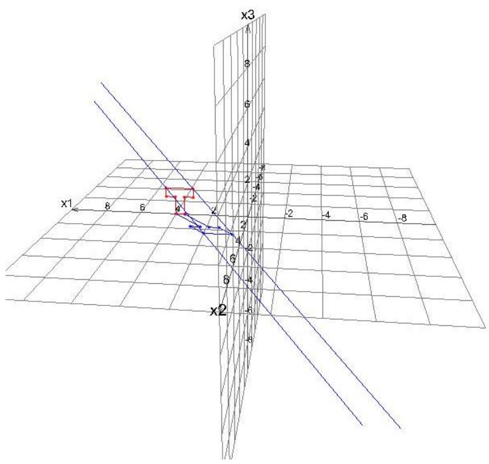
e) Da der Punkt R den gleichen z-Wert hat, erhält man den gleichen t-Wert: $\overrightarrow{R'} = \vec{R} + \frac{1}{31}\cdot\vec{v}$. Es ergibt sich $R'(\frac{324}{155} / \frac{53}{31} / 0)$. Mit $\overrightarrow{S'} = \vec{S} + t\cdot\vec{v}$ folgt $\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3{,}8\\0\\0{,}75\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-53\\53\\-31\end{pmatrix} \Leftrightarrow 0{,}75 - 31t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{124}.$

Daher folgt für S´ $\overrightarrow{S'} = \vec{S} + \frac{3}{124}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}2{,}8\\0\\0{,}75\end{pmatrix} + \frac{3}{124}\cdot\begin{pmatrix}-53\\53\\-31\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{941}{620}\\\frac{159}{124}\\0\end{pmatrix}$. Also: $S'(\frac{941}{620} / \frac{159}{124} / 0)$.

Aufgabe 2

a)





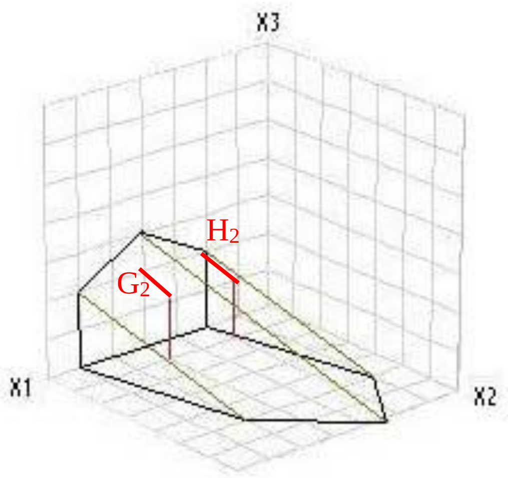
b) **(1)** g: $\vec{X}(t) = \vec{A} + t\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\0\\1{,}5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\-3\end{pmatrix}$ **(2)** Ansatz: $\overrightarrow{A'} = \vec{A} + t\cdot\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\1{,}5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\-3\end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $1{,}5 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 0{,}5$. Daher ergibt sich: $\overrightarrow{A'} = \vec{A} + 0{,}5\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\0\\1{,}5\end{pmatrix} + 0{,}5\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\\2{,}5\\0\end{pmatrix}$. Für die anderen Projektionspunkte ergibt sich mit dem Ansatz: $\overrightarrow{Punkt'} = \overrightarrow{Punkt} + t\cdot\vec{v}$. Beachte: Man erhält nur bei Punkten mit gleichem z-Wert den gleichen t-Wert! B´(2/2,5/0) (t = 0,5), C´($2\frac{5}{6}/1\frac{2}{3}$/0) (t = $\frac{1}{3}$), D´($2\frac{1}{3}/1\frac{2}{3}$/0) (t = $\frac{1}{3}$), E´(4/0/0) (t = 0), F´(3,5/0/0) (t = 0), G´($1\frac{5}{6}/1\frac{2}{3}$/0) (t = $\frac{1}{3}$), H´($1\frac{1}{3}/1\frac{2}{3}$/0) (t = $\frac{1}{3}$).

c) Um von A nach A´ zu gelangen, muss man von A aus den halben Vektor $\vec{v}$ gehen. Um zum Kamerapunkt zu gelangen, geht man nun 10-mal den negativen Vektor $\vec{v}$ (entspricht 20-mal dem halben negativen Vektor $\vec{v}$)

Also: $\vec{P} = \vec{X}(-10) = \vec{A} - 10 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - 10 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 \\ -50 \\ 31{,}5 \end{pmatrix}$. Damit P(53/-50/31,5).

Aufgabe 3

a) Es könnte sein, dass die beiden Duellanten komplett im Schatten des Hauses liegen und daher nicht gut zu filmen sind.



b) Um zu untersuchen, ob die beiden Duellanten im Schatten stehen, stellt man die Frage, ob die beiden Schauspieler die Sonne sehen können. Dazu bildet man die Geraden aus den Koordinaten des Kopfes eines Duellanten mit der Sonnenrichtung. Dann bestimmt man den Spurpunkt der Geraden mit der x_1x_3-Ebene und schaut, ob dieser Punkt oberhalb oder nicht oberhalb des Hauses liegt. Im ersten Fall steht der Duellant nicht vollständig im Schatten, im zweiten Fall schon.

g: $\vec{X}(r) = \vec{P_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}7 \end{pmatrix} + r \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1{,}7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{X}(s) = \vec{P_2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1{,}7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = -0{,}2,\ \begin{matrix} x_1 = 4{,}2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2{,}1 \end{matrix}$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1{,}7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = -0{,}2,\ \begin{matrix} x_1 = 2{,}2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2{,}1 \end{matrix}$.

Es ergeben sich die Spurpunkte G_2 (4,2/0/2,1) und H_2 (2,2/0/2,1).

Die Gerade durch die Punkte P_5 und P_6 hat die Form p: $\vec{X}(t) = \vec{P_5} + t \cdot \overrightarrow{P_5P_6} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Es gilt für t = 0,1: $\vec{X}(0{,}1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 0{,}1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}2 \\ 0 \\ 2{,}9 \end{pmatrix}$. Damit liegt der Punkt G_2 auf der Hauswand (denn der x_3-Wert von G_2 ist mit 2,1 kleiner als 2,9), und der erste Duellant kann die Sonne nicht sehen.

Die Gerade durch die Punkte P_4 und P_5 hat die Form q: $\vec{X}(x) = \vec{P_4} + t \cdot \overrightarrow{P_4P_5} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es gilt für x = 0,1: $\vec{X}(0{,}1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0{,}1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 0 \\ 2{,}1 \end{pmatrix} = \vec{H_2}$. Damit liegt der Punkt H_2 genau auf der Hauswand, und der zweite Duellant kann die Sonne ebenfalls nicht sehen.

1.6 Geradenscharen

Aufgabe 1: Allgemeiner Geradenpunkt und Punkteschar

b) A: $8 = -4 + 3\sigma, \Rightarrow \sigma = 4;\ a_1 = 13, a_2 = -3$ $\quad$ A(13 | −3 | 8)

B: $-12 = -7 + 5\sigma, \Rightarrow \sigma = -1;\ k = 7$ $\quad$ B(−12 | 7 | −7)

C: $1 = -4 + 3\sigma, \Rightarrow \sigma = \frac{5}{3};\ 1 = 5 - 2\sigma, \Rightarrow \sigma = 2$ $\quad$ C liegt nicht auf g

D: $k = -4 + 3\sigma, \Rightarrow \sigma = \frac{1}{3}(k+4);\ -3k = 5 - 2\cdot\frac{1}{3}(k+4) \Rightarrow k = -1, \sigma = 1$

$k = -1$ und $\sigma = 1$ erfüllen auch $2k = -7 + 5\sigma$ $\quad$ D(−2 | 3 | −1)

E: $1 = 5 - 2\sigma, \Rightarrow \sigma = 2;\ 2k = -4 + 3\sigma, \Rightarrow k = 1$

$\sigma = 2$ und $k = 1$ erfüllen $4k - 3 = -7 + 5\sigma$ nicht, $\quad$ E liegt nicht auf g

c) **(1)** $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1+2a \\ 2-7a \\ -1-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ **(2)** $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3a-2 \\ 4 \\ -6a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

(3) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ **(4)** $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 1-a \\ a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(5) geht nicht

(6) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2/a \\ 0 \\ 1/a \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; die Punkte liegen auf einer Ursprungsgerade;

Aufgabe 2: Geradenscharen

b) **(1)** g_0 ist parallel ist zur x_1x_3-Ebene $\qquad$ **(2)** g_{-1} geht durch den Ursprung

(3) $\begin{pmatrix} -14+7\mu \\ 2+a\mu \\ 2-\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mu = -3,\ a = 2,\ w_1 = -35;$

g_2 geht durch W(− 35 | − 4 | 5).

c) **(1)** 3.Richtungskoordinate = 0, $\quad\Rightarrow\quad a = \frac{13}{6}$

(2) 1.Richtungskoordinate = 0, $\quad\Rightarrow\quad a = 0$

(3) $\begin{pmatrix} 16+4a\mu \\ 4+4\mu \\ 11+13\mu-6a\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ Gleichungssystem enthält Widerspruch,

keine Schargerade geht durch O.

(4) $\begin{pmatrix} 16+4a\mu \\ 4+4\mu \\ 11+13\mu-6a\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow \mu = -1,\ a = 4,\ z = 22$; h_4 geht durch (0 | 0 | −22).

d) $k_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ keine Schargerade schneidet die x_1-Achse

k_6 schneidet die x_2-Achse bei − 5, k_{-4} schneidet die x_3-Achse bei 5.

1.7 Darstellung von Ebenen im Raum

Aufgabe 1

b) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $A(2|1|3)$ $B(0|1|8)$ $C(3|8|5)$ $D(1|8|10)$

d) $A(\lambda = 1 | \mu = 1)$ B liegt nicht drin $C(\lambda = 8 | \mu = -2)$

f) (1) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) Geht nicht: $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ sind parallel: A, B und C liegen auf einer Gerade.

g) $E: \vec{X} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

h) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

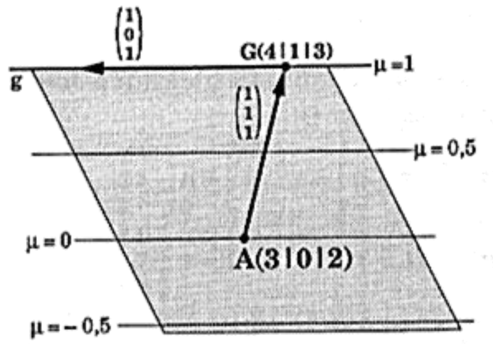
i) $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mu \leq 1$ (Bild!)

oder

$\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\sigma \leq 0$



Aufgabe 2

a) Wenn man die Befestigungspunkte in den Ecken so wählt wie Sabine, erhält man z. B. A (0/0/3,5), B (3/0/3), C (3/3/1,5) und D (0/3/2,5). Gehen wir zunächst davon aus, dass die drei Punkte A, B und D eine Ebene festlegen. Damit D auch in derselben Ebene liegt, muss das Viereck ABCD ein ebenes Viereck sein. Man ergänzt dazu das Dreieck ABD durch eine Punkt C zu einem Parallelogramm durch $\vec{C} = \vec{A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Der Befestigungspunkt für C müsste 1,5 m statt 2 m unter der Decke angebracht werden.

b) C lautet nun (3/3/2). Wegen a) gilt: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Es handelt sich also um ein Parallelogramm mit den Seitenlängen $\sqrt{9{,}25} \approx 3{,}04$ m und $\sqrt{10} \approx 3{,}16$ m. Der Umfang beträgt daher ca. 12,40 cm. Für den Winkel α, den die Seiten $\overline{AB} = a = \sqrt{9{,}25}$ und $\overline{BC} = b = \sqrt{10}$ einschließen, kann der Kosinussatz weiterhelfen. Mit der Länge $\overline{AC} = c = |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{20{,}25}$ folgt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha) \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{c^2-a^2-b^2}{-2ab} = \frac{20{,}25-9{,}25-10}{-2\sqrt{92{,}5}} \Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{-2\sqrt{92{,}5}}\right) \approx 92{,}98°$. Damit lautet der Ergänzungswinkel 87,02°. Für den Flächeninhalt gilt $A = ab\sin(\alpha) \approx 9{,}60$ m².

c) Weitere Befestigungspunkte B_k lassen sich bestimmen durch die Ortsvektoren:
Wand 1 (AB): $\overrightarrow{B_k} = \vec{A} + k \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $0 < k < 1$.
Wand 2 (BC): $\overrightarrow{B_k} = \vec{A} + \overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{BC}$ mit $0 < k < 1$.
Wand 3 (CD): $\overrightarrow{B_k} = \vec{A} + \overrightarrow{AD} + k \cdot \overrightarrow{DC}$ mit $0 < k < 1$.
Wand 4 (AD): $\overrightarrow{B_k} = \vec{A} + k \cdot \overrightarrow{AD}$ mit $0 < k < 1$.

d) Ein beliebiger Punkt des Tuches lässt sich erreichen durch den Ortsvektor:
$\overrightarrow{P_{k;\,l}} = \vec{A} + k \cdot \overrightarrow{AD} + l \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $0 \leq k, l \leq 1$

1.8 Lagebeziehung von Ebene und Gerade

Aufgabe 2

a) Geradengleichung Düsenjet: g: $\vec{X}(r) = \vec{A} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

Geradengleichung Segelflugzeug: h: $\vec{X}(s) = \vec{P} + r \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Durch Gleichsetzen erhält man $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 3 & 6 \\ -6 & 6 \\ -6 & 3 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{matrix} \underset{\text{GTR}}{\Longleftrightarrow} r = \frac{2}{3};\ s = \frac{1}{3}$

Man erhält den Schnittpunkt der Flugbahnen: $\vec{S} = \vec{X}\left(\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Ebenengleichung für den Luftraum E: $\vec{X}(x; y) = \vec{F} + x \cdot \overrightarrow{FG} + y \cdot \overrightarrow{FH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Durch Gleichsetzten der Vektoren von Gerade und Ebene ergibt sich im Falle des Düsenjets:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 3 & -2 & -3 \\ -6 & -4 & -1 \\ -6 & 6 & 3 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{matrix} \underset{\text{GTR}}{\Longleftrightarrow} r = \frac{14}{19}, x = \frac{21}{38}, y = \frac{7}{19}$.

Man erhält als Schnittpunkt $\vec{T} = \vec{X}\left(\frac{14}{19}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{14}{19} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{42}{19} \\ -\frac{46}{19} \\ \frac{30}{19} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}21 \\ -2{,}42 \\ 1{,}58 \end{pmatrix}$.

c) Durch Gleichsetzten der Vektoren von Gerade und Ebene ergibt sich im Falle des Segelflugzeugs:

$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -6 & -2 & -3 \\ -6 & -4 & -1 \\ -3 & 6 & 3 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} -4 \\ -5 \\ 3 \end{matrix} \underset{\text{GTR}}{\Longleftrightarrow} s = \frac{9}{23}, x = \frac{29}{46}, y = \frac{3}{23}$.

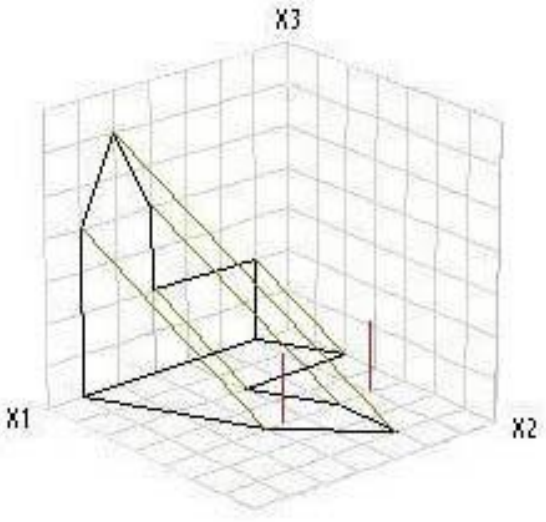
Man erhält als Schnittpunkt $\vec{R} = \vec{X}\left(\frac{9}{23}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{9}{23} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{23} \\ -\frac{54}{23} \\ \frac{43}{23} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}21 \\ -2{,}35 \\ 1{,}83 \end{pmatrix}$.

d) Beide Flugzeuge durchqueren den Schnittpunkt S, bevor sie jeweils in den Luftraum des Flughafens eindringen. Begründung: Die Parameter zum Schnittpunkt S betragen $r_S = \frac{2}{3}$ und $s_S = \frac{1}{3}$. Die Parameter zum Eindringen in den Luftraum betragen $r_T = \frac{14}{19} > \frac{2}{3} = r_S$ und $s_R = \frac{9}{23} > \frac{1}{3} = s_S$.

e) Zusatzaufgabe: Der Richtungsvektor der Ebene vom Punkt F (0/-5/6) zum Punkt H (3/-4/3) kann um den Faktor 2 auf den Punkt (6/-3/0) gestreckt werden. Dieser Punkt kann ohne Stange benutzt werden.

Aufgabe 3

a)



b) Ein Nachbau der Situation ist hier sinnvoll, da man dann erkennen kann, dass Schauspieler 2 nicht im Schatten steht und nur für Schauspieler 1 überprüft werden muss, ob er im Schatten steht. Dafür bestimmt man den Schnittpunkt der Schattenebene E durch die Punkte P_5 und P_6 in Sonnenrichtung mit der Geraden g durch den Punkt P_8 und P_{10} (3,5/4/1,7).

$$E: \vec{X}(r;s) = \vec{P_5} + r \cdot \overrightarrow{P_5P_6} + s \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq r \leq 1 \text{ und } s \geq 0.$$

$$g: \vec{X}(t) = \vec{P_8} + r \cdot \overrightarrow{P_8P_{10}} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}7 \end{pmatrix} \text{ mit } t \geq 0.$$

Durch Gleichsetzten der Vektoren von Ebene E und Gerade g ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1{,}7 \end{matrix}\,\right|\, \begin{matrix} -1{,}5 \\ 4 \\ -6 \end{matrix} \underset{\text{GTR}}{\Longleftrightarrow} r = 0{,}5, s = 2, t = \frac{10}{17}$$

Da der Parameter $t = \frac{10}{17} < 1$ und $0 < r = 0{,}5 < 1$ ist, befindet sich der Oberkörper des Schauspielers nicht im Schatten der Kirche.

c) Werden die Aufnahmen noch später nachmittags vorgenommen, kann es sein, dass die Aufnahmen bei flacheren Sonnenstrahlen zu einem „Schattenduell“ werden, da sich beide Schauspieler im Kirchenschatten befinden.

1.9 Kontrollaufgaben

1a)

(1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \underset{\text{II+III}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow x = 1 \underset{\text{x in I}}{\Longrightarrow} y = -1 \underset{\text{x,y in III}}{\Longrightarrow} z = 2$

(2) Die Lösung bedeutet eine Abhängigkeit voneinander. Setzt man x = t dann gilt y = 2t. Daher gibt es unendliche viele Lösungen mit dem Lösungsvektor $t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1b)

(1) $\vec{B} = \vec{S} + \overrightarrow{RS} = \vec{S} + (\vec{S} - \vec{R}) = 2\vec{S} - \vec{R} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\vec{A} = \vec{R} - \overrightarrow{RS} = \vec{R} - (\vec{S} - \vec{R}) = 2\vec{R} - \vec{S} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) $|\overrightarrow{AB}| = 3 \cdot |\overrightarrow{RS}| = 3 \cdot |(\vec{R} - \vec{S})| = 3 \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = 3\sqrt{27} = 9\sqrt{3} = \sqrt{243}$

1c)

(1) $g: \vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X}(\mu) = \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ sind identisch, da die Richtungsvektoren kollinear sind und der Verbindungsvektor der Aufpunkte kollinear zu den beiden Richtungsvektoren ist.

(2) $g: \vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ schneiden sich im Punkt (1/0/0), da dieser Punkt Aufpunkt beider Geraden mit nicht kollinearen Richtungsvektoren ist.

(3) $g: \vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ sind echt parallel, da die Richtungsvektoren kollinear sind und der Verbindungsvektor der beiden Aufpunkte nicht kollinear zu den kollinearen Richtungsvektoren ist.

1d)

(1) $g': \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h': \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn bei der senkrechten Projektion in die x_1x_2−Ebene ist die x_3-Koordinate des allgemeinen Geradenpunktes immer Null.

(2) Die Geraden g´ und h´ sind echt parallel oder identisch, da die Richtungsvektoren kollinear sind. Der Vektor vom Aufpunkt G´ von g´ zum Aufpunkt H´ von h´ (Differenzverktor der Stützvektoren) ist offenbar nicht kollinear zu den Richtungsvektoren der Geraden g´ und h´. g´ und h´ sind also echt parallel.

1e)

(1) $G_a(a/-2/3)$ und $H_a(a+4/0/5)$ $(a \in \mathbb{R})$ liegen auf $g_a\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$. für b = 0 und b = 2.

(2) $g_a\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ mit zwei nicht kollinearen Richtungsvektoren.

2a)

$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{PQ}$ beschreiben die Richtung der beiden Flugzeuge F_1 und F_2 und gleichzeitig den Geschwindigkeitsvektor für einen Zeitraum von zwei Minuten. Es gilt:

$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -7{,}5-(-12{,}5) \\ -17-(-14) \\ 4{,}6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} -5{,}8-(-11{,}4) \\ 10-13 \\ 5{,}2-5{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}6 \\ -3 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}$.

In einer Minute legen die Flugzeuge von ihren Startpunkten aus den Vektor $0{,}5 \cdot \overrightarrow{AB}$ bzw. $0{,}5 \cdot \overrightarrow{PQ}$ zurück. Also lassen sich die Flugbahnen durch die folgenden Geradengleichungen F_1 und F_2 mit den Parametern s und t (jeweils in Minuten) beschreiben:

$$F_1\colon \vec{X}(r) = \vec{A} + r \cdot 0{,}5 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12{,}5 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -1{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12{,}5+2{,}5r \\ -14-1{,}5r \\ 4+0{,}3r \end{pmatrix}; \vec{X}(-4) = \begin{pmatrix} -22{,}5 \\ -8 \\ 2{,}8 \end{pmatrix}$$

$$F_2\colon \vec{X}(t) = \vec{P} + t \cdot 0{,}5 \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -11{,}4 \\ 13 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2{,}8 \\ -1{,}5 \\ -0{,}15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11{,}4+2{,}8t \\ 13-1{,}5t \\ 5{,}5-0{,}15t \end{pmatrix}; \ \vec{X}(-4) = \begin{pmatrix} -22{,}6 \\ 19 \\ 6{,}1 \end{pmatrix}$$

2b)

Zur Bestimmung der Länge der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{PQ}$ gilt:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2+(-3)^2+0{,}6^2} \approx 5{,}86$ Kilometer pro zwei Minuten ≈ 175,85 km/h.
$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{5{,}6^2+(-3)^2+(-0{,}3)^2} \approx 6{,}36$ Kilometer pro zwei Minuten ≈ 190,80 km/h.

2c)

Folgende zwei Bedingungen müssen erfüllt sein:

(1) x_3-Koordinate von Flugzeug F_1 = x_3-Koordinate von Flugzeug F_2
(2) Zeitparameter r = Zeitparameter t

Daher gilt: 4 + 0,3r = 5,5 – 0,15t (mit (1)) ⇔ 4 + 0,3r = 5,5 – 0,15r (mit (2)) ⇔ 0,45r = 1,5 ⇔ r = $\frac{10}{3}$. Also gilt für die zurückgelegte Strecke x von F_2: $x \approx \frac{10}{3}\,\text{min} \cdot 3{,}18\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = 10{,}60$ km.

2d)

Durch Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen F_1 und F_2 erhält man:

(I) $2{,}5r - 2{,}8t = 1{,}1$
(II) $-1{,}5r + 1{,}5t = 27$
(III) $0{,}3r + 0{,}15t = 1{,}5$

(II) + 5 · (III) ergibt: 2,25t = 34,5 ⇔ t = $\frac{46}{3}$ ⇒ r = $-\frac{8}{3}$. Setzt man die s und t in (I) ein, ergibt sich:

$2{,}5 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) - 2{,}8 \cdot \frac{46}{3} = 1{,}1$ ⇔ -49,6 = 1,1 (falsche Aussage) ⇒ F_1 und F_2 sind windschief, d. h. die Flugzeuge F_1 und F_2 können unmöglich kollidieren.

2e)

Man berechne zunächst den Verbindungsvektor $\overrightarrow{X_{F_1}X_{F_2}}$ eines beliebigen Punktes X_{F_1} der Geraden F_1 mit einem beliebigen Geradenpunkt X_{F_2} der Geraden F_2, wobei r = t gilt.

$$\overrightarrow{X_{F_1}X_{F_2}} = \overrightarrow{X_{F_2}} - \overrightarrow{X_{F_1}} = \begin{pmatrix} -11{,}4 + 2{,}8t \\ 13 - 1{,}5t \\ 5{,}5 - 0{,}15t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -12{,}5 + 2{,}5t \\ -14 - 1{,}5t \\ 4 + 0{,}3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}1 + 0{,}3t \\ 27 \\ 1{,}5 - 0{,}45t \end{pmatrix}.$$

Die Länge des Vektors $\overrightarrow{X_{F_1}X_{F_2}}$ ist genau minimal, wenn sein Quadrat minimal ist. Für das Quadrat d^2 der Länge gilt:

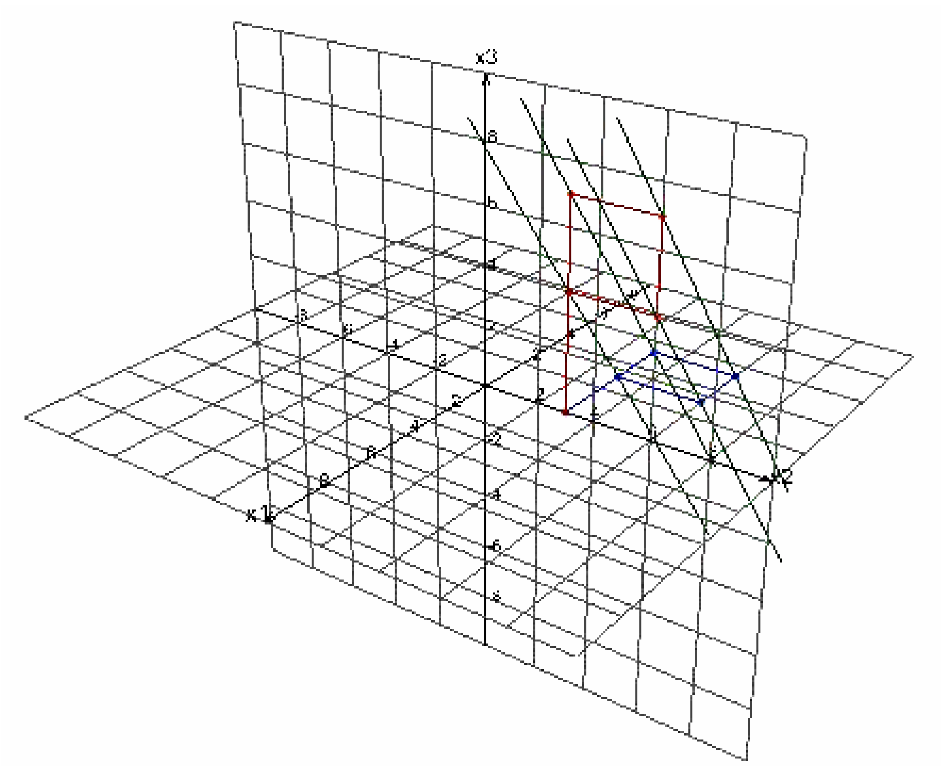
$d^2(t) = \left|\overrightarrow{X_{F_1}X_{F_2}}\right|^2 = (1{,}1 + 0{,}3t)^2 + 27^2 + (1{,}5 - 0{,}45t)^2 = 0{,}2925t^2 - 0{,}69t + 732{,}46$. Für die Ableitung gilt: $d^{2\prime}(t) = 0{,}585t - 0{,}69 = 0$ ⇔ t ≈ 1,18 Minuten ($d^{2\prime\prime}(t) = 0{,}585 > 0$). Nach ungefähr 1 Minute und 11 Sekunden haben F_1 und F_2 der geringsten Abstand.

3a)

In der Erläuterung der Wirkungsweise könnten z. B. folgende Aspekte genannt werden:

- Parallelenprojektion,
- Blickrichtung der Kameraposition,
- Projektion in die x_1-x_2-Ebene,
- Projektionspunkte,
- optische Täuschung je nach Perspektive.

3b) und 3e)



3c)

Ansatz: $\overrightarrow{P_2}' = \overrightarrow{P_2} + t \cdot \vec{v}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 4 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 1;\ \ \overrightarrow{P_2}' = \overrightarrow{P_2} + 1 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Erläuterungen:

- z-Wert des Projektionspunktes ist Null, da der Projektionspunkt in der x_1-x_2-Ebene liegt.
- Durch die dritte Koordinatengleichung erhalte ich t = 1.
- Mit t = 1 erhalte ich die x_1- und x_2-Werte von P_2.

3d)

$$\overrightarrow{P_1}' = \overrightarrow{P_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{P_3}' = \begin{pmatrix} -5{,}25 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} (t = 1{,}75);\ \overrightarrow{P_4}' = \begin{pmatrix} -5{,}25 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} (t = 1{,}75);\ \overrightarrow{P_5}' = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} (t = 1)$$

4a)

$\vec{P} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{D}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Daher folgt: $\overrightarrow{PE} = \vec{E} - \vec{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $|\overrightarrow{PE}| = \sqrt{26} \approx 5{,}10$.

4b)

Da die beiden Geraden g und h offenbar nicht parallel sind (warum?), setzen wir gleich:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 6\lambda \\ 5\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 9\mu \\ 4 - 7\mu \\ 5\mu \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9\mu \\ 6\lambda + 7\mu \\ 5\lambda - 5\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch Gleichung (I) erhält man $\mu = \frac{1}{3}$. Mit Gleichung (III) ergibt sich auch $\lambda = \frac{1}{3}$. Setzt man λ und μ in Gleichung (II) ein, ergibt sich $6 \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot \frac{1}{3} = 4$, also $4\frac{1}{3} = 4$ (f). Daher sind die beiden Geraden windschief.

4c)

(1) Die Kanten $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ sind die offenbar nicht parallelen Kanten eines (ebenen) Trapezes. Daher liegen die nicht parallelen Geraden in einer Ebene. Sie haben daher genau einen Schnittpunkt.

(2) Die Geradengleichungen lauten: p: $\vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, q: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Gleichsetzen ergibt: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3\lambda \\ \lambda \\ 5\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\mu \\ 8 - 2\mu \\ 5\mu \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3\lambda - 3\mu \\ \lambda + 2\mu \\ 5\lambda - 5\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gleichung (I) und (III) ergeben jeweils $\lambda = \mu$. Ersetzt man in (II) μ durch λ, ergibt sich $\mu = \lambda = \frac{8}{3}$. Setzt man $\lambda = \frac{8}{3}$ in die Gleichung von g ein, erhält man den Schnittpunkt S $(8/-\frac{8}{3}/\frac{40}{3})$.

4d)

$$E: \vec{X} = \vec{B} + r \cdot \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}$$

4e)

(1) Man wählt für die Richtungen die Einheitsvektoren:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{(-6)^2+8^2}} \cdot \begin{pmatrix}-6\\8\\0\end{pmatrix} + \frac{40}{29} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{100}{29} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + 5 \cdot \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix}-6\\8\\0\end{pmatrix} + \frac{40}{29} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{100}{29} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-3\\ \frac{216}{29} \approx 7{,}4\\ \frac{40}{29} \approx 1{,}4\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix}-3\\ \frac{216}{29}\\ \frac{40}{29}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} -3 &= \lambda + 3\mu \xRightarrow[\mu=\frac{8}{29}\approx -0{,}2759]{} \lambda = -\frac{63}{29} \approx -1{,}8964 \\ \frac{216}{29} &= 8 + 2\mu \Rightarrow \mu = \frac{8}{29} \approx -0{,}2759 \\ \frac{40}{29} &= -5\mu \Rightarrow \mu = \frac{8}{29} \approx -0{,}2759 \end{aligned}$$

Damit liegt der Punkt F für $\lambda \approx -1{,}8964$ und $\mu \approx -0{,}2759$ in E.

4f)

$g_{AE}: \vec{X} = t \cdot \begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix}$ und E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}$.

Durch Gleichsetzen erhält man folgendes LGS für die Unbekannten r, s und t: $\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right.$.

Der GTR ermittelt r = 0, s = $-\frac{8}{3}$, t = $\frac{8}{3}$. Damit ergibt sich als Schnittpunkt der Punkt S (-8/ $\frac{8}{3}$ / $\frac{40}{3}$).

4g)

Offenbar sind E und F nicht parallel. Durch Gleichsetzten der beiden Parametergleichungen der Ebenen F und F erhält man ein 3x4-LGS mit den Unbekannten r, s, t und u, das ∞-lösbar ist. Ergänzt man das 3x4-LGS durch eine vierten Gleichung $0 \cdot r + 0 \cdot s + 0 \cdot t + 0 \cdot u = 0$ zu einem 4x4-LGS, ändert dies die Lösungsmenge nicht, da beim 3x4-LGS wegen der Nicht-Parallelität der Ebenen E und F stets ein Parameter frei ist wählbar ist (z. B t = μ).

Zur Bestimmung der Schnittgeraden löst man das 4x4-LGS in MENU A (Gleichung):

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & -5 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & -5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \xLeftrightarrow{\text{GTR (MENU A)}} \begin{pmatrix}r\\s\\t\\u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\ -\frac{8}{3}\\ t\\ \frac{8}{3}\end{pmatrix}$$

Setzt etwa t und u in die Parametergleichung von F ein, erhält man als Schnittgerade:

$$\text{s: } \vec{X}\left(t; \frac{8}{3}\right) = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{8}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ \frac{8}{3} \\ \frac{40}{3} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{S} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativlösung:

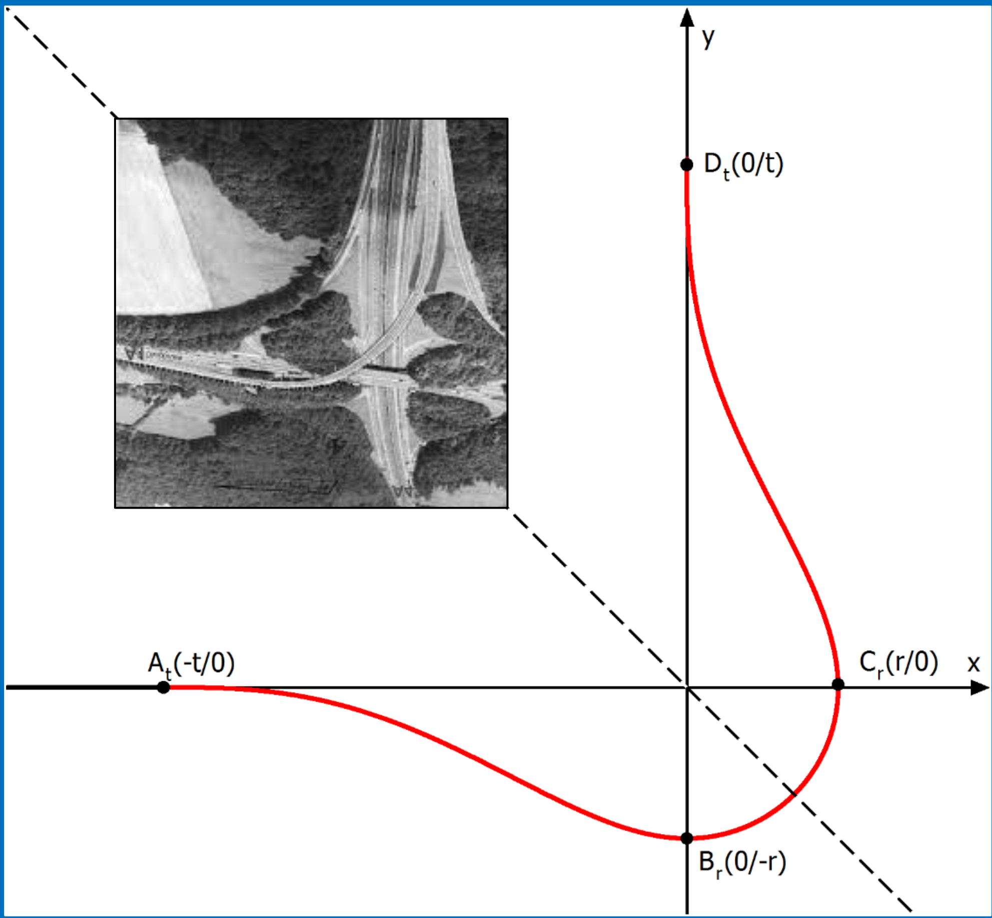
Durch Gleichsetzen erhält in der Matrizenschreibweise für die Unbekannten r, s, t und u:

$$\left.\begin{matrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{matrix} \underset{5\cdot\text{II}+2\cdot\text{III}}{\Longleftrightarrow} \left.\begin{matrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 0 \\ -8 \\ -40 \end{matrix}.$$

Es ergibt sich $u = \frac{8}{3}$. Setzt man u in die zweite Gleichung ein, folgt $s = 0{,}5u - 4 = -\frac{8}{3}$. Setzt man nun s und u in die erste Gleichung ein, folgt: $r - t = -3s - 3u = 0$, also $r = t = \mu$. Setzt man z. B. $u = \frac{8}{3}$ in der Parametergleichung der Ebene F ein, ergibt sich eine Geradengleichung als Lösungsvektor:

$\vec{X} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{8}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ \frac{8}{3} \\ \frac{40}{3} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dies ist eine zur x_1-Achse parallele Gerade (Warum?).

Lektion 2: Funktionsgleichungen finden



Lektion 2: Funktionsgleichungen finden

2.1 Noch fit? – Funktionsuntersuchung mit Steigung und Krümmung

Wichtige Merksätze der E-Phase und Wichtiges zur Krümmung

Satz zur Monotonie

(1) **<u>Wenn</u>** $f'(x) > 0$ für alle x eines Intervalls ist,

<u>dann</u> ist der Graf von f über I **streng monoton zunehmend (wachsend).**

(2) **<u>Wenn</u>** $f'(x) < 0$ für alle x eines Intervalls I ist,

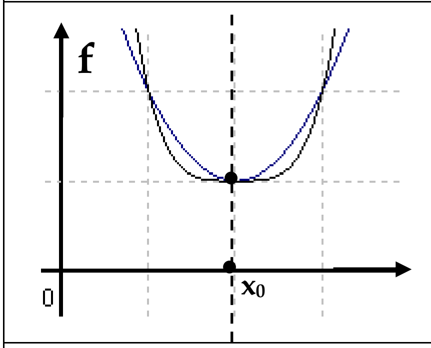
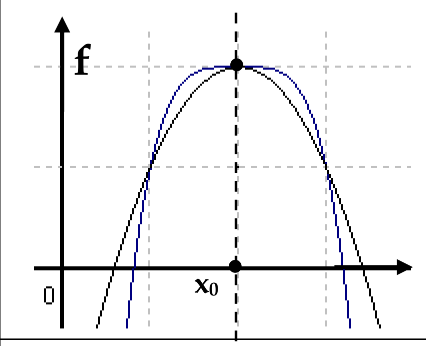
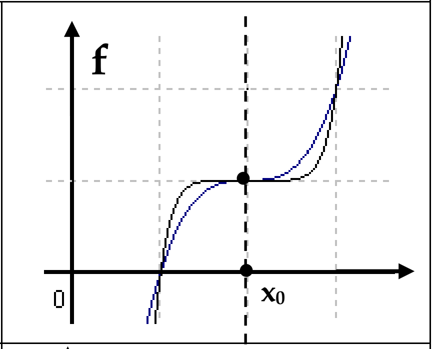
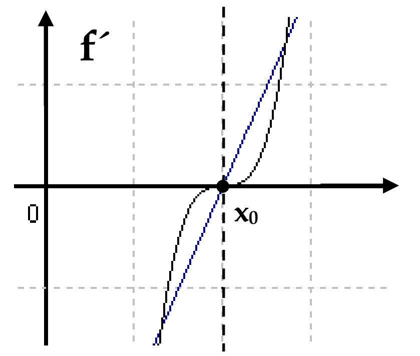
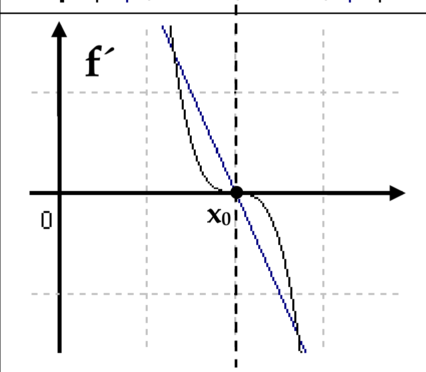
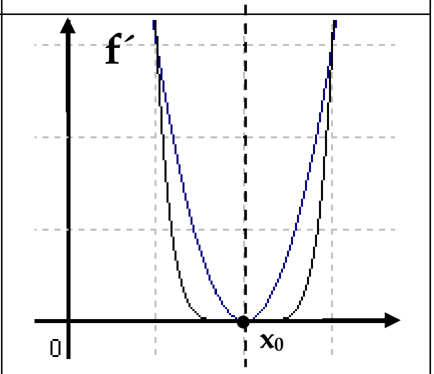
<u>dann</u> ist der Graf von f über I **streng monoton abnehmend (fallend).**

Die Umkehrungen gelten im Allgemeinen nicht.

Notwendige Bedingung für lokale Extremstellen: $f'(x_0) = 0$

<u>Wenn</u> an der Stelle x_0 eine lokale Extremstelle vorliegt, **<u>dann</u>** gilt: $\mathbf{f'(x_0) = 0}$.[20]

Hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen: $f'(x_0) = 0 \land f'$ hat bei x_0 einen VZW

		
		
<u>Wenn</u> $f'(x_0) = 0$ **und** f´ an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von **– nach +** hat, **<u>dann</u>** ist x_0 eine **lokale Minimumstelle** von f.[21]	**<u>Wenn</u>** $f'(x_0) = 0$ **und** f´ an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von **+ nach –** hat, **<u>dann</u>** ist x_0 eine lokale **Minimumstelle** von f.	**<u>Wenn</u>** $f'(x_0) = 0$ **und** f´ an der Stelle x_0 **keinen** Vorzeichenwechsel hat, **<u>dann</u>** ist x_0 eine **Sattelstelle** von f.

[20] Die logische Umkehrung gilt nicht immer.
[21] Die logische Umkehrung gilt nicht immer.

Es lässt sich folgende Variante für die **hinreichende Bedingung für Extremstellen** formulieren:

Hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen: $f'(x_0) = 0$

<u>Wenn</u> $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0)$ $\left\{\begin{matrix} > \\ > \end{matrix}\right\}$ **0** ist, **<u>dann</u>** ist x_0 eine lokale $\left\{\begin{matrix} \textbf{Minimumstelle} \\ \textbf{Maximumstelle} \end{matrix}\right\}$ von f. [22]

Krümmung und Wendestelle

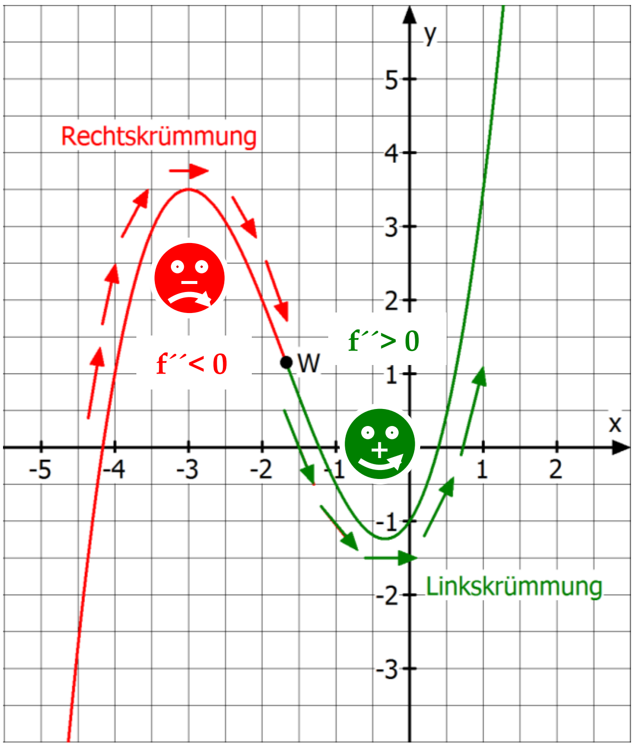
Ist **$f''(x) < 0$** für alle $x \in I$, so ist **f** auf I **rechtsgekrümmt**. Dabei ist **f´** auf I **streng monton fallend**. Die Steigungen des Grafen von f nehmen auf dem Intervall I also stetig ab.

Ist **$f''(x)$** > 0 für alle $x \in I$, so ist **f** auf I **linksgekrümmt.** Dabei ist **f´** auf I **streng monton wachsend**. Die Steigungen des Grafen von f nehmen auf dem Intervall I also stetig zu.

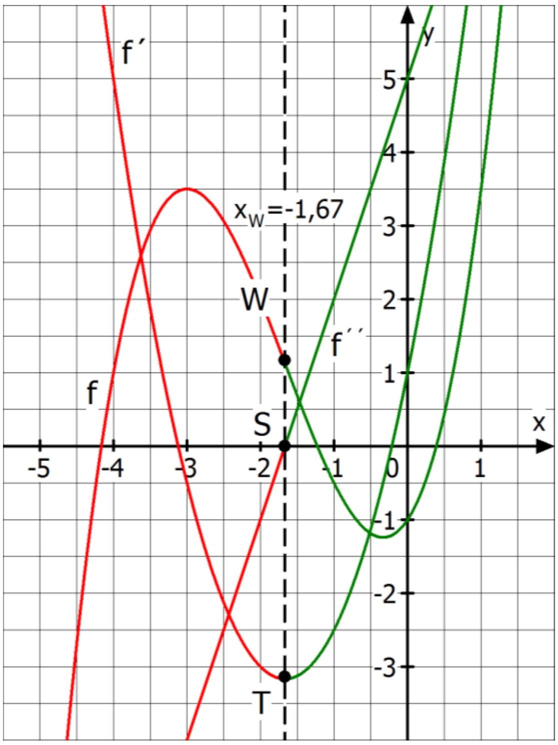
Eine **Wendestelle x_W** ist eine Stelle, an denen ein Krümmungswechsel vorliegt. Dort wechselt die Ableitung von f´ sein Vorzeichen. Daher gilt dort: **$f''(x_W) = 0$.**

Merke: Der Punkt W, in dem sich das Krümmungsverhalten ändert, wird als **Wendepunkt** bezeichnet. Die **Wendestelle x_W** (= x-Wert des Wendepunktes) ist eine lokale Extremstelle der ersten Ableitung und gleichzeitig eine Nullstelle der zweiten Ableitung.

Folgende Abbildungen verdeutlichen den Sachverhalt:



Merke: Am Wendepunkt W liegt ein Krümmungswechsel vor. Die Wendestelle von f ist Extremstelle von f´ und Nullstelle von f ´´.



f´´ < 0 ☹
f´ ist monoton fallend
f ist rechtsgekrümmt

f´´ > 0 ☺
f´ ist monoton steigend
f ist linksgekrümmt

[22] Die logische Umkehrung gilt nicht immer.

Notwendige Bedingung für Wendestellen: $f''(x_0) = 0$

<u>**Wenn**</u> an der Stelle x_0 eine Wendestelle vorliegt, <u>**dann**</u> gilt $\mathbf{f''(x_0) = 0}$. [23]

Hinreichende Bedingung für Wendestellen: $f''(x_0) = 0$ und VZW von f'' bei x_0

<u>**Wenn**</u> $\mathbf{f''(x_0) = 0}$ und $\mathbf{f''}$ an der Stelle x_0 einen **Vorzeichenwechsel** von $\left\{\begin{matrix} \mathbf{-\ nach\ +} \\ \mathbf{+\ nach\ -} \end{matrix}\right\}$ hat,

<u>**dann**</u> ist x_0 eine $\left\{\begin{matrix} \mathbf{Rechts-Links-Wendestelle} \\ \mathbf{Links-Rechts-Wendestelle} \end{matrix}\right\}$ Wendestelle von f.[24]

Es gilt auch folgende Variante für die hinreichende Bedingung für Wendestellen:

<u>**Wenn**</u> $\mathbf{f''(x_0) = 0}$ **und** $\mathbf{f'''(x_0)} \left\{\begin{matrix} > \\ > \end{matrix}\right\} \mathbf{0}$ ist, <u>**dann**</u> ist x_0 eine $\left\{\begin{matrix} \mathbf{Rechts-Links-Wendestelle} \\ \mathbf{Links-Rechts-Wendestelle} \end{matrix}\right\}$ von f.[25]

Aufgabe 1: Vollständige Kurvenuntersuchung ganzrationaler Funktionen

Gegeben sei die ganzrationale Funktion dritten Grades mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$.

a) **Untersuche** den Grafen der Funktion f auf Symmetrie.

b) **Beschreibe** das Verhalten im Unendlichen und nahe Null.

c) **Berechne** ohne GTR alle Schnittpunkte des Grafen von f mit den Koordinatenachsen.

d) **Ermittle** alle lokalen Hoch- und Tiefpunkte des Grafen von f.

e) **Untersuche** den Grafen von f auf sein Krümmungsverhalten.

f) **Skizziere** den Grafen von f zunächst ohne GTR und **überprüfe** anschließend Deine Ergebnisse mit dem GTR.

g) **Führe** eine vollständige Kurvenuntersuchung auch für die nachfolgenden Funktionen **durch**.

(1) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$ (2) $f(x) = x^4 - x^3$ (3) $f(x) = x^5 + x^3 + x$

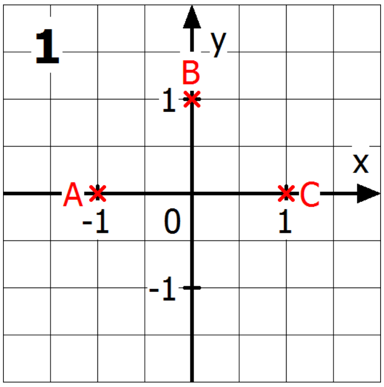
Überprüfe anschließend mit dem GTR.

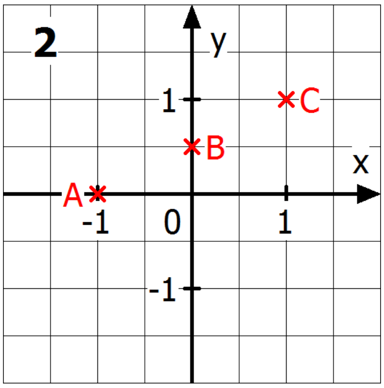
[23] Die logische Umkehrung gilt nicht immer.
[24] Die logische Umkehrung gilt nicht immer.
[25] Die logische Umkehrung gilt nicht immer.

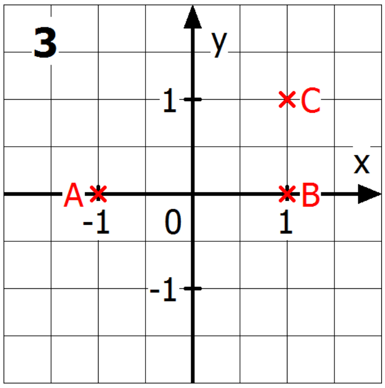
2.2 Ganzrationale Funktionen bestimmen

Aufgabe 1: Funktionsbestimmung bei Vorgabe von 3 Punkten[26]

Im Folgenden sind drei Abbildungen gegeben, bei denen jeweils 3 Punkte eingezeichnet sind. **Untersuche**, für welche Abbildungen ein Graph einer ganzrationalen Funktion ersten und zweiten Grades gefunden werden kann, der durch die 3 Punkte verläuft. **Gib** – wenn möglich – die Funktionsgleichung **an**.







Aufgabe 2: Steckbriefe von Funktionen

Der Begriff **„Steckbriefaufgaben“** beschreibt Aufgabentypen, bei denen Funktionsgleichungen von Funktionen bestimmt werden sollen, über die bestimmte Informationen vorliegen. Die Zahl der Informationen kann genau ausreichend sein (eindeutig bestimmter Steckbrief), es können zu wenig Informationen angegeben sein (unterbestimmter Steckbrief) oder auch zu viele (überbestimmter Steckbrief).

Es sind folgende sechs Steckbriefe von Funktionen angegeben. **Bestimmt** möglichst viele Funktionsgleichungen. **Notiert** eure Strategien.

1 **Gerade**: Eine Gerade verläuft durch die beiden Punkte A(7,5/5,5) und B(3,5/-4,5).

2 **Parabel**: Der Graf einer quadratischen Funktion hat bei A(0/2) einen Hochpunkt und verläuft durch den Punkt B(6/-1).

3 **Parabel durch 3 Punkte:** Der Graf einer quadratischen Funktion verläuft durch die Punkte A(0/2), B(6/-1) und C(1/4).

4 **Funktion vom Grad 3:** Der Graf einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat in T(0/0) einen Tiefpunkt und in H(4/4) einen Hochpunkt.

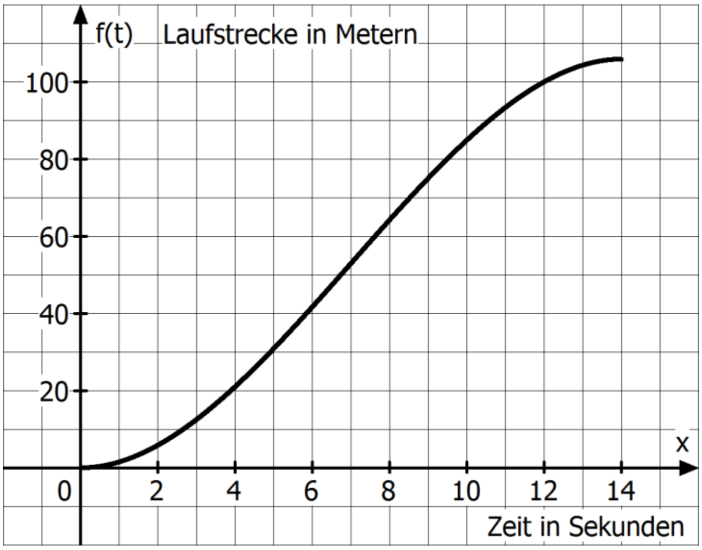
5 **Symmetrischer Graf:** Der Graf einer ganzrationalen Funktion vom Grad 4 ist symmetrisch zur y-Achse, hat in H(2/-2) einen Hochpunkt und in T(0/-3) einen Tiefpunkt.

6 **Wendepunkt im Ursprung:** Der Graf einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt und in T(1/-1) einen Tiefpunkt.

[26] Idee aus: Lambacher Schweizer, Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

Aufgabe 3: Modellfunktion für den 100-m-Sprint bestimmen

Der Weg-Zeit-Verlauf des 100 m Sprint eines Schülers ist in folgender Abbildung dargestellt.



Es handelt sich dabei um den Graph einer Funktion 3. Grades mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c und d sind reelle Zahlen) und den folgenden Eigenschaften:

(I) Der Graph verläuft durch (0/0)
(II) 0 ist lokale Minimumstelle.
(III) Der Graph ist bei x = 7 am steilsten.
(IV) Der Graph geht durch (12/100).

a) **Begründe**, dass man 4 Bedingungen zur Bestimmung von f(x) benötigt und **markiere** im Graphen die oben beschriebenen Eigenschaften (I) bis (IV).

b) **Stelle** mithilfe der Terme für f(x), f´(x) und f´´(x) vier Bedingungen **auf**, die man aus den Eigenschaften (I) bis (IV) erhält. **Fülle** dazu die folgenden Lücken **aus**.

(I) $f(0) = \square$ (II) $f'(\square) = \square$ (III) $f''(\square) = \square$ (IV) $f(\square) = 100$

c) **Leite** nun f(x) zweimal **ab**. **Fülle** dazu die Lücken **aus**.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + \square + \square$ $f''(x) = \square$

d) **Wende** die Bedingungen (I) bis (IV) auf die Funktionsgleichungen für f(x), f´(x) und f´´(x) **an**.

(I) $f(0) = \square \Leftrightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = \square \Leftrightarrow d = \square$

(II) $f'(\square) = \square \Leftrightarrow 3a \cdot \square + \square + \square = \square \Leftrightarrow c = \square$

(III) $f''(\square) = \square \Leftrightarrow 6a \cdot \square + 2b = \square \Leftrightarrow \square \cdot a + 2b = \square$

(IV) $f(\square) = 100 \Leftrightarrow a \cdot \square + b \cdot \square + c \cdot \square + d = 100 \underset{(I),(II)}{\Longleftrightarrow} \square \cdot a + \square \cdot b = 100$

e) **Löse** das LGS aus (III) und (IV)es händisch **und** mithilfe des GTR ($\boxed{\text{MENU}}$, $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{F1}}$, $\boxed{\text{F1}}$ (für 2 Unbekannte), dann: Koeffizienten von a und b sowie die Zahl rechts der Gleichung eingeben) und **gib** die Funktionsgleichung f(x) **an**.

f) **Beschreibe** die Lösungsstrategie in eigenen Worten.

Aufgabe 4: Relevante Informationen notieren

Im Folgenden sind Steckbriefe von 5 Funktionen und 6 Grafen angegeben. 5 Grafen entsprechen dabei den vorgegebenen Steckbriefen. 1 Graf bleibt übrig. Für Funktion 1 wurde bereits eine Zuordnung vorgenommen und es wurden die *relevanten Informationen* im Steckbrief markiert (*kursiv gedruckt*) und in ROT in den Grafen eingetragen.

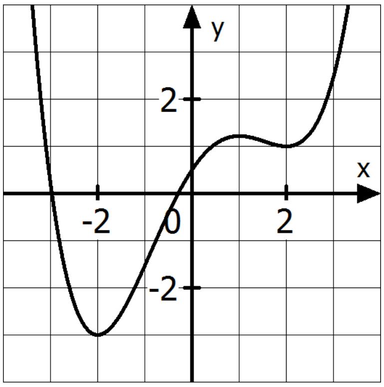
1 Eine Parabel 3. Ordnung[27] hat *in (2/2)* eine *Tangente parallel zur 2. Winkelhalbierenden* und *in (0/2)* ein *lokales Minimum*.

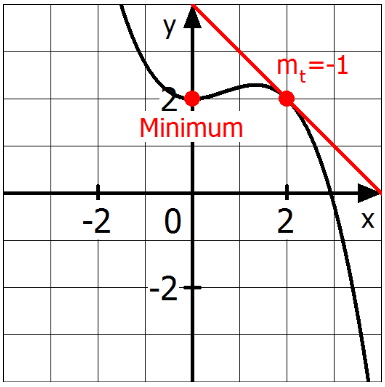
2 Eine zum Ursprung symmetrische Parabel 3. Ordnung hat in (2/4) eine Tangente parallel zur 1. Winkelhalbierenden.

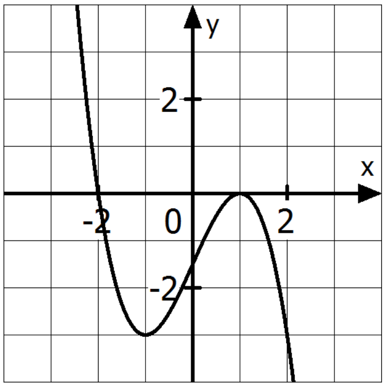
3 Eine zur y-Achse symmetrische Parabel 4. Ordnung geht durch (0/2) und hat in (1/0) die Steigung Null.

4 Eine zum Ursprung punktsymmetrische Parabel 5. Ordnung hat in (0/0) die Gerade t mit der Gleichung t(x) = 7x als Tangente und in (1/0) einen Wendepunkt.

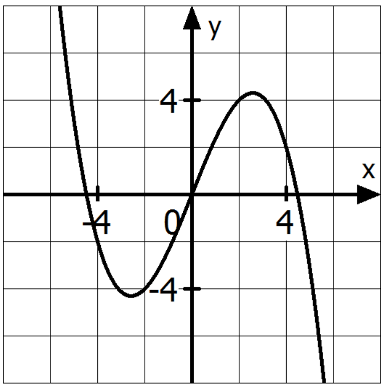
5 Eine Parabel 3. Ordnung berührt die x-Achse in (1/0) und hat in (0/-1,5) einen Wendepunkt.

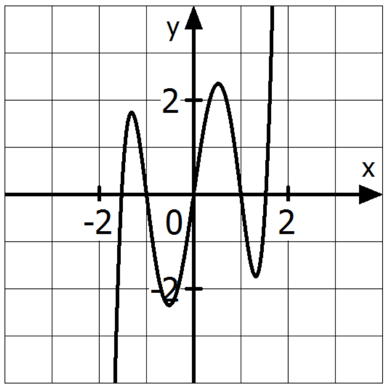


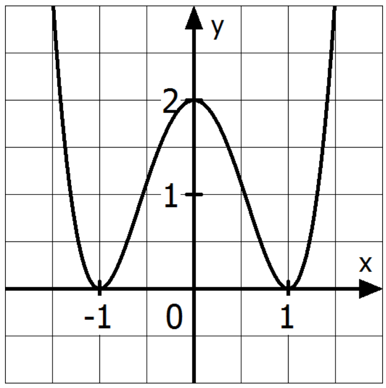




Funktion		**Funktion**	1	**Funktion**	







Funktion		**Funktion**		**Funktion**	

Ordne den Steckbriefen jeweils begründend einen Funktionsgrafen zu. Markiere in den Steckbriefen die relevanten Informationen und **trage** sie im jeweiligen Grafen mit ROT **ein**. **Erstelle** für den übrig gebliebenen Grafen einen geeigneten Steckbrief.

[27] Mit Parabeln der Ordnung n werden Grafen ganzrationaler Funktionen vom Grad n bezeichnet.

Aufgabe 5: Steckbriefaufgabe in 4 Schritten lösen

Ermittle für alle Steckbriefe aus den Aufgaben 2 und 4 die entsprechenden Funktionsgleichungen und **zeichne** anschließend mit dem GTR die Grafen. **Markiere** die relevanten Informationen im Steckbrief und im Grafen. Die Vorgehensweise wird nun für Funktion 1 aus Aufgabe 4 erläutert.

Eine Parabel 3. Ordnung hat in (2/2) eine Tangente parallel zur 2. Winkelhalbierenden und in (0/2) ein lokales Minimum.

Schritt 1: Welchen Grad hat die Funktion? Was sind die relevanten Informationen?

Die Funktion hat den Grad 3. Daher hat man den Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Für die Ableitungsfunktion gilt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Da der Grad der Funktion 3 ist, benötigen wir 4 relevante Informationen. Sie lauten:

(1) Der Graf geht durch (2/2).
(2) Der Graf hat in (2/2) eine zur 1. Winkelhalbierenden parallele Tangente.
(3) Der Graf geht durch (0/2).
(4) Der Graf hat in (0/2) ein lokales Minimum.

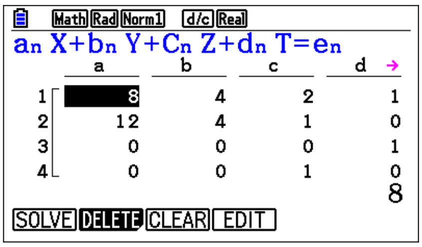
Schritt 2: Welche Gleichungen leiten sich aus den relevanten Informationen ab?

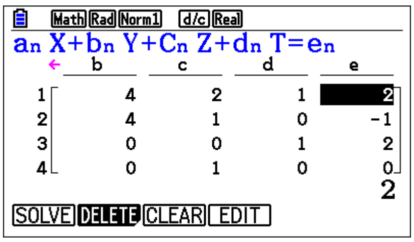
Durch die relevanten Informationen 1 bis 4 erhalten wir mithilfe von f und f´ geeignete Gleichungen, die zu Bestimmung der Parameter a, b, c und d notwendig sind:

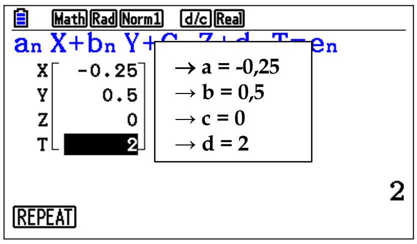
(1) $f(2) = 2 \Leftrightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 2 \Leftrightarrow \mathbf{8a + 4b + 2c + d = 2}$
(2) $f'(2) = -1 \Leftrightarrow 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = -1 \Leftrightarrow \mathbf{12a + 4b + c = -1}$
(3) $f(0) = 2 \Leftrightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 2 \Leftrightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + d = 2 \Leftrightarrow \mathbf{d = 2}$
(4) $f'(0) = 0 \Leftrightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 0 \Leftrightarrow \mathbf{c = 0}$

Schritt 3: Wie lautet die Lösung des linearen Gleichungssystems?

Mithilfe des GTR kann man in MENU A und F1 lineare Gleichungssysteme lösen. Dafür muss man zunächst die Anzahl der Unbekannten angeben (hier 4) und anschließend die Koeffizienten vor den Unbekannten a, b, c und d sowie die Zahl rechts von Gleichheitszeichen eingeben. Man erhält:

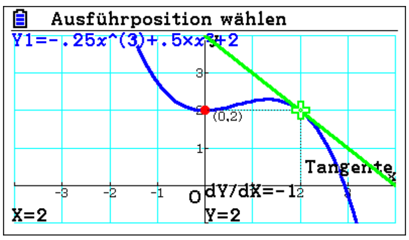






Schritt 4: Wie lautet die Funktionsgleichung? Kann das Ergebnis stimmen?

Durch Einsetzen der Lösungen in die allgemeine Funktionsgleichung erhält man: $f(x) = -0{,}25x^3 + 0{,}5x^2 + 2$ und für die Ableitung $f'(x) = -0{,}75x^2 + x$. Man rechnet nach, ob die Bedingungen erfüllt sind: $f(0) = 2$; $f(2) = 2$; $f'(0) = 0$; $f'(2) = -1$. Der dazugehörige Graf erfüllt den Steckbrief auch grafisch.



Aufgabe 6: Formulierungshilfen

Im Folgenden findest Du eine Liste Textformen und Bedingungsgleichungen. **Gib** die fehlenden Textformen bzw. Bedingungsgleichungen **an**, indem du sie in die zweite Tabelle einträgst. Für 6 Textformen bzw. 3 Bedingungsgleichungen sind die Eintragungen in der oberen Tabelle angegeben. Du musst sie nur noch entsprechend eintragen. **Erstelle** für jede Zeile eine Skizze, in der die relevanten Informationen ROT markiert sind.

$f(0) = -2$	G_f hat in (3/1) einen Sattelpunkt.	$f(1) = g(1) = 5 \wedge g'(1) \neq g'(1)$
$f(1) = 3 \wedge f'(1) = 0$	G_f hat bei x = 3 die Steigung 2.	$f(-1) = g(-1) = 1 \wedge f'(-1) = g'(-1) = -10$
$f(7) = 0$	G_f berührt die x-Achse bei x = 2.	$f(-1) = g(-1) = -4 \wedge f'(-1) = 3 \wedge f''(-1) = 0$

Textform	**Bedingungsgleichung(en)**
(2/3) liegt auf dem Graphen von f.	
Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.	
	$f(x) = -f(-x)$ oder bei GRF f(x) hat nur ungerade Potenzen von x.
	$f'(3) = 2$
Bei (1/3) liegt eine horizontale Tangente.	
	$f(2) = 1 \wedge f'(2) = 0$
	$f(0) = 3 \wedge f''(0) = 0$
G_f schneidet G_g mit $g(x) = 2x^2 + 3$ in (1/y).	
Der Graph von f schneidet die x-Achse bei x = 7.	
Der Graph schneidet die y-Achse bei y = -2.	
G_f hat in (-1/y) die Tangente g mit $g(x) = -2x + 2$.	
	$f(3) = 1 \wedge f'(3) = 0 \wedge f''(3) = 0$
G_f hat in (-1/y) die Wendetangente $y = 3x - 1$.	
	$f(2) = 0 \wedge f'(2) = 0$
G_f berührt G_g mit $g(x) = 5x^2 - 4$ in (-1/y).	

Aufgabe 7: Der Besucherstrom – Steckbriefaufgabe im Sachkontext[28]

Ein Festzelt auf einem Jahrmarkt öffnet um 20:00 Uhr. Die Besucher werden am Eingang gezählt. Um 21 Uhr sind 40 Besucher im Festzelt. Der größte Besucherandrang besteht um 22 Uhr und beträgt 80 Besucher pro Stunde. Um Mitternacht sind die meisten Besucher im Zelt.

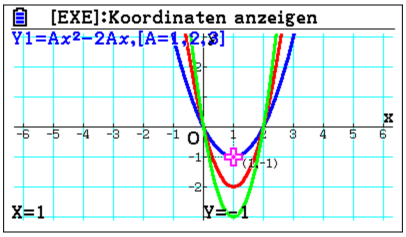
Bestimme eine Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, welche die Besucherzahl im Festzelt beschreibt. **Stelle** die Situation mit dem GTR in einem Koordinatensystem **dar**.

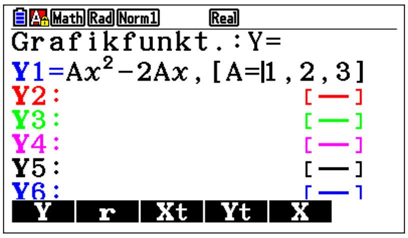
[Tipp: Wähle für die x-Achse als Einheit die Stunden nach Öffnung und für die y-Achse die Anzahl der Besucher in 100.]

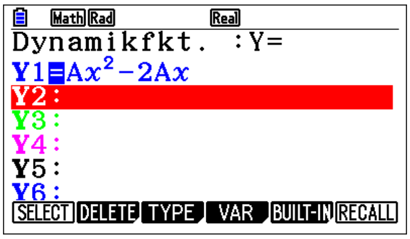
Infoblock: **Zeichnen von Funktionsscharen mit dem GTR**

In Aufgabe 6 führt uns Steckbrief 3 zu unendlich vielen Lösungsfunktionen. Diese Lösungsfunktionen hatten alle die Form $f_a(x) = ax^2 - 2ax$, wobei der **Parameter a** frei wählbar war. Durch Verändern des Parameters a erhält man eine jeweils andere Funktionsgleichung. Solchen Funktionen nennt man **Funktionsscharen** ganzrationaler Funktionen. Mithilfe des GTR können wir Grafen von Funktionsscharen zeichnen.

Im Folgenden sind die Grafen der Schar für a = 1, 2, 3 (Bild links) sowie eine Eingabemöglichkeit in MENU 5 (Bild Mitte) sowie MENU 6 (Bild rechts) angegeben:







Für die unterschiedlichen Darstellungsmöglichkeiten von Funktionsscharen und deren Anwendung bei der Lösung von Abituraufgaben sei auf den Anhang verwiesen.

Zeichne mit dem GTR die Funktionsschar aus dem obigen Beispiel in MENU 6 und in MENU 5 für a = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Aufgabe 8: Eindeutig bestimmte, über- und unterbestimmte Steckbriefe

Bestimme eine Funktionsgleichung für die die folgenden 3 Steckbriefe von Funktionen. **Fertige** vorab eine Skizze für einen möglichen Grafenverlauf an. **Beschreibe** Deine Beobachtungen.

1 Der Graph einer ganzrationalen Funktion vom Grad 3 ist punktsymmetrisch zum Ursprung, geht durch (1/2) und hat dort eine waagerechte Tangente.

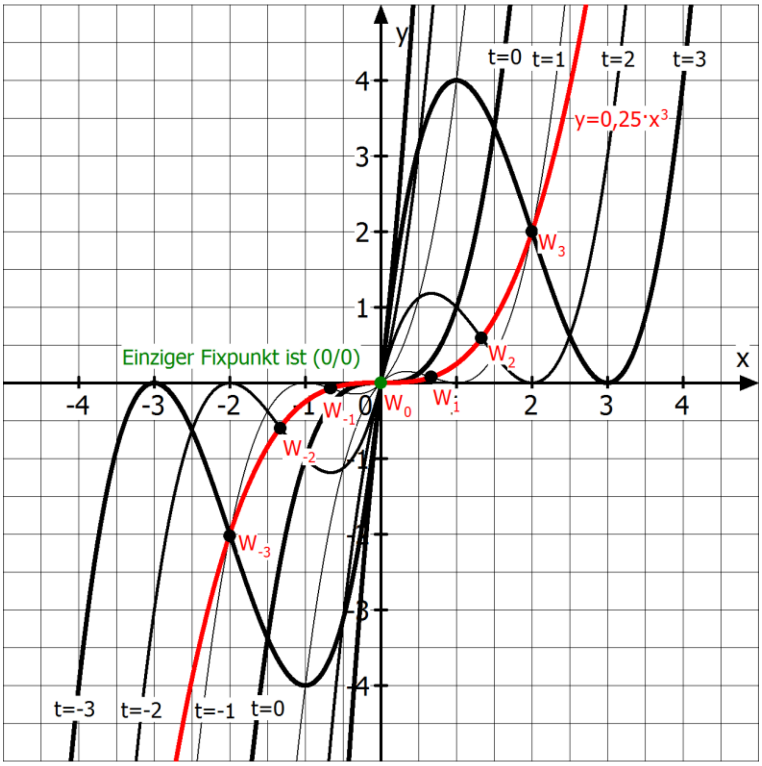
2 Der Graph einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades hat in (0/4) einen lokalen Hochpunkt und schneidet die die x-Achse bei x = 2 und geht durch (1/3).

3 Für eine ganzrationale Funktion 2. Grades gilt: f(0) = f(2) = 0 und f´(1) = 0.

[28] Fokus Mathematik in der Q-Phase, Cornelsen-Verlag (2015)

Infoblock: Ortskurven charakteristische Punkte und Fixpunkte bei Funktionsscharen

Gegeben ist Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = x^3 - 2t \cdot x^2 + t^2 \cdot x$. Für die Parameter t = -2, -1, 0, 1, 2 werden die Grafen im Folgenden angeben. Gesucht ist die **Kurve (Ortslinie) der Wendepunkte** der Grafenschar (roter Graf in der Abbildung). Ferner wollen wir zeigen, dass der Punkt (0/0) der **einzige** Punkt (= **Fixpunkt**) ist, der auf allen Grafen der Schar liegt.



Bestimmung der Wendepunkte in Abhängigkeit von t: $f_t'(x) = 3x^2 - 4tx + t^2$; $f_t''(x) = 6x - 4t$ $f_t'''(x) = 6 > 0$. Also folgt: $f_t''(x) = 6x - 4t = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}t$ Wegen $f_t''\left(\frac{2}{3}t\right) = 0 \wedge f_t'''\left(\frac{2}{3}t\right) = 6 > 0$ $\wedge f_t\left(\frac{2}{3}t\right) = \frac{2}{27}t^3$ folgt, dass die Schar der Wendepunkte $W_t\left(\frac{2}{3}t/\frac{2}{27}t^3\right)$ ist.

Parameterdarstellung in Funktionsgleichung umwandeln: Setze nun $x = \frac{2}{3}t$ und $y = \frac{2}{27}t^3$. Funktionsgrafen können sich auch durch eine solche Parameterdarstellung beschreiben lassen. Um diese Form in eine Funktionsgleichung zu verwandeln, muss man den Parameter t eliminieren, so dass aus 2 Gleichungen mit den 3 Unbekannten x, y und t eine Gleichung mit den beiden Unbekannten x und y wird. Dafür formt man die erste Gleichung für x nach t um. Es folgt t = 1,5x. Setzt man dieses t in die Gleichung für y ein, erhält man: $y = 0{,}25 \cdot x^3$. Diese Gleichung beschreibt die Kurve, auf der alle Wendepunkte der Funktionenschar liegen.

(0/0) ist einziger Fixpunkt der Schar: Zu zeigen, dass (0/0) auf jeder Schar liegt ist klar. Allerdings könnte es weitere Fixpunkte geben. Zum Nachweis wählt man zwei beliebige unterschiedliche Funktionsgleichung mit den Parametern $t_1 \neq t_2$ uns setzt sie gleich:

$x^3 - 2t_1x^2 + {t_1}^2x = x^3 - 2t_2x^2 + {t_2}^2x \Leftrightarrow (2t_2 - 2t_1)x^2 + ({t_1}^2 - {t_2}^2)x = 0$

$\Leftrightarrow x\left(2(t_2 - t_1)x + ({t_1}^2 - {t_2}^2)\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2(t_2 - t_1)x + ({t_1}^2 - {t_2}^2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{({t_1}^2 - {t_2}^2)}{2(t_2 - t_1)} = \frac{(t_1 + t_2)(t_1 - t_2)}{2(t_1 - t_2)} = \frac{(t_1 + t_2)}{2}$ (Nenner $2(t_2 - t_1) \neq 0$ wegen $t_1 \neq t_2$).

Damit liegt der Punkt (0/0) auf allen Grafen der Schar und ein zweiter Schnittpunkt hängt von der Wahl der t_1 und t_2 ab, liegt damit nicht auf jeder Schar.

Erläutere die Rechnungen und **notiere** die Überlegungen im Heft.

Aufgabe 9: Unterbestimmte Steckbriefe und Funktionsscharen

Gegeben sei nun eine nach oben geöffnete Normalparabel, die die x-Achse bei x = 4 schneidet.

a) **Ermittle** eine Funktionsgleichung der Schar der Normalparabeln. [Zur Kontrolle und zum Weiterarbeiten: $f_a(x) = x^2 + ax - 4a - 16$].

b) **Skizziere** mit dem GTR wie im obigen Infoblock Parabeln für verschiedene Werte von a und **untersuche**, auf welcher Kurve die Schar der Tiefpunkte liegt. [Hinweis: Betrachte z. B. die Parabeln für a = -16, -12, -8, -4, 0, 4]

c) **Berechne** den Wert für a, für den f_a genau eine Nullstelle x = 4 besitzt. [Tipp: Diskriminante.]

d) **Bestimme** rechnerisch die Koordinaten des Tiefpunktes in Abhängigkeit von a, **ermittle** die Ortskurve der Tiefpunkte der Parabelschar und **überprüfe** Deine zeichnerische Lösung aus Aufgabenteil b). [Hinweis: Infoblock oben.]

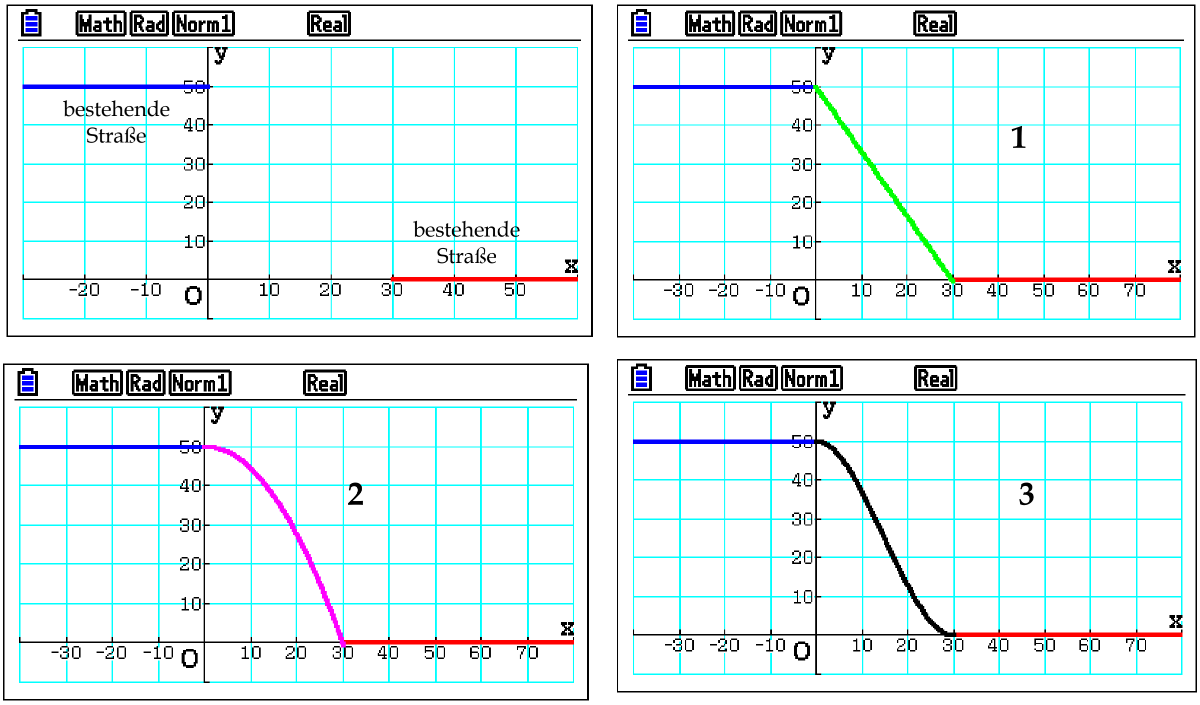
e) **Zeige** rechnerisch, dass der Punkte (4/0) der einzige Punkt ist, der auf allen Graphen der Funktionsschar liegt. Man nennt (4/0) auch einen **Fixpunkt** der Schar. [Hinweis: Infoblock oben.]

2.3 Trassierungsaufgaben

Der Begriff **Trassierung** beschreibt das Entwerfen und Festlegen der Linienführung eines Landverkehrsweges bzw. einer Trasse in Lage, Höhe und Querschnitt. Wir werden in diesem Kapitel Verfahren kennenlernen, um die **Trassierung von Straßen** zu **modellieren**. Dabei greifen wir auf Kenntnisse über ganzrationale Funktionen sowie Steckbriefaufgaben zurück.

Aufgabe 1: Verbindungsstraße

Zwei parallel verlaufende Straßen sollen miteinander verbunden werden. Die Situation ist unten mithilfe des GTR dargestellt worden (Angaben in Meter). Ziel ist es, eine Verbindungsstraße zwischen den bestehenden Straßen zu schaffen. Diese soll mit einer ganzrationalen Funktion modelliert werden. Drei mögliche Lösungen könnten die unten dargestellten Grafenstücke sein.



a) **Bestimme** für die drei Verbindungsstraßen die jeweilige Funktionsgleichung und **überprüfe** Deine Lösung mithilfe des GTR.

b) **Erörtere** Vor- und Nachteile der einzelnen Lösungen und **formuliere** Mindestbedingungen für eine geeignete Trassierung.

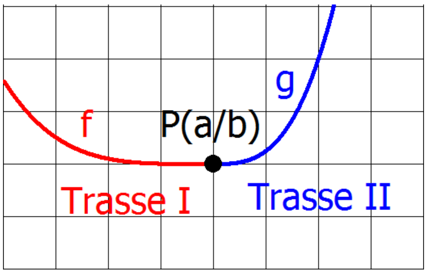
c) Ein Ingenieur ist mit allen drei Lösungen unzufrieden. Er moniert, dass bei allen drei Übergängen ein zu hohes Risiko bestehe, falls das Auto nicht rechtzeitig vor den Übergängen die Geschwindigkeit reduziert. Er fordert daher, dass bei beiden Übergangspunkten (0/50) und (30/0) Wendepunkte vorliegen sollen.

   (1) **Begründe** die Forderung des Ingenieurs und **leite daraus** den Mindestgrad der GRF ab.

   (2) **Ermittle** eine Modellfunktion, die den Ingenieur zufriedenstellt. **Zeichne** sie mit dem GTR. **Zeichne** auch die Grafen der Ableitung und **beschreibe** deine Beobachtungen.

Aufgabe 2: Sprung-, knick- und krümmungssprungfrei[29]

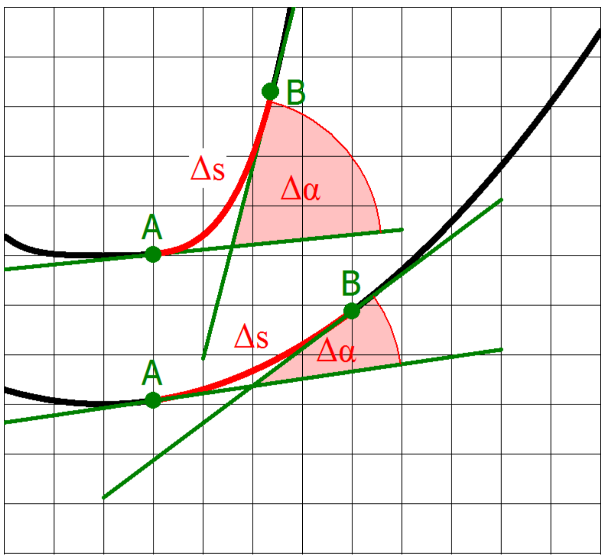
Beim Übergang von einer Trasse I in eine zweite Trasse II ist der Übergangspunkt P von zentraler Bedeutung. Aus nachvollziehbaren Gründen sollte sich Stück II in A lückenlos an Stück I anschließen. Man nennt einen solchen Übergang dann **sprungfrei** (bzw. **stetig)**.



Zusätzlich fordert man, dass sich im Punkt P kein Steigungssprung ergeben soll, damit das Lenkrad nicht plötzlich „herumgerissen" werden muss. Die beiden sich treffenden Kurven sollen also im Übergangspunkt P die gleiche Steigung besitzen. Übergänge, die im Übergangspunkt die gleiche Steigung haben, nennt man **knickfrei** (oder **glatt** bzw. **differenzierbar**).

Schließlich verlangt man noch, dass sich im Übergangspunkt P auch das Krümmungsverhalten nicht sprunghaft ändert. Übergänge, die im Übergangspunkt auch in der zweiten Ableitung übereinstimmen, nennt man **krümmungssprungfrei** (**krümmungsruckfrei** bzw. **zweimal differenzierbar).**

Um einen krümmungssprungfreien Übergang besser zu verstehen, muss geklärt werden, was man unter der Krümmung versteht. Um ein Maß für die **mittlere Krümmung Δκ**[30] zu bekommen, betrachtet man die Richtungsänderung Δα (als Differenz zweier Steigungswinkel) im Verhältnis zur Länge Δs des Kurvenstücks, auf der sich die Richtung ändert (vgl. folgende Abbildung). Wird Δs nun unendlich klein, erhält man als Grenzwert $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ **die lokale Krümmung**. Kurz gefasst: **Die Krümmung gibt das Ausmaß der Richtungsänderung auf einer bestimmten Strecke an.**



Definition der Krümmung:

Mittlere Krümmung $\Delta\kappa = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$

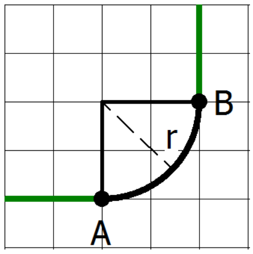
Lokale Krümmung $\kappa = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$

Oben ist die mittlere Krümmung Δk stärker, da bei etwa gleicher Strecke Δs die größere Richtungsänderung Δα besteht.

[29] Idee und Anregungen von Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf unter http://www.langemathe-nacht.de/autobahnkreuze/LMN%202012%20-%20Modul%20Autobahnen.pdf (29.7.2016) sowie von G. Roolfs unter http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/jahrgang112pdf/Strassenbau.pdf (29.7.2016)

[30] Es handelt sich um den griechischen Buchstaben **κ** (**„**kappa"), der an Krümmung erinnern soll.

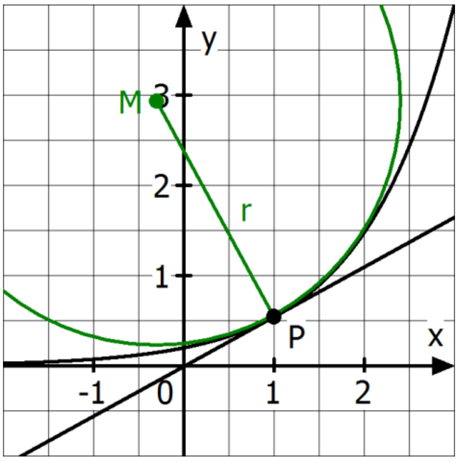
Beispiel: Übergang von einer Strecke in einen Viertelkreis



Eine gerade Strecke hat offenbar die Krümmung Null. Ein Kreis besitzt eine konstante Krümmung, da sich die Richtung gleichmäßig ändert. Daher ist der Übergang A von einer geraden Strecke in eine viertelkreisförmige Kurve nicht krümmungssprungfrei. Dies spürt man als Autofahrer, wenn im Übergangspunkt A eine plötzliche auftretende Zentrifugalbeschleunigung den eigenen Körper in den Gurt drückt. Gleiches gilt in umgekehrter Reihenfolge im Übergangspunkt B.

a) **Skizziere** jeweils ein Beispiel für einen nicht sprungfreien, einen sprungfreien aber nicht knickfreien, einen sprung- und knickfreien aber nicht krümmungsruckfreien sowie einen krümmungsruckfreien Übergang dar.

b) **Begründe** mit der obigen Definition, warum die lokale Krümmung einer Geraden überall Null ist und beim Durchlaufen des Viertelkreises mit dem Radius r gegen den Uhrzeigersinn $\frac{1}{r}$ beträgt.



Die obige Definition zur Krümmung ist zwar geometrisch sehr anschaulich, als Rechenwerkzeug aber eher ungeeignet. Dass die zweite Ableitung kein Maß für die Krümmung sein kann wird klar, wenn man beispielsweise eine Normalparabel mit $f(x) = x^2$ betrachtet. Die zweite Ableitung beträgt hier $f''(x) = 2$. Dies hieße, dass die Normalparabel überall die gleiche Krümmung hätte.

Um eine Recheninstrumentarium zu bekommen, versucht man einen Grafen einer Funktion f an jeder Stelle durch einen Kreis k mit der Krümmung $\frac{1}{r}$ (vgl. Aufgabe b)) anzunähern. Dabei soll an jeder Stelle a gelten: $k(a) = f(a) \wedge k'(a) = f'(a) \wedge k''(a) = f''(a)$. Im Beispiel rechts wurde der Graf von f sowie der dazugehörige Krümmungskreis an der Stelle a = 1 dargestellt. Dieser Ansatz führt mit ein wenig Rechenaufwand[31] zu einer Formel für den **Krümmungsradius r** und als Kehrwert für die **Krümmung κ**:

$$\mathbf{r(a)} = \frac{\left(1+[f'(a)]^2\right)^{1,5}}{f''(a)} \text{ und } \boldsymbol{\kappa}\mathbf{(a)} = \frac{f''(a)}{(1+[f'(a)]^2)^{1,5}}$$

c) **Bestimme** die Krümmung κ(a), falls a eine Extremstelle bzw. eine Wendestelle ist. **Ermittle** das Vorzeichen der Krümmung, falls der Graf von f rechts- bzw. linksgekrümmt ist.

Merke:

(1) Zwei Graphen von Funktionen f und g heißen im Übergangspunkt P(a/b) …

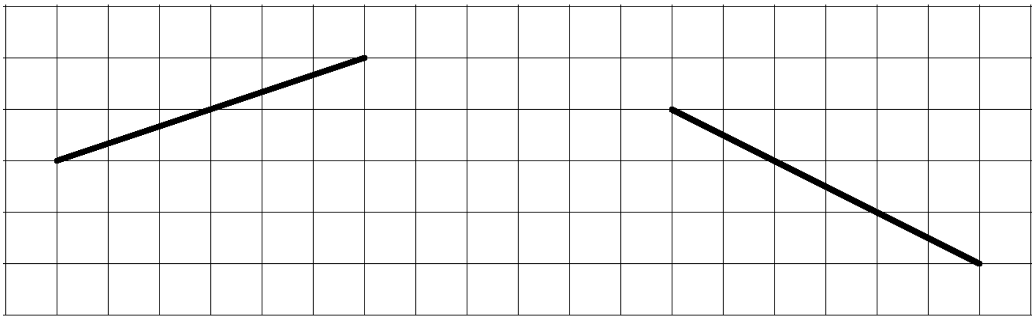
- **sprungfrei**, falls f(a) = g(a).
- **knickfrei**, falls f´(a) = g´(a).
- **krümmungsruckfrei**, falls f´´(a) = g´´(a).

(2) Die **Krümmung** ist ein Maß für die Richtungsänderung pro zurückgelegter Strecke. Geraden haben die Krümmung Null, Kreise mit Radius r eine konstante Krümmung $\frac{1}{r}$. In Wendepunkten ist die Krümmung immer Null, an Extremstellen entspricht sie dem Wert der zweiten Ableitung an dieser Stelle.

[31] Eine Herleitung findet man z. B. von G. Roolfs unter http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/AnalysisTeil4pdf/Kruemmungskreis.pdf (28.7.2016)

Aufgabe 3: Straßenkuppe[32]

Beim Bau von Straßen gilt es Straßenkuppen oder –senken möglichst holperfrei zu überwinden. Dazu können ganzrationale Funktionen verwendet werden. In der nachfolgenden Abbildung sind die beiden Straßenstücke angegeben, die es geeignet zu verbinden gilt [1 Kästchen entspricht 1 LE].



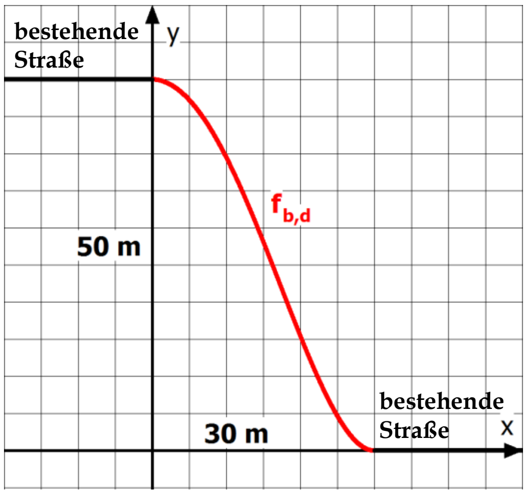
a) **Übertrage** die Situation in ein geeignetes Koordinatensystem und **ermittle** eine Funktion möglichst niedrigen Grades, deren Graph zum Ausrunden der beiden Straßenstücke vor und nach der Kuppe geeignet ist, so dass die Übergänge **sprung- und knickfrei** sind.

b) **Zeige**, dass die Übergänge **nicht krümmungsruckfrei** sind und **gib an**, welchen Grad die Modellfunktion von zwei **sprung-, knick- und krümmungsruckfreien** Übergangen haben müsste. **Ermittle** eine ganzrationale Funktion niedrigsten Grades, dessen Graf **sprung-, knick- und krümmungsruckfreien** Übergange garantiert.

c) **Stelle** die Situationen in a) und b) mithilfe des GTR **dar**.

Aufgabe 4: Trassierung der Verbindungsstraße mit einer Funktionsschar[33]

Zwei parallel verlaufende Straßen sollen wie in Aufgabe 1 miteinander verbunden werden. Die Funktion $f_{b,d}$ mit der Gleichung $f_{b,d}(x) = \frac{1}{b} \cdot (d - x^2)^2$ $(b,\ d > 0)$ soll die neue Verbindungsstraße beschreiben.



a) **Bestimme** die Parameter b und c und **gib** den Grad der Funktionenschar $f_{b,d}$ **an**.

b) **Berechne** $f_{b,d}{}'(x)$ und $f_{b,d}{}''(x)$ und **zeige**, dass die Verbindungsstraße **knick- aber nicht krümmungssprungfrei** in die bestehenden Straßen einmündet.

c) **Bestimme** den Wendepunkt der Verbindungsstraße für b = 16200 und d = 900 [für beliebige b und d].

d) **Stelle** die Situation mit dem GTR dar für unterschiedliche Werte für b und d in der Nähe der Werte b = 16200 und d = 900 und **untersuche**, welchen Parameter man verändern müsste, wenn die beiden parallelen Straßen statt 50 m einen anderen Abstand hätten, aber der horizontale Abstand der beiden Straßen unverändert bei 30 m bliebe.

---

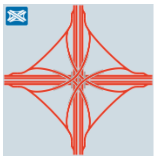
[32] Idee aus Fokus Mathematik für die Q-Phase, Cornelsen-Verlag (2015)
[33] Idee aus Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2012).

Aufgabe 5: Trassierung von Autobahnkreuzen[34]

Die folgenden Abbildungen zeigen vier verschiedene Bauformen von Autobahnkreuzen in vereinfachter typisierter Darstellung[35].


Turbine

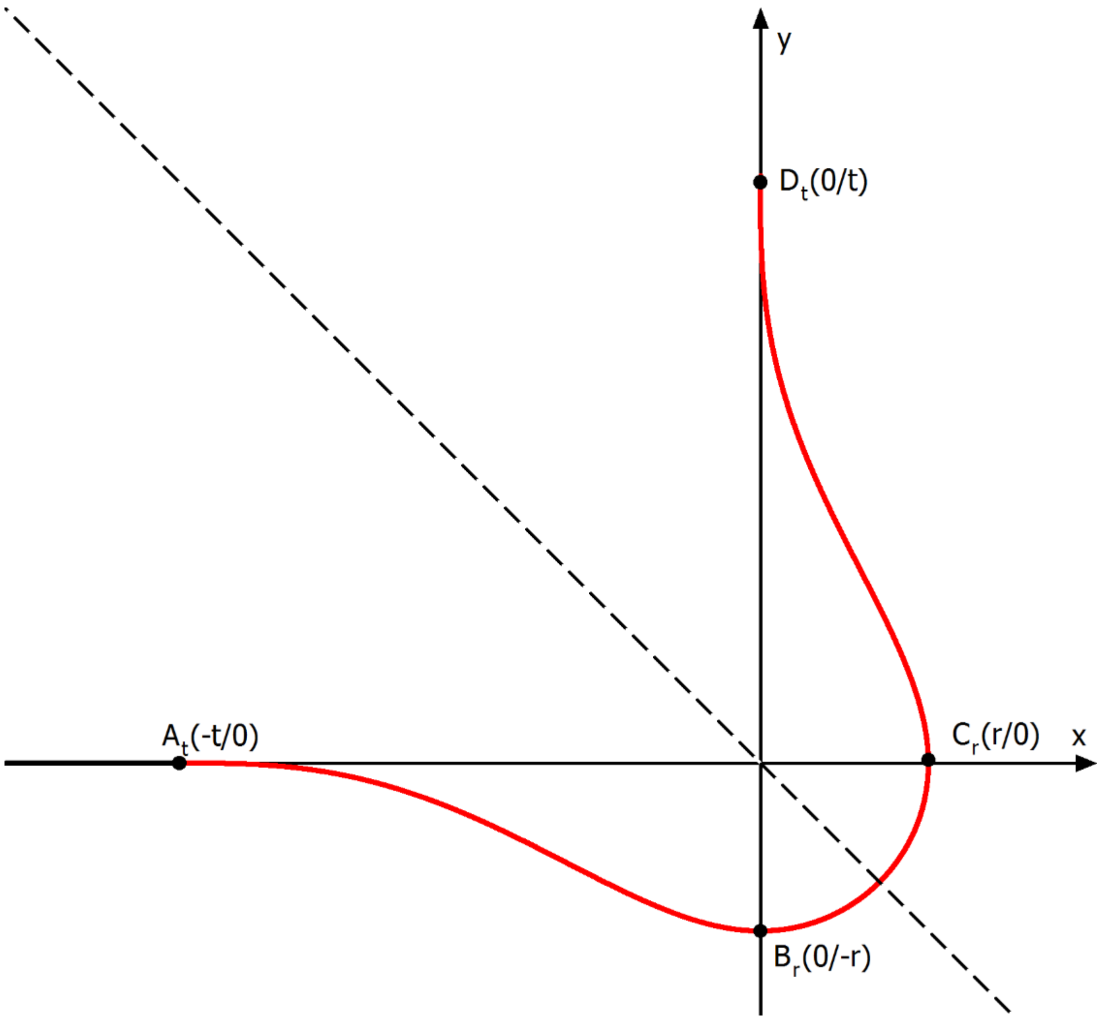

Kleeblatt


Malteser


Windmühle

a) **Diskutiere** innerhalb Deiner Tischgruppe die vier dargestellten Varianten hinsichtlich der Kriterien „Platzbedarf“, „mögliche Geschwindigkeiten beim Autobahnwechsel“ und „Kosten durch aufwändige oder viele Brücken". **Nenne** Beispiele für Dir bekannte Autobahnkreuze.

Die folgende Darstellung beschreibt die Linksabbiegung in einem Überwurf-Kreuz. Vereinfachend nehmen wir an, dass das Kreuz rechtwinklig ist und die gesamte Trasse in drei Teile zerlegt werden kann, wobei der mittlere Teil ein Viertelkreis mit Radius r ist.



[34] Idee von Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf unter http://www.langemathenacht.de/autobahnkreuze/LMN%202012%20-%20Modul%20Autobahnen.pdf (29.7.2016).
[35] https://de.wikipedia.org/wiki/Autobahnkreuz (29.7.2016)

Ziel: Gesucht ist eine ganzrationale Funktion, die Trassenstück I beschreibt. Folgende Modellannahmen wollen wir machen:

(1) In den Punkten A und B ist die gesuchte Kurve mit der Fahrbahn der Ausgangs-Autobahn (x-Achse) und dem Kreisbogen II (Trassenstück II) verbunden.
(2) Der Übergangspunkt A ist knickfrei und krümmungssprungfrei.
(3) Beim Übergangspunkt B wird von einem knickfreien Übergang ausgegangen.

Wir nehmen zunächst an, dass r = 50 und t = 100 ist. Es gilt also: A(-100/0) und B(0/-50).

b) **Skizziere** die Situation in Deinem Heft und **markiere** die Bereiche, wo das Trassenstück I links- bzw. rechtsgekrümmt ist: **Begründe**, warum Trassenstück I durch eine ganzrationale Funktion mindestens vierten Grades beschrieben wird.

c) **Ermittle** eine ganzrationale Funktion f vierten Grades, welche die Modellannahmen (1) bis (3) erfüllt. [Kontrollergebnis: $f(x) = 1{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 + 4 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 + 0{,}03 \cdot x^2 - 50$ $(-50 \leq x \leq 0)$]

d) **Untersuche** die Funktion f für $-50 \leq x \leq 0$ auf ihr Krümmungsverhalten.

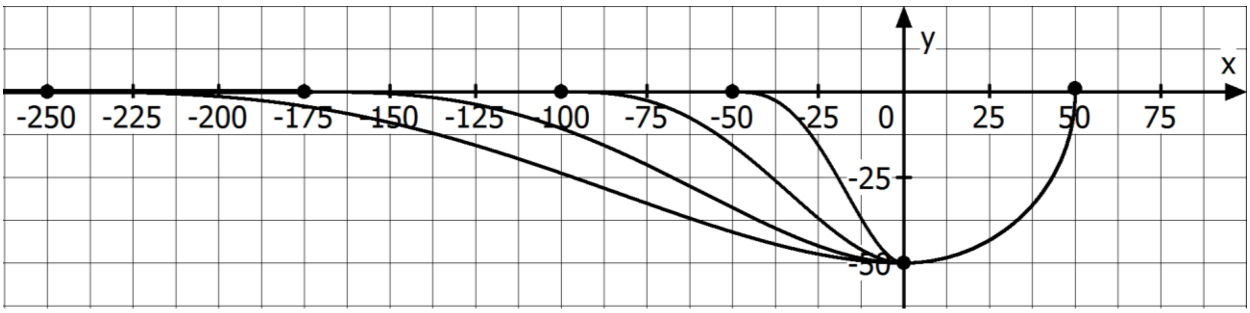
e) **Zeige**, dass der Übergang B nicht krümmungsruckfrei ist. [Tipp: Merksatz (2) in Aufgabe 2]

Gegeben sei eine Funktionsschar $f_{r,t}$ mit $f_{r,t}(x) = \frac{3r}{t^4} \cdot x^4 + \frac{8r}{t^3} \cdot x^3 + \frac{6r}{t^2} \cdot x^2 - r$ $(-t \leq x \leq 0, r, t \geq 0)$.

Definition: Eine Funktion $f_{r,t}$ mit $f_{r,t}(x) = \frac{3r}{t^4} \cdot x^4 + \frac{8r}{t^3} \cdot x^3 + \frac{6r}{t^2} \cdot x^2 - r$ $(-t \leq x \leq 0, r, t \geq 0)$ beschreibt in Abhängigkeit der beiden Parametern r und t eine **Schar von Funktionen** ganzrationaler Funktionen vierten Grades. Die Parameter r und t heißen **Scharparameter** der Funktionenschar und sind beliebig aber feste Zahlen, während die Zahl x als Variable ständig variieren darf.

f) **Weise nach**, dass die Funktionsschar $f_{r,t}$ die Bedingungen (1) bis (3) für die Übergangspunkte A(-t/0) und B(0/-r) erfüllt und somit Modellfunktion für die Trasse I ist.

g) In der folgenden Abbildung werden vier Grafen der Funktionsschar dargestellt.



Gib jeweils die Parameter r und t an und **entscheide** begründend mithilfe von Aufgabe 2, welche der vier Grafen zur Modellierung von Trassenstück I am besten geeignet ist.

h) **Untersuche** mit dem GTR für verschiedene Werte für r und t, wie bei vorgegebenen Kurvenradius r der Parameter t gewählt werden muss, damit auch der Übergangspunkt B_r krümmungsruckfrei ist.

i) **Ermittle** rechnerisch eine Bedingung für r und t, so dass der Übergangspunkt B_r krümmungsruckfrei ist. [Tipp: Merksatz (2) in Aufgabe 2]

Zur Erinnerung: Ein **krümmungsruckfreier Übergang** bedeutet anschaulich, dass es einen Kreis gibt, der sich an beide Kurvenstücke gleichermaßen „anschmiegt“. Dies ist in folgender Abbildung für die rote Kurve der Fall.

Zusatzaufgaben (1er-Aufgaben)

j) **Begründe**, dass sich der Viertelkreis im Kurventeil II durch die Funktion k_r mit der Funktionsgleichung $k_r(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ und $0 \leq x \leq r$ beschreiben lässt. [Tipp: Satz des Pythagoras]

k) **Leite** die obige Gleichung der Funktionsschar $f_{r,t}$ her, indem Du allgemein für die Übergangspunkte A(-t/0) und B(0/-r) fünf Bedingungen für eine ganzrationale Funktion vierten Grades aufstellst und dann das entstehende lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit von r und t mit der Gaußverfahren löst.[36]

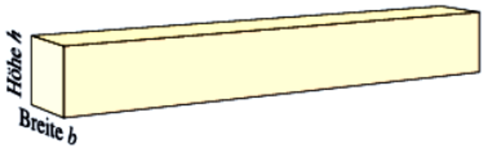
[36] Aufgabe kann von den Schülern erst gelöst werden, wenn das Gaußverfahren eingeführt wurde. Dies geschieht in der Regel im zweiten Halbjahr der Q1 im Rahmen der analytischen Geometrie.

2.4 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

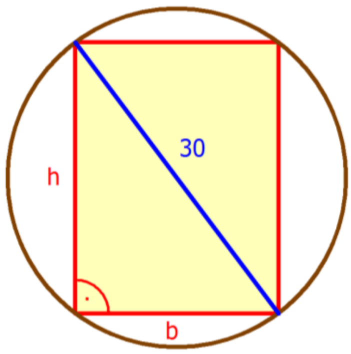
In diesem Kapitel wollen wir erneut Modellfunktionen finden, die uns helfen Optimierungsprobleme zu lösen. Dabei beschäftigen wir uns einerseits mit geometrischen Optimierungsaufgaben und Aufgaben zur Gewinnmaximierung. Solche Aufgaben werden oft mit dem Begriff **Extremwertaufgaben** umschrieben. Abschließend fassen wir das in die Vorhaben Gelernte bezüglich des Modellierens und der vier Stufen des Modellierungsprozesses (**Modellierungskreislauf**) zusammen.

Geometrische Optimierungsprobleme

Aufgabe 1: Zimmermannsregel und Tragfähigkeit eines Balkens[37]



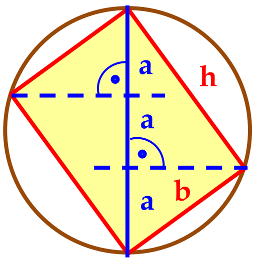
Ein Holzbalken, wie er zum Beispiel in einem Dachstuhl verwendet wird, soll eine möglichst hohe Tragfähigkeit aufweisen. Solche Balken sind meist nicht von quadratischem Querschnitt, sondern höher als breit. Das ist sinnvoll, denn überlege Dir z. B., wie Du ein Lineal halten würdest, wenn es sich nicht durchbiegen oder gar brechen soll. Die **Tragfähigkeit des Balkens** ist proportional zu seiner **Breite b** und zum **Quadrat seiner Höhe h**. Seine Tragfähigkeit kann deshalb durch den Term $\mathbf{T}(\mathbf{b},\mathbf{h}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}^2$ beschrieben werden.[38]



a) **Bestimme** die optimalen Maße eines Balkens, der aus Rundholz mit dem Durchmesser 30 cm geschnitten wird und eine möglichst hohe Tragfähigkeit aufweisen soll.

b) Aus Platzgründen soll aus dem Rundholz mit einem Durchmesser von 30 cm ein Balken ausgeschnitten werden, der nicht breiter als 14 cm ist. **Ermittle** die optimalen Maße für die neue Situation.

c) **Beurteile** aufgrund des errechneten Wertes die Qualität der Zimmermannsregel sowie der Faustregel.

Zimmermannsregel	**Faustregel**
Teile den Durchmesser eines kreisförmigen Querschnitts des Baumstammes in 3 gleiche Teile. Errichte in den Teilungspunkten jeweils das Lot. Damit erhältst du den Balkenquerschnitt. 	Breite : Höhe = 5 : 7

d) **Löse** die Aufgabe 1a mithilfe der Formel $\mathbf{T}(\mathbf{b},\mathbf{h}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}^2$, wobei $k > 0$ eine beliebige aber feste Proportionalitätskonstante ist. Der Baumstamm hat dabei einen Durchmesser von D cm.

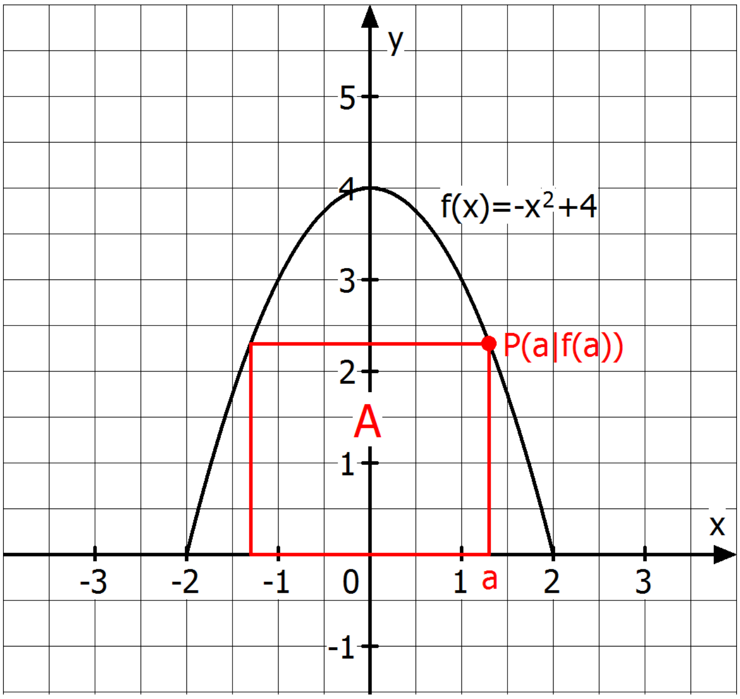
[37] Aufgabeidee aus Fokus Mathematik in der Q-Phase, Cornelsen-Verlag (2015).

[38] Eigentlich müsste der Term $T(b,h)$ wegen der Proportionalität zu b und h^2 mit einem Proportionalitätsfaktor k versehen werden, so dass $T(b,h) = k \cdot b \cdot h^2$. Warum kann aber zur Lösung der Aufgabe $k = 1$ gewählt werden?

Aufgabe 2: Extremwertaufgaben im Koordinatensystem

a) In einem Koordinatensystem für $x \in [0; 2]$ ist ein Parabelbogen mit der Gleichung $\mathbf{f(x) = 4 - x^2}$ gegeben. Zu jeder Stelle a mit $0 < a < 2$ gibt es ein Rechteck A, von dem eine Seite auf der x-Achse liegt und sich zwei Ecken auf dem Parabelbogen befinden (vgl. Abbildung).

Bestimme die Seitenlängen des Rechtecks mit dem größten Flächeninhalt [größtem Umfang].



a) **Löse** folgende „Koordinatensystem-Extremwertaufgaben“:

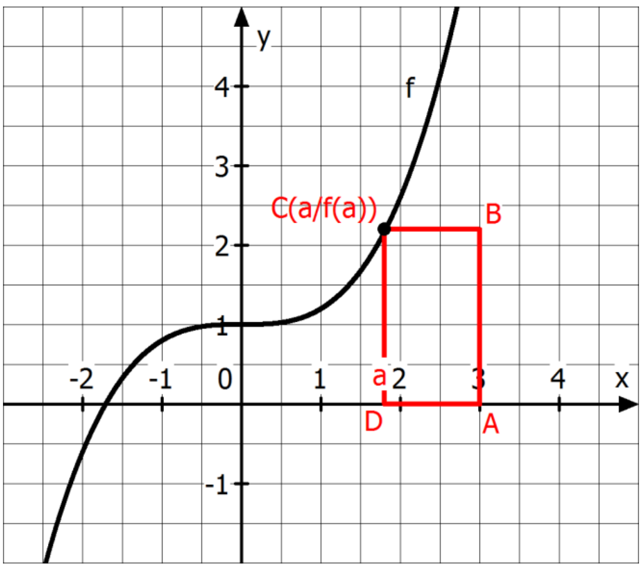
(1) Ein möglichst großes Rechteck soll bestimmt werden, das in einem Koordinatensystem nach unten von der x–Achse, nach links von der y–Achse und nach oben und rechts vom Grafen der Funktion f mit $\mathbf{f(x) = 9 - x^2}$ begrenzt wird.

Bestimme die Breite und die Höhe des Rechtecks. **Mache** vorher eine Skizze.

(2) **Ermittle** den kleinste Abstand vom Punkt (3/0) zur Parabel $\mathbf{f(x) = x^2}$. [Tipp: Betrachte als Zielfunktion das Quadrat der Längenfunktion.]

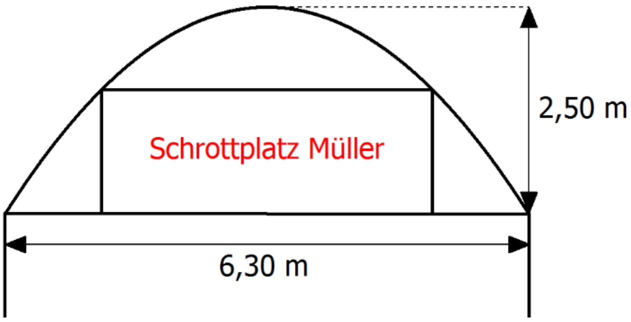
(3) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $\mathbf{f(x) = 1 + \frac{1}{5}x^3}$. Die vier Punkte A(3/0), B(3/f(a)), C(a/f(a)) D(a/0) legen für die Zahl a mit $0 < a < 3$ ein Rechteck fest. Die Situation ist in der Abbildung rechts dargestellt.

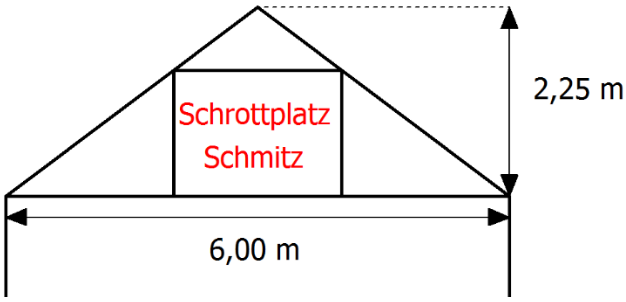
Zeige, dass für den Flächeninhalt des Rechtecks $A(a) = -\frac{1}{5}a^4 + \frac{3}{5}a^3 - a + 3$ gilt und **untersuche**, für welches a der Flächeninhalt maximal wird.



Aufgabe 3: Werbeschilder[39]

Herr Müller möchte im parabelförmigen Teil der Durchfahrt zu seinem Schrottplatz ein möglichst großes rechteckiges Werbeschild anbringen. Auch seine Konkurrenzfirma Schmitz möchte ein möglichst großes rechteckiges Schild montieren. Allerdings hat der entsprechende Teil die Form eines gleichschenkligen Dreiecks. Die beiden folgenden Abbildungen verdeutlichen die Situation.





Bestimme die Maße der beiden „optimalen“ Werbeschilder.

Aufgabe 4: Die optimale Dose – Lösungsstrategie bei Extremwertaufgaben

Eine Fertigsuppenfirma verkauft ihre Produkte in Konservendosen mit 750 ml Inhalt. Um die Herstellungskosten minimal zu halten, muss für die Dose möglichst wenig Material verbraucht werden.

a) **Bestimme** den Durchmesser und die Höhe dieser „optimalen“ Dose.

b) Eine Lösung der gestellten Aufgabe kann in einer PPP eigesehen werden. Die PPP findest du unter www.maspole.de. **Übertrage** die Lösungsstrategie in Dein Heft und **bearbeite** mithilfe des dargestellten Rasters die nachfolgenden „Volumen-Oberfläche-Aufgaben“.

(1) Ein Erfrischungsgetränk soll in zylindrischen Dosen aus Weißblech angeboten werden. Das Volumen einer Dose soll 0,33 l betragen. Aus Kostengründen soll der Materialbedarf pro Dose durch günstige Formgebung möglichst niedrig gehalten werden. **Berechne** den Radius und Höhe einer solchen „optimalen“ Dose.

(2) Eine Firma will für Hobbygärtner zylinderförmige Regentonnen herstellen, die bei minimalem Materialbedarf maximales Volumen besitzen. **Bestimme** die Abmessungen, wenn 2 m² Material je Regentonne zur Verfügung stehen. Löse die Aufgabe allgemein für a m² Material.

(3) Gegeben ist ein Kegel, dessen Grundfläche den Radius 3 cm hat, und der 10 cm hoch ist. In diesen Kegel soll ein Zylinder einbeschrieben werden, der das maximale Volumen hat. **Bestimme** die Höhe des Zylinders. [Tipp: Strahlensatz.]

c) **1er-Aufgabe:** Gegeben ist ein Kegel A, dessen Grundfläche den Radius 4 cm hat, und der 10 cm hoch ist. In diesen Kegel A soll ein Kegel B einbeschrieben werden, der mit seiner Spitze auf der Grundfläche des Kegels A steht. **Ermittle** die Höhe des Kegels B, wenn er (a) das maximale Volumen und (b) die minimale Oberfläche hat.

---

[39] Aufgabeidee aus Fokus Mathematik in der Q-Phase, Cornelsen-Verlag (2015).

Aufgaben zur Gewinnmaximierung

Aufgabe 5: Kalkulation am Bratwurststand [40]

Die Bratwürste von Herrn Heinze sind beliebt: Im Durchschnitt verkauft er pro Tag 250 Bratwürste im Brötchen für 1,80 € pro Stück. Aber die Kosten machen ihm Sorgen, sie steigen und steigen. Rechnet er die festen Kosten für den Strom und die Standmiete auf einen Tag um, sind es nun schon 90 € pro Tag. Und die Ausgaben pro Bratwurst für Wurst, Brötchen, Senf Currysauce und Serviette betragen inzwischen 1,20 €. Herr Heinze wird nicht mehr um eine Preiserhöhung herumkommen und überlegt sich deshalb: „Erhöhe ich den Preis um 10 Cent, verkaufe ich pro Tag ein Brötchen weniger, erhöhe ich um 20 Cent, sind es schon vier Bratwürste weniger, bei 30 Cent sogar neun, bei 40 Cent 16 Bratwürste usw."

a) **Begründe**, dass es sich bei Herrn Heinzes Annahme eines nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Preiserhöhung und Absatzrückgang vernünftig ist.

b) **Stelle** für die Kostenfunktion K und die Gewinnfunktion G die Funktionsterme K(n) und G(n) auf, wobei n die Anzahl der Erhöhungen des Preises jeweils um 0,10 € ist. **Untersuche**, bei welchem Verkaufspreis der Gewinn maximal wird.

Aufgabe 6: Kaffeerösterei [41]

Eine Kaffeerösterei setzt bei einem Verkaufspreis von 10 € pro Kilogramm erfahrungsgemäß etwa 10000 kg pro Monat ab. Aufgrund seiner langjährigen Erfahrung vermutet der Geschäftsführer, dass eine Verkaufspreisreduzierung um jeweils 25 Cent zu einem Mehrumsatz von 2000 kg pro Monat führen würde. Die Selbstkosten betragen nahezu unabhängig vom Absatz 5,50 € pro Kilogramm.

a) **Bestimme** den Gewinn für die Verkaufspreise von 10 €, 9,50 € und 6 €.

b) **Stelle** allgemein die Gewinnfunktion auf und **bestimme** den für die Firma besten Preis.

c) **Diskutiert** anschließend den oben beschriebenen Ansatz und **beschreibt** einen realistischeren Zusammenhang von Preissenkung und Gewinn.

Aufgabe 7: Kosten – Einnahmen - Gewinn [42]

Die Gesamtkosten für die Herstellung von x tausend Einheiten einer Ware lassen sich für $0 \le x \le 9$ berechnen mit $K(x) = 2x^3 - 16x^2 + 48x + 100$. Der Erlös E für den Verkauf von x tausend Einheiten dieser Ware beträgt $E(x) = 144x - 16x^3$.

a) **Untersuche**, bei welcher Produktionsmenge die durchschnittlichen Herstellungskosten $\frac{K(x)}{x}$ am geringsten sind.

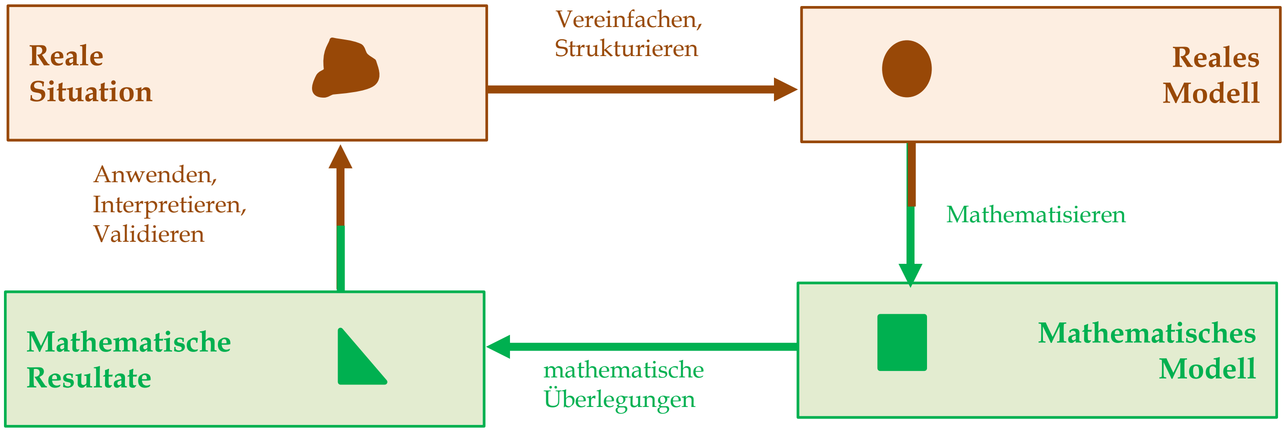
b) **Bestimme** die Produktionsmenge, die den größten G mit G(x) = E(x) – K(x) garantiert.

[40] Aufgabeidee aus Fokus Mathematik in der Q-Phase, Cornelsen-Verlag (2015).
[41] Aufgabeidee aus Fokus Mathematik in der Q-Phase, Cornelsen-Verlag (2015).
[42] Aufgabeidee aus Fokus Mathematik in der Q-Phase, Cornelsen-Verlag (2015).

Modellierungskreislauf

Aufgabe 8: Was haben wir gelernt?[43]

Die Idee des mathematischen Modellierens von Sachproblemen kann in dem abgebildeten Modellierungsprozess, der eventuell mehrfach durchlaufen werden muss, schematisch dargestellt werden. Dabei wird das mathematische Modell durch eine Funktion beschrieben, die dem Sachproblem am besten entspricht.



Das Ziel des Modellierungsprozesses ist das Anwenden, Interpretieren und Validieren der mathematischen Lösungen in der Praxis. Dies kann zur Bestätigung der Modellannahmen, zu Aussagen über Realsituationen oder zu sinnvollen Prognosen führen oder diese auch widerlegen.

a) **Arbeitet** als Tischgruppe **heraus,** welche Aspekte ihr innerhalb des Modellierungskreislaufs in diesem Unterrichtsvorhaben kennengelernt habt. Gab es Bereiche, die besonders oft vorkamen bzw. Prozesse, die nur sehr selten oder gar nicht angesprochen wurden?

b) **Verdeutlicht** die vier Stufen des Modellierungskreislaufes mit einem selbst gewählten Beispiel, das ihr als Tischgruppe (PPP, Folie) vortragen sollt. Die Präsentation muss von der gesamten Gruppe gleichermaßen getragen werden.

[43] HENN, H.-W.: Mathematik und der Rest der Welt. In: mathematiklehren 113, 4-7 (2002).

2.5 Kontrollaufgaben

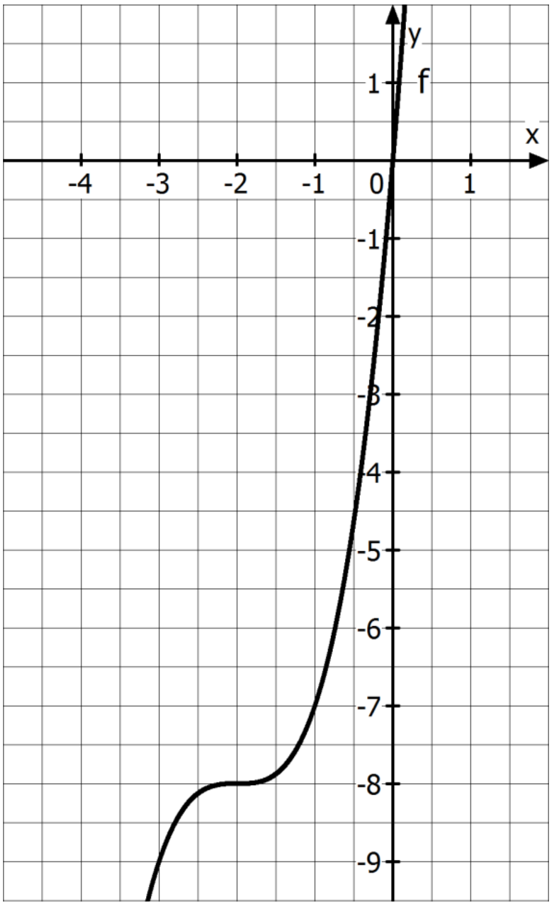
Kompetenzraster zu den Kontrollaufgaben

Ich kann …	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
Nullstellen einer GRF dritten Grades ohne GTR berechnen.	1a)				
die geometrische Bedeutung der ersten Ableitung angeben, eine Tangente einzeichnen und deren Gleichung zeichnerisch und rechnerisch ermitteln.	1b), 1c)				
einen Grafen einer GRF auf sein Krümmungsverhalten untersuchen.	1d)				
begründend entscheiden, ob Aussagen bezüglich des Krümmungsverhaltens einer Funktion zutreffend sind.	2				
einen Grafen einer Funktion skizzieren, wenn bestimmte Eigenschaften durch Funktionswerte der Funktion, der Ableitungsfunktion und der Funktion der zweiten Ableitung vorgegeben sind.	3a)				
auf der Basis eines Grafen relevante Informationen für deren Bestimmung angeben und damit die Funktionsgleichung bestimmen.	3b)				
eindeutig bestimmte Steckbriefaufgaben zu GRF lösen.	4a), 4b)				
eine unterbestimmte Steckbriefaufgabe einer GRF lösen und die Gleichung der Funktionsschar angeben.	4c)				
eine Parabelschar mittels Diskriminante auf Nullstellen untersuchen.	4c)				
Geradengleichungen anhand eines Schaubildes bestimmen.	5a)				
erläutern, was ein sprung- und knickfreien Übergang bedeutet.	5b)				
einen Straßenstück mit zwei knick- und sprungfreien Übergängen mittels einer GRF dritten Grades modellieren und die Gleichung der Modellfunktion berechnen.	5c)				
rechnerisch nachweisen, dass das Straßenstück nicht durch eine Funktion zweiten Grades modelliert werden kann.	5d)				
rechnerisch zeigen, dass Übergänge nicht krümmungssprungfrei sind und den Grad für eine mögliche Modellfunktion mit krümmungssprungfreien Übergängen begründend angeben.	5e)				
Extremwertaufgaben mit einer geometrischen Aufgabenstellung unter Verwendung gebrochen rationaler Zielfunktionen und der 5-Schritt-Vorgehensweise (Zielfunktion, Definitionsbereich, Nebenbedingung, Extremwertbestimmung, Antwort) lösen.	6a), 6b)				
eine Extremwertaufgabe mit einer geometrischen Problemstellung unter Verwendung einer ganzrationalen Zielfunktion und der 5-Schritt-Vorgehensweise lösen.	6c)				
eine Extremwertaufgabe unter Einbeziehung der Koordinatengeometrie und ganzrationaler Modellfunktionen lösen.	6d)				
eine Extremwertaufgabe zur Gewinnmaximierung unter Verwendung einer ganzrationalen Zielfunktion und der 5-Schritt-Vorgehensweise lösen.	7a)				
durch Transformation der Variablen eine Gewinnfunktion in Abhängigkeit von der Stückzahl statt der Preissenkung herleiten.	7b)				

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

Aufgabe 1: Kurvenuntersuchung

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$. Ein Ausschnitt des Grafen von f ist im Folgenden dargestellt.



a) **Bestimme** alle Nullstellen von f.

b) **Berechne** f´(-1) und **interpretiere** diesen Wert geometrisch.

c) **Zeichne** die Tangente t an den Grafen von f im Punkt P(-1/-7) ein und **ermittle** zeichnerisch und rechnerisch eine Funktionsgleichung t(x) der Tangente t.

d) **Weise nach**, dass W(-2/-8) ein Rechts-Links-Wendepunkt mit waagerechter Tangente ist.

Aufgabe 2: Wahr oder falsch?

Entscheide begründend bei jeder der drei folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

a) Zwischen 2 Wendepunkten eines ganzrationalen Funktionsgrafen liegt **immer** 1 Extrempunkt.

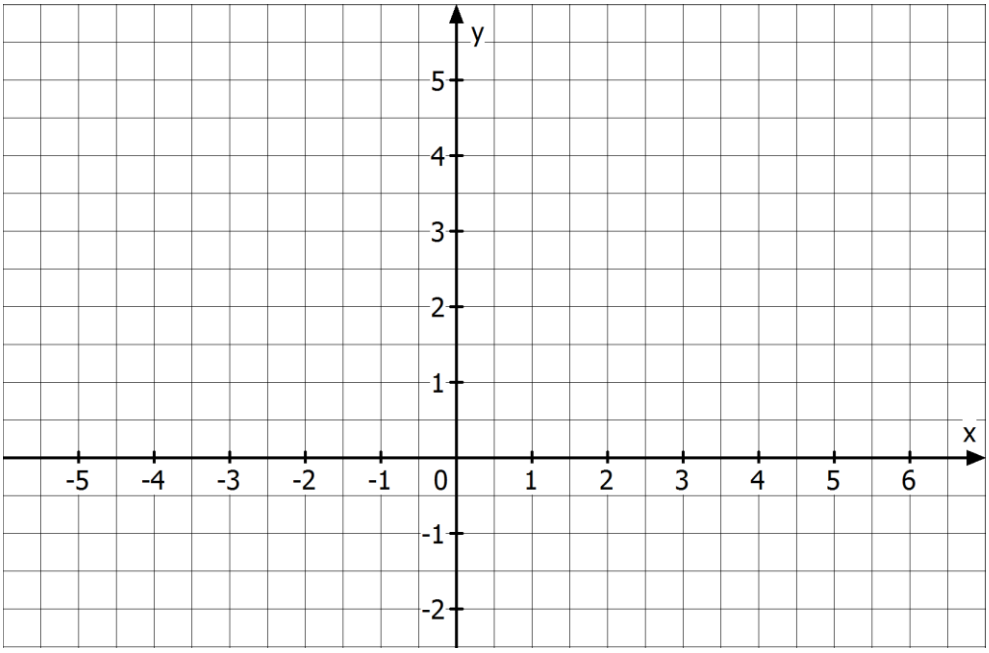
b) Zwischen 2 Extrempunkten eines ganzrationalen Funktionsgrafen liegt **immer** 1 Wendepunkt.

c) Der Graf einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat **immer** 1 Wendestelle.

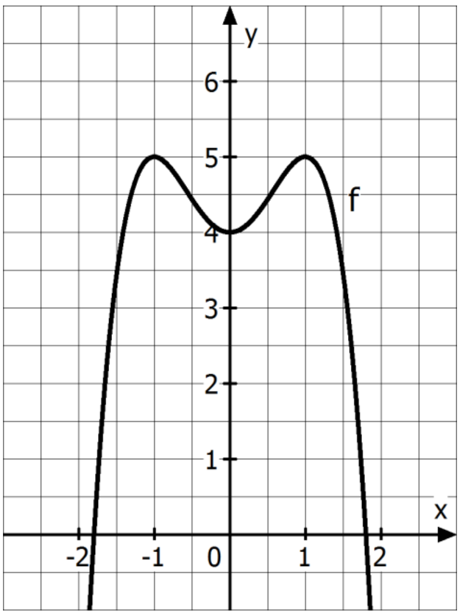
Aufgabe 3: Funktionseigenschaften[44]

a) **Skizziere** im nachfolgenden Koordinatensystem den Grafen einer Funktion g, wobei die folgenden Eigenschaften deutlich werden sollen:

(1) $g(0) = 4$ (2) $g'(4) = 0$ (3) $g''(4) > 0$



b) Gegeben ist der Graf einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades, der achsensymmetrisch zur y-Achse ist.



(1) **Gib** Bedingungsgleichungen **an**, welche die Funktionsgleichung des Grafen **eindeutig** festlegen und **markiere** die Informationen in der obigen Abbildung.

(2) **Ermittle** die Funktionsgleichung der GRF.

[44] modifiziert nach einem Vorschlag des Ministeriums als Vorbereitung auf Das Zentralabitur 2017

Teil II: Aufgaben unter Zuhilfenahme des GTR

Aufgabe 4: Steckbriefaufgaben

Skizziere mithilfe der Angaben den gesuchten Grafen und **ermittle** die dazugehörige Funktionsgleichung. Überprüfe Deine Lösung mit dem GTR.

a) Der Graf einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist zur y-Achse symmetrisch und hat in W(1/3) einen Wendepunkt. Die Steigung an der Stelle x = 1 hat den Wert –2.

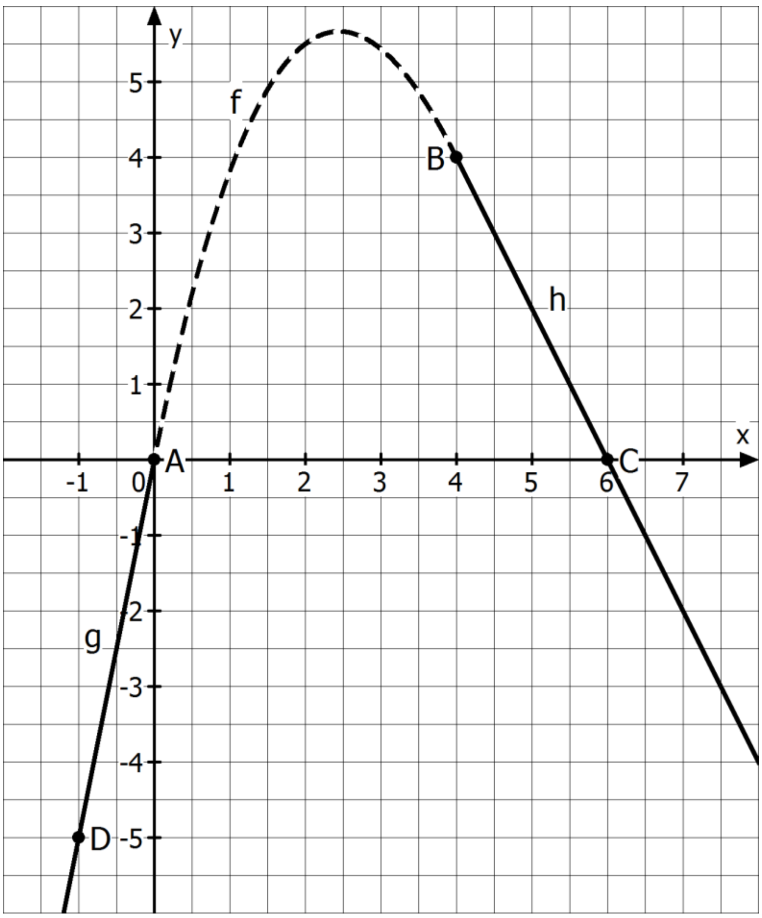
b) Der Graf einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 3 ist punktsymmetrisch zum Ursprung, verläuft durch A(1/2) und hat für x = 1 eine waagerechte Tangente.

c) Gegeben sei folgender Steckbrief, der zu einer Schar von Parabeln führt: Eine nach unten geöffnete Normalparabel verläuft durch den Punkt (3/0).

   Bestimme die Funktionsgleichung der Parabelschar und **ermittle** in Abhängigkeit vom Scharparameter die zweite Nullstelle.

Aufgabe 5: Trassierung

Die Abbildung zeigt zwei geradlinig verlaufende Straßenstücke AC und BD. Es soll nun eine Kurve gefunden werden, welche die Straßenstücke miteinander verbindet. Die Übergänge von A und B sollen **sprungfrei und knickfrei** sein.



a) **Bestimme** Gleichungen der Geraden durch die Punkte A und C bzw. B und D.

b) **Erkläre**, was ein sprung- und knickfreier Übergang anschaulich bedeutet.

c) **Ermittle** eine Funktion dritten Grades, welche die vorgegebene Situation modelliert.

d) **Untersuche**, ob das Kurvenstück auch durch eine Parabel modelliert werden könnte.

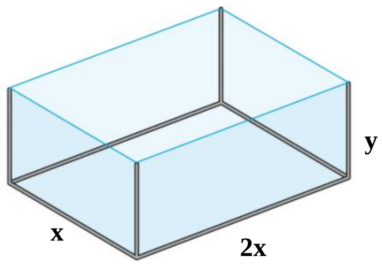
e) **Zeige**, dass f in beiden Übergängen nicht krümmungssprungfrei ist und **begründe**, welchen Grad eine Funktion haben müsste, damit beide Übergänge krümmungssprungfrei sind.

Aufgabe 6: Extremwertaufgaben

a) Ein Rechteck hat den Flächeninhalt 900 cm². **Bestimme** die Seitenlängen des Rechtecks mit dem kleinsten Umfang und **gib** den minimalen Umfang **an**. [Kontrollergebnis zum Weiterarbeiten: $U(x) = 2x + 1800x^{-1}$]

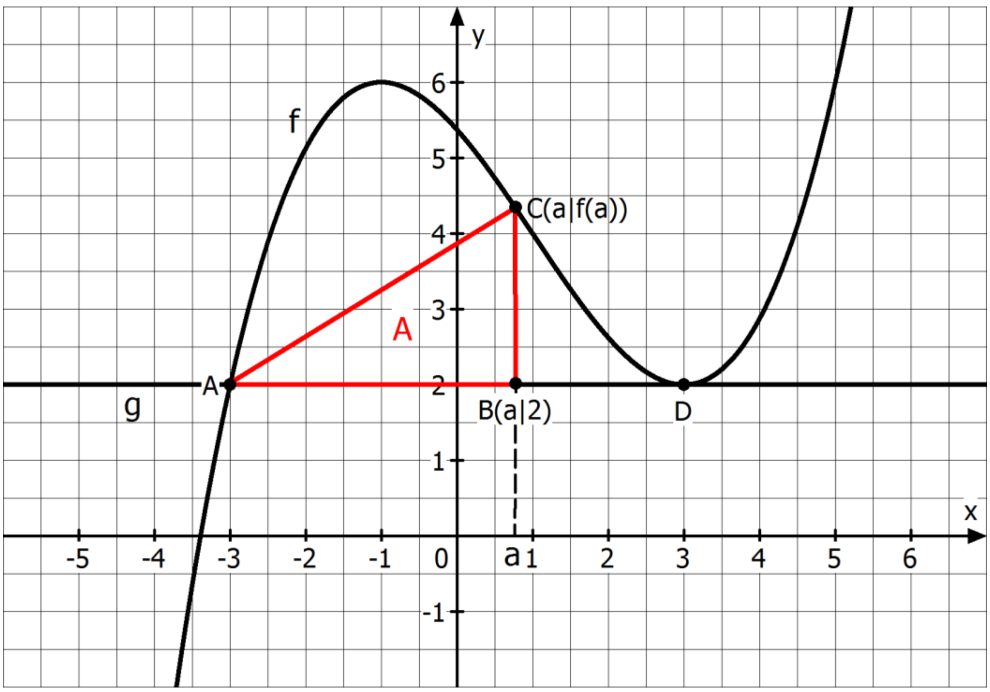
b) Es sollen zylinderförmige Blechdosen mit einem Volumen von 500 cm³ hergestellt werden. **Bestimme** den Radius r und Höhe h, damit der Blechverbrauch möglichst klein ist. (Die Blechstärke bleibt unberücksichtigt.)

c) Es soll ein nach oben offenes quaderförmiges Terrarium gebaut werden, das doppelt so lang wie breit ist (vgl. Abb. rechts). Stabilisiert wird es mithilfe von Winkeleisen. Zwei fortlaufende Meter Winkeleisen sind vorhanden. Welche Maße hat unter diesen Bedingungen ein Terrarium mit maximalen Volumen?



Ermittle die „optimalen" Maße des Terrariums. [Kontrollergebnis zum Weiterarbeiten: $V(x) = x^2 - 3x^3$] (10P)

d) Der Graf der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x + 43)$ schneidet die Gerade g mit g(x) = 2 in den Punkten A(-3/2) und D(3/2) (vgl. Abbildung). Für -3 ≤ a ≤ 3 bilden die Punkte A, B(a/2) und C(a/f(a)) ein Dreieck. **Bestimme** a, so dass dieses Dreieck maximalen Flächeninhalt hat.



Aufgabe 7 (Gewinnmaximierung)

Ein Chemiker aus den USA behauptet, dass man zukünftig nicht mehr zu duschen brauche. Stattdessen könne man sich täglich mit seiner Bakterienlösung einsprühen. Die 250-ml-Flasche kostet 200 €. Die Herstellungskosten betragen 100 € pro 250-ml-Flasche. Im ersten Monat verkauft der Chemiker nur 100 Flaschen. Nun möchte er den Gewinn maximieren und nimmt an, dass bei einer Preissenkung um x € monatlich x^2 Kunden hinzugewonnen werden können.

a) **Untersuche**, wie stark der Preis reduziert werden muss, damit der monatliche Gewinn maximal wird. **Bestimme** die Anzahl der dabei monatlich verkauften Flaschen. [Kontrollergebnis zum Weiterarbeiten: $G(x) = -x^3 + 100x^2 - 100x + 10000$]

b) Sei N die Anzahl der monatlich verkauften Flaschen. **Zeige:** Für den monatlichen Gewinn G gilt: $G(N) = N \cdot (100 - \sqrt{N - 100})$.

2.6 Lösungen

2.1 Noch fit? – Funktionsuntersuchung mit Steigung und Krümmung

Ableitungen (f´, f´´ und f´´´) bestimmen: $f´(x) = 1{,}5x^2 - 8x + 8$; $f´´(x) = 3x - 8$; $f´´´(x) = 3$

3a) Symmetrie: Es liegt keine besondere Symmetrie vor, da in f(x) Potenzen von x mit geraden und ungeraden Exponenten vorkommen

3b) Verhalten im Unendlichen/nahe Null: Das Verhalten im Unendlichen hängt von $g(x) = \frac{1}{2}x^3$ ab. Der Graf verläuft von links unten nach rechts oben. Das Verhalten nahe Null wird durch $h(x) = 8x$ bestimmt. Der Graph nähert sich in der Umgebung von Null der Geraden $y = 8x$ an.

3c) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: Für $x = 0$ gilt $f(0) = 0$. Daher ist der Ursprung Schnittpunkt des Graphen mit der x- und y-Achse. Für die weiteren Schnittpunkte mit der x-Achse gilt: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$. Der weitere Schnittpunkt lautet (4/0). Insbesondere ist 4 eine doppelte Nullstelle.

3d) Extrempunkte:

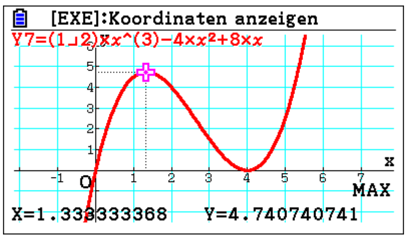
1) Notwendige Bedingung: $f´(x) = 0$ $1{,}5x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ oder $x = 4$ Mögliche Kandidaten für lokale Extremstellen sind $\frac{4}{3}$ und 4.	2) Hinreichende Bedingung: $f´(x) = 0$ und $f´´(x) \neq 0$ $f´´\left(\frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{3} - 8 = -4$: $\frac{4}{3}$ ist lokale Maximumstelle $f´´(4) = 3 \cdot 4 - 8 = +4$: $\frac{4}{3}$ ist lokale Minimumstelle 3) y-Werte der Extrempunkte: $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{128}{27}$ und $f(4) = 0$
Insgesamt gilt: H $\left(\frac{4}{3} / \frac{128}{27}\right)$ lokaler Hochpunkt und T(4/0) lokaler Tiefpunkt.	

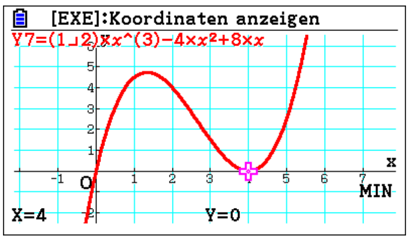
3e) Wendepunkte:

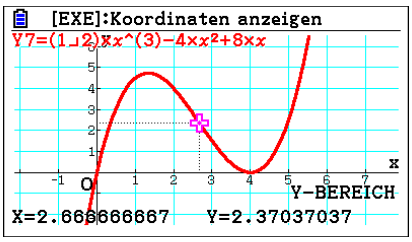
1) Notwendige Bedingung: $f´´(x) = 0$ $3x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$. Möglicher Kandidat für eine Wendestelle ist $\frac{8}{3}$	2) Hinreichende Bedingung: $f´´(x) = 0$ und $f´´´(x) \neq 0$ $f´´´\left(\frac{8}{3}\right) = 3 > 0$: $\frac{8}{3}$ ist Re-Li-Wendestelle („ReLiPo“) 3) y-Wertes des Wendepunktes: $f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{27}$
Insgesamt gilt: W $\left(\frac{8}{3} / \frac{64}{27}\right)$ ist Rechts-Links-Wendepunkt	

3f) Graph:

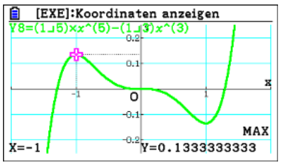
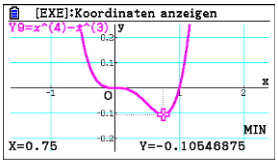
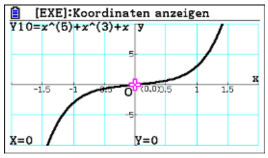
x	-0,25	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	-2,3	0	3,06	4,5	4,7	4	2,8	1,5	0,4	0	0,6	2,5





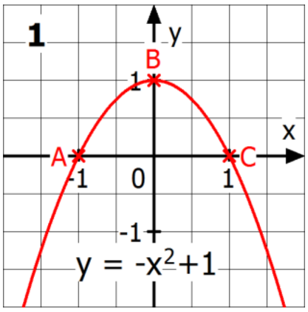


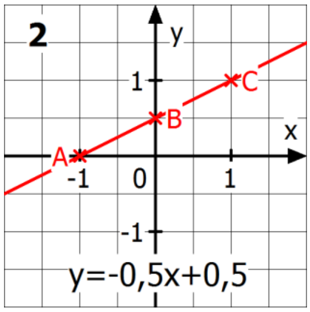
3g)

	$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$	$f(x) = x^4 - x^3$	$f(x) = x^5 + x^3 + x$
Symmetrie	Punktsymmetrie	keine Symmetrie	Punktsymmetrie
Verhalten an den Rändern	von links unten nach rechts oben	von links oben nach rechts oben	von links unten nach rechts oben
Verhalten nahe Null	wie $y = -\frac{1}{3}x^3$	wie $y = -x^3$	wie $y = x$
Extrempunkte	H(-1/0,13), T(1/-0,13)	T(0,75/-0,11)	
Wendepunkte	W(0/0) (Sattelpunkt)	W(0/0) (Sattelpunkt)	
Graf			

2.2 Ganzrationale Funktionen bestimmen

Aufgabe 1



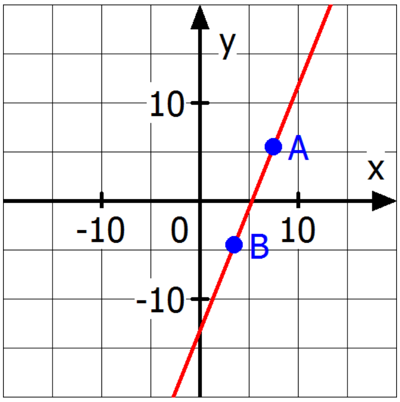
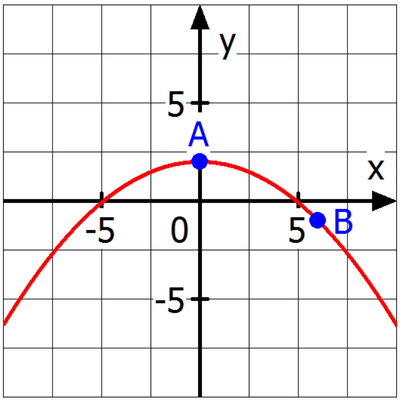
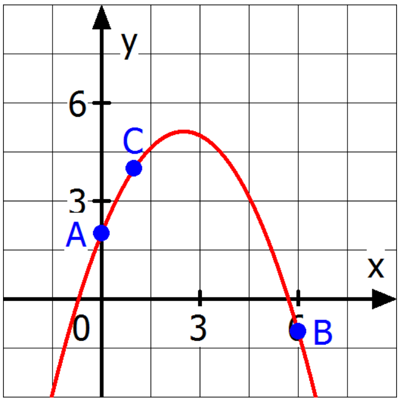


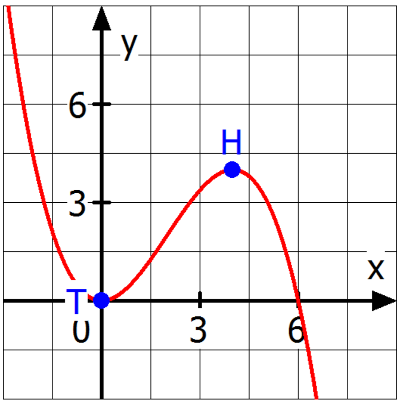
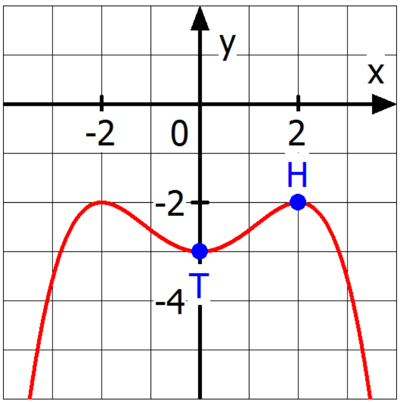
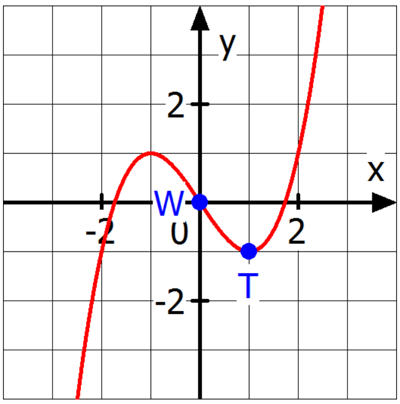
In Abbildung 1 ist nur eine Parabel möglich, in Abbildung 2 nur eine Gerade. In Abbildung drei ist kein Graf einer Funktion möglich.

Begründung: Würden in 1 die 3 Punkte auf einer Geraden liegen wäre die Steigung zwischen jeweils 2 Punkten immer eine andere. Die 3 Punkte in 2 können nicht auf einer Parabel liegen, da die mittlere Steigung zwischen je zwei Punkten immer konstant 1 ist. Dies ist bei einer Parabel nicht möglich. In 3 kann kein Graf einer Funktion durch die 3 Punkt verlaufen, da dann für den x-Wert 0,5 2 Funktionswerte existierten.

Die Funktionsgleichung der Parabel in 1 lautet $y = -x^2 + 1$, die der Geraden in 2 ist $y = 0{,}5x + 0{,}5$.

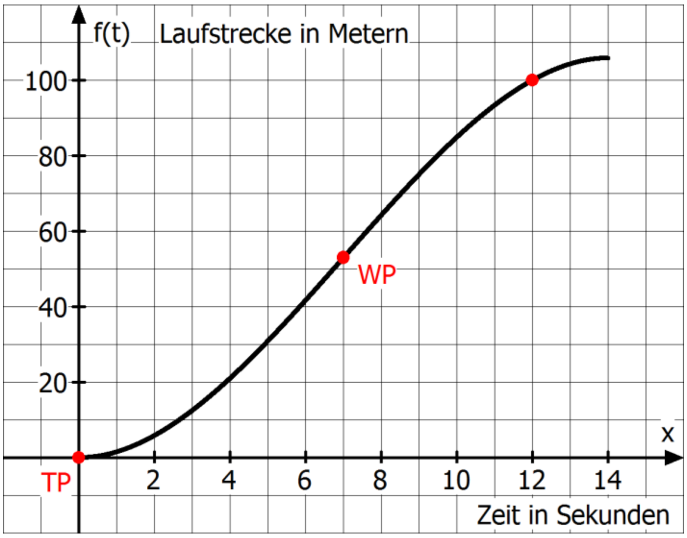
Aufgabe 2

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td>Gerade</td><td>Parabel</td><td>Parabel durch 3 Punkte</td></tr>
<tr><td>$f(x) = 2{,}5x - 13{,}25$</td><td>$f(x) = -\frac{1}{12}x^2 + 2$</td><td>$f(x) = -0{,}5x^2 + 2{,}5x + 2$</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td>Funktion vom Grad 3</td><td>Symmetrischer Graf</td><td>Wendepunkt im Ursprung</td></tr>
<tr><td>$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$</td><td>$f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3$</td><td>$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$</td></tr>
</table>

Aufgabe 3

a) Zur Bestimmung der 4 Parameter a, b, c und d benötigt man 4 Informationen. Im Graphen werden bei (0/0) ein lokaler Tiefpunkt markiert, bei x = 7 ein Wendepunkt sowie der Punkt (12/100) des Zieleinlaufes.



b) (I) $f(0) = 0$; (II) $f'(0) = 0$; (III) $f''(7) = 0$; (IV) $f(12) = 100$

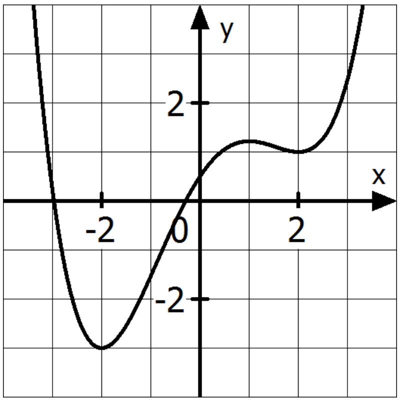
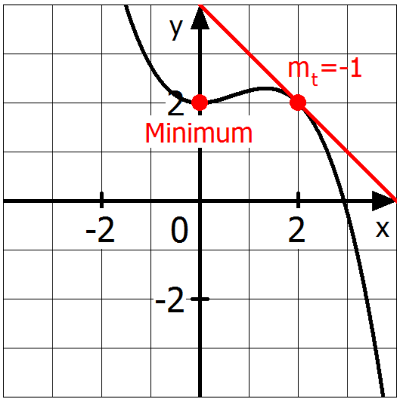
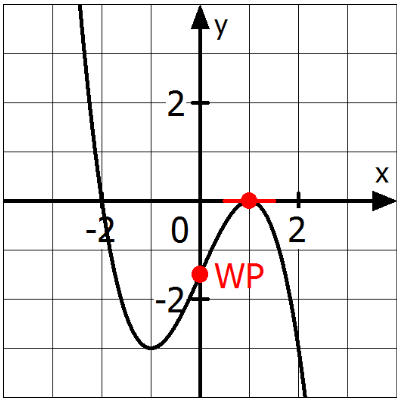
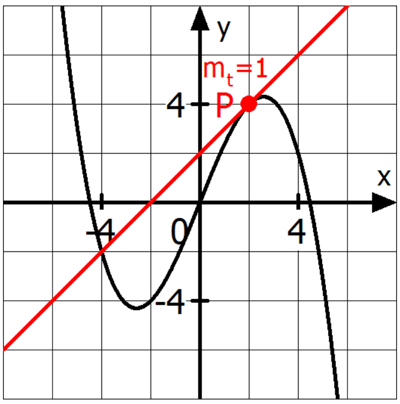
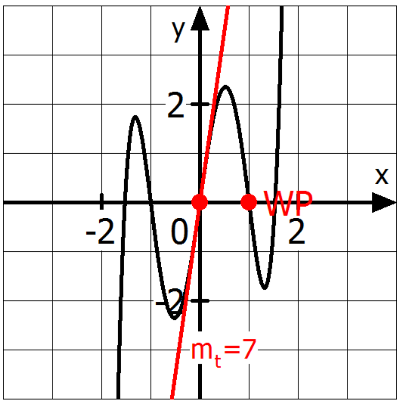
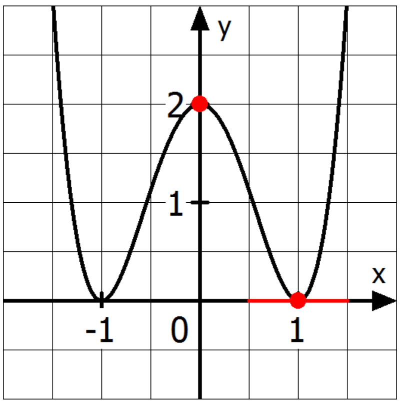
c) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$

d) (I) $d = 0$; (II) $c = 0$; (III) $42a + 2b = 0$ und (IV) $1728a + 144b = 100$

e) Der GTR liefert: $a = -\frac{25}{324}$ und $b = \frac{175}{108}$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{25}{324}x^3 + \frac{175}{108}x^2$

Aufgabe 4

					
Funktion		**Funktion**	1	**Funktion**	5
					
Funktion	2	**Funktion**	4	**Funktion**	3

Der Graf oben links besitzt noch keinen Steckbrief. Es könnte sich um eine Parabel vierter Ordnung handeln, die die y-Achse bei (0/0,5) schneidet (1. Information) und bei (2/1) und bei (-2/-3) jeweils einen lokalen Tiefpunkt besitzt (für jeden Tiefpunkt jeweils 2 Informationen). Es wären aber auch andere Vorschläge denkbar. Insgesamt benötigt man 5 Informationen.

Aufgabe 5

Steckbriefe von Aufgabe 2

Gerade: Eine Gerade verläuft durch die beiden Punkte A(7,5/5,5) und B(3,5/-4,5).
Ansatz: $f(x) = ax + b$; (1) $f(7{,}5) = 5{,}5 \Leftrightarrow 7{,}5a + b = 5{,}5$; (2) $f(3{,}5) = -4{,}5 \Leftrightarrow 3{,}5a + b = -4{,}5$;
Der GTR liefert a = 2,5 und b = -13,25. Also $f(x) = 2{,}5x - 13{,}25$

Parabel: Der Graf einer quadratischen Funktion hat bei A(0/2) einen Hochpunkt und verläuft durch den Punkt B(6/-1).
Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c; f'(x) = 2ax + b;\ f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$; (2) $f'(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$; (3)$f(6) = 1$
$\Leftrightarrow 36a + 6b + c = -1$. Setzt man die Lösungen für b und c in (1) ein und löst man (3) nach a auf ergibt sich $a = -\frac{1}{12}$. Insgesamt ergibt sich $f(x) = -\frac{1}{12}x^2 + 2$.

Parabel durch 3 Punkte: Der Graf einer quadratischen Funktion verläuft durch die Punkte A(0/2), B(6/-1) und C(1/4).
Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$; (1) $f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$; (2) $f(6) = 1 \Leftrightarrow 36a + 6b + c = -1$; (3) $f(1) = 4$
$\Leftrightarrow a + b + c = 4$;. Insgesamt ergibt sich $f(x) = -\frac{1}{12}x^2 + 2$.

Funktion vom Grad 3: Der Graf einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat in T(0/0) einen Tiefpunkt und in H(4/4) einen Hochpunkt.
Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; (1) $f(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$; (2) $f'(0) = 0$
$\Leftrightarrow c = 0$; (3) $f(4) = 4 \Leftrightarrow 256a + 16b + c + d = 4$; (4) $f'(4) = 0 \Leftrightarrow 48a + 8b + c = 0$
Mithilfe des GTR erhält man $a = -\frac{1}{8}; b = \frac{3}{4}; c = d = 0$ Also $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$.

Symmetrischer Graf: Der Graf einer ganzrationalen Funktion vom Grad 4 ist symmetrisch zur y-Achse, hat in H(2/-2) einen Hochpunkt und in T(0/-3) einen Tiefpunkt.
Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c; f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ (1) $f(2) = 2 \Leftrightarrow 16a + 4b + c = 2$; (2) $f'(2) = 0$
$\Leftrightarrow 32a + 4b = 0$; (3) $f(0) = 3 \Leftrightarrow c = 3$; (4) $f'(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$. Bedingung (4) ist immer erfüllt bei geraden GRF, da sie im Ursprung immer eine Extremstelle haben. Dies wurde im Ansatz bereits ausgenutzt. Der GTR liefert $a = -\frac{1}{16}; b = \frac{1}{2}; c = 3$. Also $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3$.

Wendepunkt im Ursprung: Der Graf einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt und in T(1/-1) einen Tiefpunkt.
Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx;\ f'(x) = 3ax^2 + b$; (1) $f(1) = -1 \Leftrightarrow a + b = -1$; (2) $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + b = 0$;
Der GTR liefert $a = \frac{1}{2}$ und $b = -\frac{3}{2}$. Also $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$. Die Tatsache, dass der Ursprung ein Wendepunkt ist, der auf dem Grafen liegt wurde durch den Ansatz bereits ausgenutzt. Denn jede ungerade GRF hat im Ursprung einen Wendepunkt.

Steckbriefe von Aufgabe 4

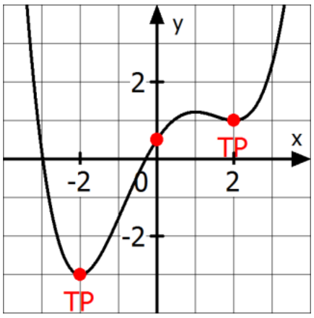
Funktion 2: Eine zum Ursprung symmetrische Parabel 3. Ordnung hat in (2/4) eine Tangente parallel zur 1. Winkelhalbierenden.
Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx;\ f'(x) = 3ax^2 + b$; (1) $f(2) = 4 \Leftrightarrow 8a + 2b = 4$; (2) $f'(2) = -1$
$\Leftrightarrow 12a + b = -1$. Der GTR oder der Kopf liefert $a = -\frac{3}{8}$ und $b = \frac{7}{2}$. Also $f(x) = -\frac{3}{8}x^3 + \frac{7}{2}x$.

Funktion 3: Eine zur x-Achse symmetrische Parabel 4. Ordnung geht durch (0/2) und hat in (1/0) die Steigung Null.
Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c; f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ (1) $f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$; (2) $f(1) = 0$
$\Leftrightarrow a + b + c = 0$; (3) $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b = 0$. Der GTR liefert $a = 2; b = -4; c = 2$.
Also $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$.

Funktion 4: Eine zum Ursprung punktsymmetrische Parabel 5. Ordnung hat in (0/0) die Gerade t mit der Gleichung t(x) = 7x als Tangente und in (1/0) einen Wendepunkt.
Ansatz: $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$; $f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$; $f''(x) = 20ax^3 + 6bx$; (1) $f'(0) = 7$
$\Leftrightarrow c = 7$; (2) $f(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$; (3) $f''(1) = 0 \Leftrightarrow 20a + 6b = 0$.
Der GTR liefert a = 3, b = -10 und c = 7. Also $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 7x$.

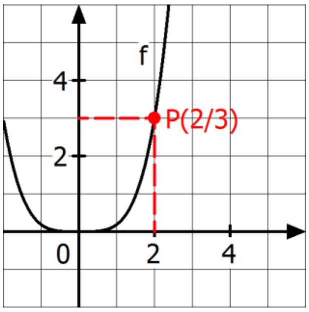
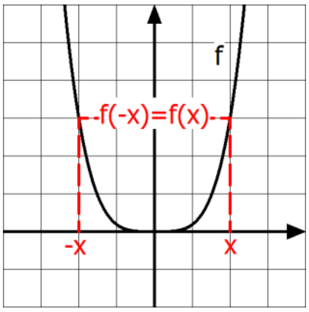
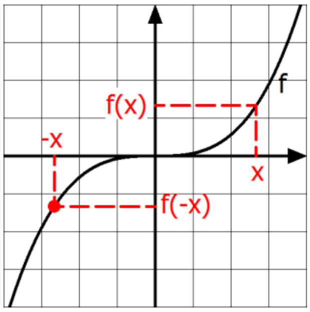
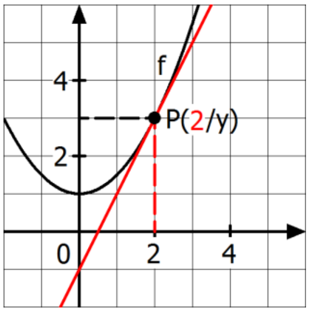
Funktion 5: Eine Parabel 3. Ordnung berührt die x-Achse in (1/0) und hat in (0/-1,5) einen Wendepunkt.
Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$; (1) $f(0) = -1{,}5$
$\Leftrightarrow d = -1{,}5$; (2) $f''(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$; (3) $f(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c + d = 0$; (4) $f'(1) = 0$
$\Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0$. Der GTR liefert $a = -0{,}75$; $b = 0$; $c = 2{,}25$ und d = -1,5.
Also $f(x) = -0{,}75x^3 + 2{,}25x - 1{,}5$.

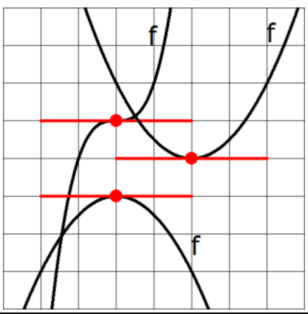
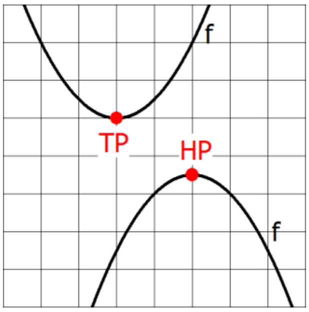
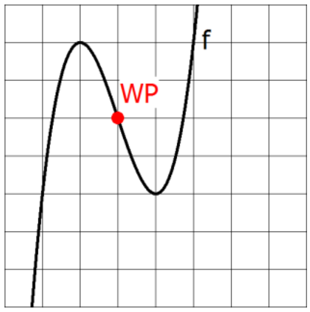
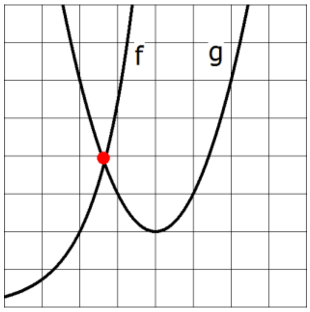
Funktion ohne Steckbrief: Es könnte sich um eine Parabel vierter Ordnung handeln, die die y-Achse bei (0/0,5) schneidet und bei (2/1) und bei (-2/-3) jeweils einen lokalen Tiefpunkt besitzt.
Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$; $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
(1) $f(0) = 0{,}5 \Leftrightarrow e = 0{,}5$;
(2) $f(2) = 1 \Leftrightarrow 16a + 8b + 4c + 2d + e = 1$;
(3) $f'(2) = 0 \Leftrightarrow 32a + 12b + 4c + d = 0$;
(4) $f(-2) = -3 \Leftrightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + e = -3$
(5) $f'(-2) = 0 \Leftrightarrow -32a + 12b - 4c + d = 0$.
Mit dem GTR folgt: $a = \frac{3}{32}$; $b = -\frac{1}{8}$; $c = -\frac{3}{4}$; $d = \frac{3}{2}$; $e = 0{,}5$
$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{32}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

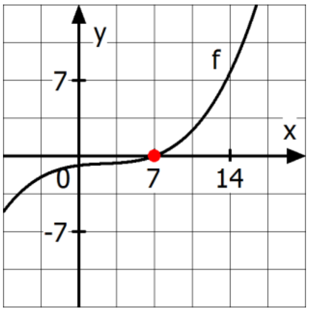
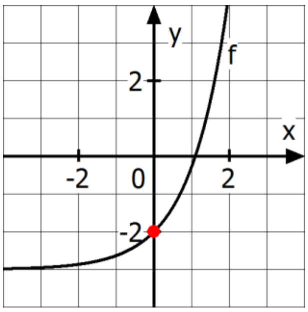
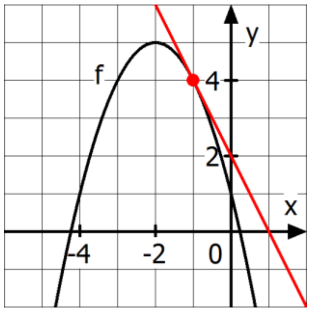
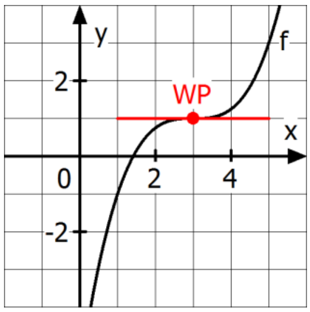


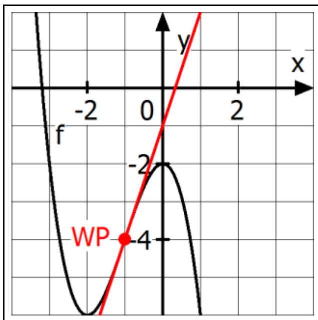
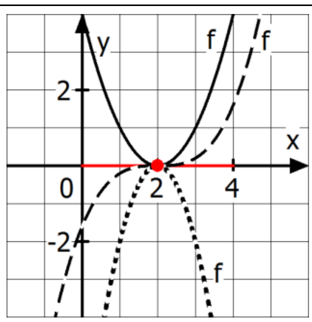
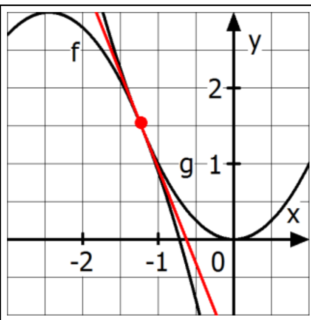
Aufgabe 6

Textform	Bedingungsgleichung(en)
(2/3) liegt auf dem Graphen von f.	f(2) = 3
Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.	f(x) = f(-x) oder bei GRF f(x) hat nur gerade Potenzen von x.
Der Graph von f ist symmetrisch zum Ursprung.	f(x) = - f(-x) oder bei GRF f(x) hat nur ungerade Potenzen von x.
Der Graph von f hat bei x = 3 die Steigung 2.	f´(3) = 2
Bei (1/3) liegt eine horizontale Tangente.	$f(1) = 3 \wedge f'(1) = 0$
Der Punkt (2/1) ist ein lokaler Extrempunkt.	$f(2) = 1 \wedge f'(2) = 0$
Der Punkt (0/3) ist ein Wendepunkt.	$f(0) = 3 \wedge f''(0) = 0$
G_f schneidet G_g mit $g(x) = 2x^2 + 3$ in (1/y).	$f(1) = g(1) = 5 \wedge f'(1) \neq g'(1)$
Der Graph von f schneidet die x-Achse bei x = 7.	f(7) = 0
Der Graph schneidet die y-Achse bei y = -2.	f(0) = -2
G_f hat in (-1/y) die Tangente g mit g(x) = -2x + 2.	$f(-1) = g(-1) = 4 \wedge f'(-1) = -2$
G_f hat in (3/1) einen Sattelpunkt.	$f(3) = 1 \wedge f'(3) = 0 \wedge f''(3) = 0$
G_f hat in (-1/y) die Wendetangente y = 3x – 1.	$f(-1) = g(-1) = -4 \wedge f'(-1) = 3 \wedge f''(-1) = 0$
Der Graph von f berührt die x-Achse bei x = 2.	$f(2) = 0 \wedge f'(2) = 0$
G_f berührt G_g mit $g(x) = 5x^2 - 4$ in (-1/y).	$f(-1) = g(-1) = 1 \wedge f'(-1) = g'(-1) = -10$

			
(2/3) liegt auf dem Graphen von f.	Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.	Der Graph von f ist symmetrisch zum Ursprung.	Der Graph von f hat bei x = 3 die Steigung 2.
$f(2) = 3$	$f(x) = f(-x)$; GRF f(x) haben nur gerade Potenzen von x.	$f(x) = -f(-x)$; GRF f(x) hat nur ungerade Potenzen von x.	$f'(3) = 2$

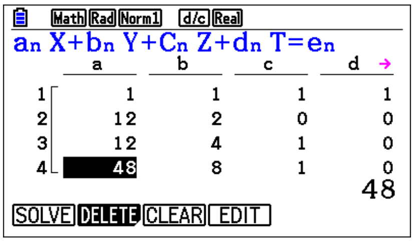
			
Bei (1/3) liegt eine horizontale Tangente.	Der Punkt (2/1) ist ein lokaler Extrempunkt.	Der Punkt (0/3) ist ein Wendepunkt.	G_f **schneidet** G_g mit der Gleichung $g(x) = 2x^2 + 3$ in (1/y).
$f(1) = 3 \wedge f'(1) = 0$	$f(2) = 1 \wedge f'(2) = 0$	$f(0) = 3 \wedge f''(0) = 0$	$f(1) = g(1) = 5 \wedge g'(1) \neq g'(1)$

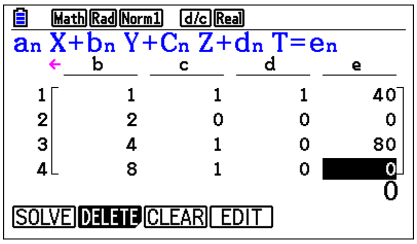
			
Der Graph von f schneidet die x-Achse bei x = 7.	Der Graph schneidet die y-Achse bei y = -2.	G_f hat in (-1/y) die Tangente g mit $g(x) = -2x + 2$.	G_f hat in (3/1) einen Sattelpunkt.
$f(7) = 0$	$f(0) = -2$	$f(-1) = g(-1) = 4 \wedge f'(-1) = -2$	$f(3) = 1 \wedge f'(3) = 0 \wedge f''(3) = 0$

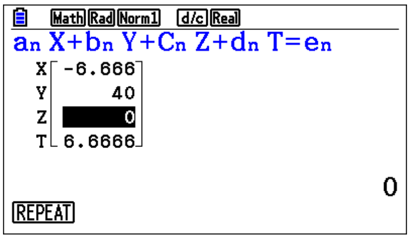
			
G_f hat in (-1/y) die Wendetangente $y = 3x - 1$.	Der Graph von f berührt die x-Achse bei x = 2.	G_f **berührt** G_g mit der Gleichung $g(x) = 5x^2 - 4$ in (-1/y).	
$f(-1) = g(-1) = -4 \wedge f'(-1) = 3 \wedge f''(-1) = 0$	$f(2) = 0 \wedge f'(2) = 0$	$f(-1) = g(-1) = 1 \wedge f'(-1) = g'(-1) = -10$	

Aufgabe 7

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$;
Sei t = 0 der Zeitpunkt 20 Uhr. Dann erhält man die folgenden Bedingungen:
(1) Um 21 Uhr sind 40 Besucher im Festzelt: $f(1) = 40 \Leftrightarrow a + b + c + d = 40$
(2) Der größte Andrang besteht um 22 Uhr: $f''(2) = 0 \Leftrightarrow 12a + 2b = 0$
(3) Um 22 Uhr beträgt der Andrang 80 Besucher pro Stunde: $f'(2) = 80 \Leftrightarrow 12a + 4b + c = 80$
(4) Um Mitternacht sind die meisten Besucher im Zelt: $f'(4) = 0 \Leftrightarrow 48a + 8b + c = 0$
Man löst das LGS mit dem GTR und erhält $a = -\frac{20}{3}$; $b = 40$; $c = 0$; $d = \frac{20}{3}$.
Also $f(x) = -\frac{20}{3}x^3 + 40x^2 + \frac{20}{3}$.







Aufgabe 8

Beispiel 1: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx$ (f ist ungerade). (1) $f(1) = 2 \Leftrightarrow a + b = 2$; (2) $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + b = 0$ ergibt mit dem GTR die Lösungen $a = -1$ und $b = 3$, d. h. man erhält $f(x) = -x^3 + 3x$. Dieser Steckbrief ist **eindeutig** bestimmt, da es genau eine Lösung gibt. [Alternativ hätte man auch den Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ bzw. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ wählen können. Die Bedingungen lauten wegen der Symmetrie zum Ursprung: (1) $f(1) = 2 \Leftrightarrow a + b + c + d = 2$; (2) $f(-1) = -2 \Leftrightarrow -a + b - c + d = -2$; (3) $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0$; (4) $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3a - b + c = 0$. Diese vier Bedingungen hätten zu einem LGS geführt, bei dem $b = d = 0$ und $a = -1$ und $c = 3$ sind.]

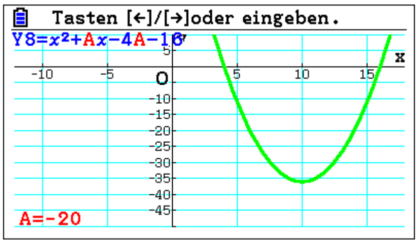
Beispiel 2: Ansatz: $f(x) = ax^2 + b$. Denn: Die Bedingung $f'(0) = 0$ bedeutet bei einer Parabel, dass der Scheitelpunkt der Parabel bei (0/b) liegt, so dass mit der Scheitelpunktform $f(x) = a(x - 0)^2 + b$ folgt. (1) $f(0) = 4 \Leftrightarrow b = 4$ (2) $f(1) = 3 \Leftrightarrow a + 4 = 3 \Leftrightarrow a = -1$. Es ergibt sich $f(x) = -x^2 + 4$. Die dritte Bedingung $f(2) = 0$ ist offenbar auch erfüllt, denn die obige Parabel hat 2 als Nullstelle. Dieser Steckbrief ist **überbestimmt**, da mehr Informationen als notwendig gegeben wurden. [Alternativ hätte man auch den Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$ bzw. $f'(x) = 2ax + b$ wählen können. Mit den Bedingungen (1) $f(0) = 4 \Leftrightarrow c = 4$; (2) $f'(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$; (3) $f(1) = 3 \Leftrightarrow a + b + c = 3$ erhält man für $a = -1$. Die Bedingung (4) lautet $f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 0 \Leftrightarrow a = -1$ und bestätigt nur noch einmal Bedingung (3).]

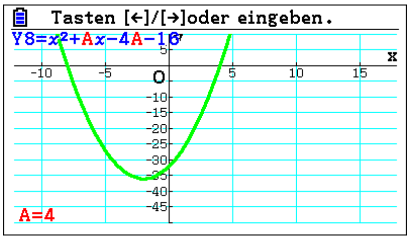
Beispiel 3: Ansatz: $f(x) = a\cdot(x - 1)^2 + b$. Denn: Die Bedingung $f'(1) = 0$ bedeutet bei einer Parabel, dass der Scheitelpunkt der Parabel bei (1/b) liegt, so dass mit der Scheitelpunktform $f(x) = a(x - 1)^2 + b$ folgt. Ferner gilt: (1) $f(0) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$; (2) $f(2) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$. In beiden Fällen erhält man die Bedingung $a + b = 0$. Bedingung (1) und (2) sind liefern also die gleiche Information. Dies ist klar, da folgendes gilt: Der Ursprung liegt genau dann auf einer Parabel mit Scheitelpunkt (1/b), wenn der Punkt (2/0) auf der Parabel liegt. Man hat unendlich viele Parabeln, für die $a + b = 0$ ist. Formt man die Bedingung $a + b = 0$ etwa nach a um ergibt sich $a = -b$. Setzt man a in die allgemeine Funktionsgleichung ein, gilt: $f_a(x) = a\cdot(x - 1)^2 - a = ax^2 - 2ax$. Dieser Steckbrief ist **unterbestimmt** und erzeugt eine Parabelschar mit (vgl. Infoblock). [Alternativ hätte man auch den Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$ bzw. $f'(x) = 2ax + b$ wählen können. Mit den Bedingungen (1) $f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$; (2) $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0$; (3) $f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 0$ erhält man bei (2) als auch bei (3) dieselbe Gleichung $2a + b = 0$ oder $b = -2a$. Daher folgt wie oben $f_a(x) = ax^2 - 2ax$.]

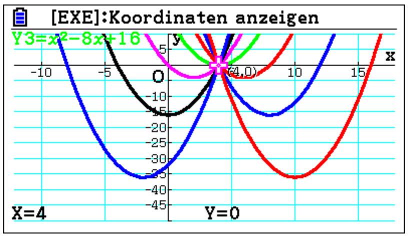
Aufgabe 9

a) Ansatz $f(x) = x^2 + ax + b$.
Bedingung (1) $f(4) = 0 \Leftrightarrow 16 + 4a + b = 0 \Leftrightarrow b = -16 - 4a$
Daher folgt wie oben $f_a(x) = x^2 + ax - 16 - 4a$.

b) Die Tiefpunkte scheinen auf einer Parabel zu liegen, wie die folgende Abbildungen zeigen zeigt.

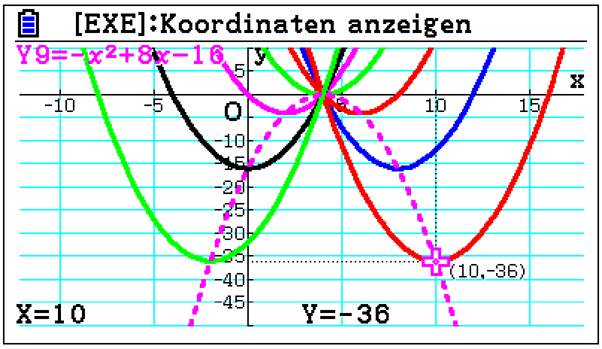






c) $f_a(x) = x^2 + ax - 16 - 4a = 0$. Die Diskriminante lautet: $D = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + 16 + 4a = \frac{a^2}{4} + 4a + 16$. Die Diskriminante ist Null genau dann, wenn $\frac{a^2}{4} + 4a + 16 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 16a + 64 = 0 \Leftrightarrow (a+8)^2 = 0$.
Also für $a = -8$ ist die Diskriminante Null. Der Graph zu f_{-8} hat daher genau eine Nullstelle.

d) Man rechnet nach $f_a'(x) = 2x + a = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{a}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{a}{2}\right) = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) - 16 - 4a$
$= \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - 4a - 16 = -\frac{a^2}{4} - 4a - 16$ Man erhält die Schar der lokalen Tiefpunkte:
$T_a\left(-\frac{a}{2} / -\frac{a^2}{4} - 4a - 16\right)$. Also gilt für den x- und y-Wert
$x = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow a = -2x$ und $y = -\frac{a^2}{4} - 4a - 16$.
Setzt man a in die Gleichung für y ein ergibt sich:
$y = -\frac{a^2}{4} - 4a - 16 = -\frac{(-2x)^2}{4} - 4(-2x) - 16 = -x^2 + 8x - 16$.
Alle Tiefpunkte liegen als auf der Parabel mit der Funktionsgleichung $y = x^2 + 9x - 16$



e) $x^2 + a_1x - 4a_1 - 16 = x^2 + a_2x - 4a_2 - 16 \Leftrightarrow (a_1 - a_2)x = 4(a_1 - a_2) \xLeftrightarrow[:(a_1-a_2)\neq 0]{} x = 4$.

2.3 Trassierungsaufgaben

Aufgabe 1

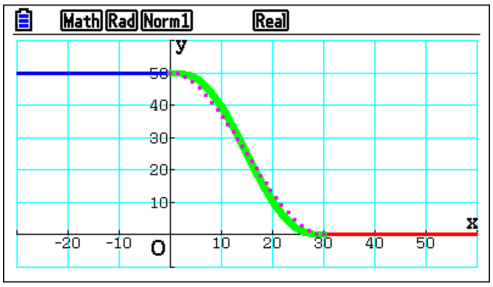
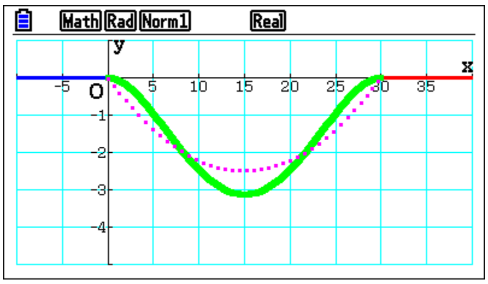
a) Die **erste Abbildung** hat offenbar die Funktionsgleichung: $f(x) = 50 - \frac{5}{3}x$ (Steigung und y-Achsenabschnitt ablesen). Die **zweite Kurve** ist der Ast einer Parabel mit der Funktionsgleichung: $f(x) = ax^2 + 50$. Setzt man den Punkt (30/0) in die Gleichung ein, erhält man $0 = a \cdot 30^2 + 50$. Also folgt $a = -\frac{50}{900} = -\frac{1}{18} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{18}x^2 + 50$. Die **dritte Parabel** könnte der Ausschnitt einer Parabel dritter Ordnung sein mit der Form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 50$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Hier gelten die Bedingungen: (1) $f'(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$; (2) $f(30) = 0 \Leftrightarrow 27000a + 900b + 30c + 50 = 0 \Leftrightarrow 27000a + 900b + 30c = -50$ (3) $f'(30) = 0 \Leftrightarrow 2700a + 60b + c = 0$. Der GTR liefert $a = \frac{1}{270}5$; $b = -\frac{1}{6}$; $c = 0 \Rightarrow$ $f(x) = \frac{1}{270}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + 50$.

b) 1 und 2 sind ungeeignet, auch wenn für Lösung 1 der Materialbedarf am geringsten ist (kürzeste Verbindung der Übergänge). Denn in beiden Lösungen liegt bei mindestens einem Übergang ein Steigungssprung vor. 3 ist am besten geeignet. Hier stimmen bei den Übergangspunkten Übergängen sowohl die Funktionswerte als auch die Funktionswerte der ersten Ableitung überein.

c)

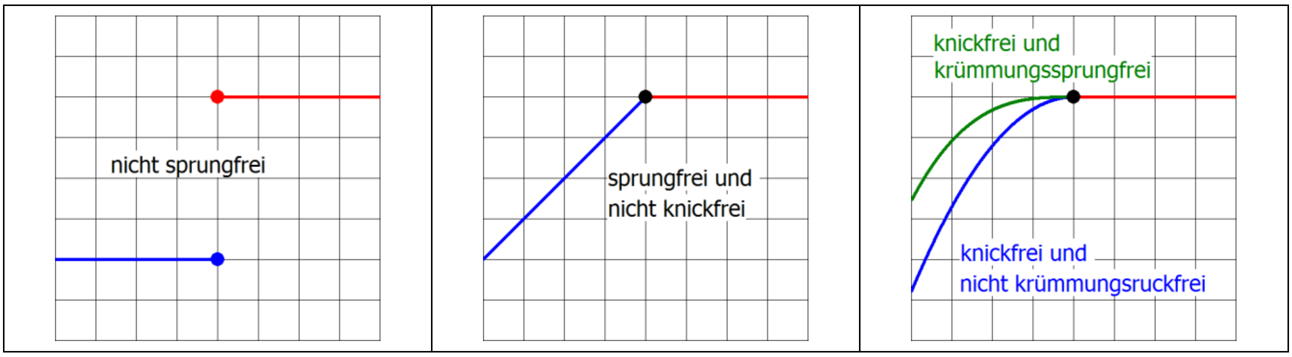
Da der Ingenieur fordert, dass in den Übergangsstellen Wendestellen vorliegen sollen, müsste die Funktion mindestens drei Wendestellen haben (im Intervall [0; 30] liegt ein Krümmungswechsel vor). Daher muss diese Modellfunktion mindestens den Grad 5 haben. Die Forderung des Ingenieurs ist sinnvoll, da es durch die beiden Wendestellen zu keiner ruckhaften bzw. sprunghaften Änderung der Fahrtrichtung kommt. Die Forderung, dass an beiden Übergängen Wendestellen vorliegen müssen, ist gleichbedeutend mit den zusätzlichen Bedingungen $f''(0) = f''(30) = 0$.

Ansatz: $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 50$; $f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$;
$f''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d$.
(1) $f'(0) = 0 \Leftrightarrow e = 0$
(2) $f''(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$
(3) $f(30) = 0 \Leftrightarrow 30^5a + 30^4b + 30^3c = -50$;
(4) $f'(30) = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 30^4a + 4 \cdot 30^3b + 3 \cdot 30^2c = 0$
(5) $f''(30) = 0 \Leftrightarrow 20 \cdot 30^3a + 12 \cdot 30^2b + 180c = 0$.
Mit dem GTR folgt für die Gleichungen (3) bis (5): $a = -\frac{1}{81000}$; $b = \frac{1}{1080}$; $c = -\frac{1}{54}$;
$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{81000}x^5 + \frac{1}{1080}x^4 - \frac{1}{54}x^3 + 50$. (grüner Graf; gestrichelter Graf ist der Graf 3)

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>In dieser Abbildung ist erkennbar, dass die Übergänge bei der GRF fünften Grades „geschmeidiger“ sind als beim gestrichelten Graf 3 einer GRF dritten Grades.</td><td>Deutlicher wird dies, wenn man die Ableitungsgrafen betrachtet. Hier erkennt man, dass die Übergänge beim gestrichelten Grafen nicht knickfrei sind.</td></tr>
</table>

Aufgabe 2

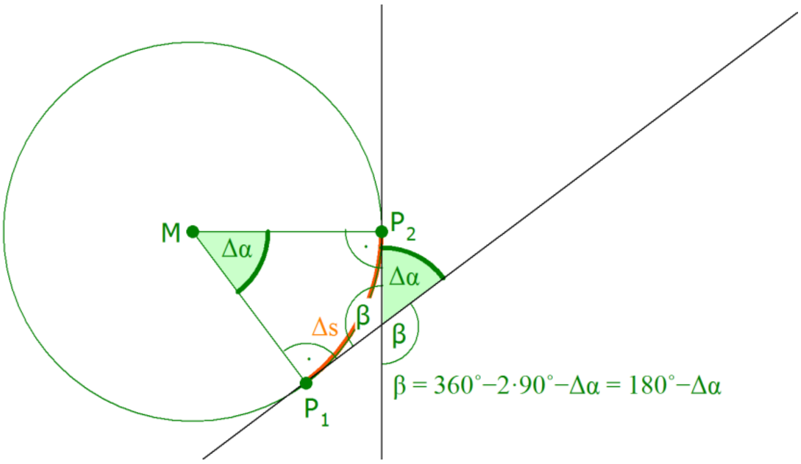
a)



b)

Bei einer Geraden gibt es keine Richtungsänderung. Daher gilt für die mittlere Krümmung überall $\Delta\kappa = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{0}{\Delta s} = 0$. Es gilt folglich für die lokale Krümmung $\kappa = \lim\limits_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim\limits_{\Delta s\to 0} \frac{0}{\Delta s} = 0$.

Für den Kreis betrachte man folgende Abbildung:



Mit $\Delta s = \Delta\alpha \cdot r$ (α im Bogenmaß) folgt für die mittlere Krümmung $\Delta\kappa = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\alpha \cdot r} = \frac{1}{r}$. Daher folgt für die lokale Krümmung $\kappa = \lim\limits_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim\limits_{\Delta s\to 0} \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$.

c)

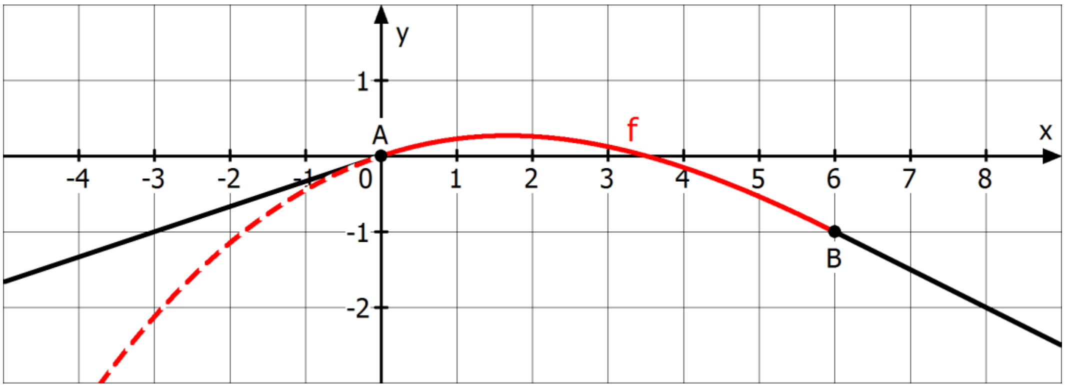
Sei a Extremstelle. Dann gilt $f'(a) = 0$. Also: $\kappa(a) = \frac{f''(a)}{(1+0^2)^{1,5}} = f''(a)$.

Sei a Wendestelle. Dann gilt $f''(a) = 0$. Also: $\kappa(a) = \frac{0}{(1+[f'(a)]^2)^{1,5}} = 0$.

Ist der Graf $\begin{Bmatrix} \text{rechtsgekrümmt} \\ \text{linksgekrümmt} \end{Bmatrix}$ an einer Stelle a, gilt $f''(a) \begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} 0$. Daher folgt für die Krümmung $\kappa(a) = \frac{f''(a)}{(1+[f'(a)]^2)^{1,5}} \begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} 0$, da der Nenner stets positiv ist.

Aufgabe 3

a)



Legt man den Ursprung z. B. in den Ursprung auf den ersten Übergangspunkt A und wählt für eine Kästchenlänge eine Längeneinheit erhält man folgende vier Bedingungen:

(1) $f(0) = 0$ (2) $f'(0) = \frac{1}{3}$ (3) $f(6) = -1$ (4) $f'(6) = -\frac{1}{2}$

Daher ist der Ansatz einer GRF dritten Grades geeignet (man kann mit ein wenig Nachdenken oder durch Nachrechnen zeigen, dass keine GRF zweiten Grades die vier Bedingungen erfüllen kann):
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
(1) $f(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$
(2) $f'(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$
(3) $f(6) = -1 \Leftrightarrow 216a + 36b + 6c = -1 \underset{c=\frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} 216a + 36b = -3$
(4) $f'(6) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 108a + 12b + c = -\frac{1}{2} \underset{c=\frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} 108a + 12b = -\frac{5}{6}$

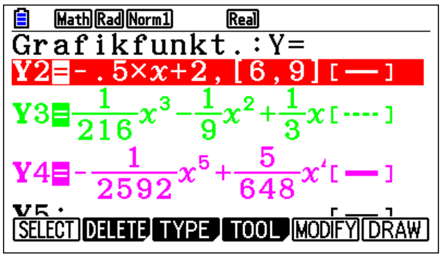
Der GTR liefert: $a = \frac{1}{216}$; $b = -\frac{1}{9}$. Mit $c = \frac{1}{3}$ folgt $f(x) = \frac{1}{216}x^3 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x$.

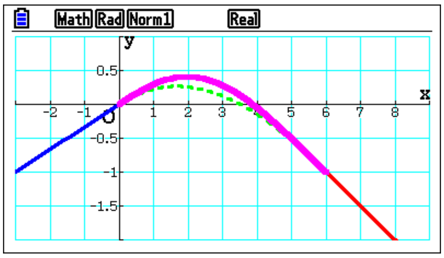
Anmerkung: Wählt man den Punkt B als Ursprung des Koordinatensystems erhält man die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{216}x^3 - \frac{1}{36}x^2 - \frac{1}{2}x$.

b)

Man hat $f''(0)$ und $f''(6)$ zu berechnen und zu zeigen, dass diese Werte ungleich Null sind, da die geraden Anschlussstücke an den Stellen 0 und 6 als zweite Ableitung konstant Null sind. Es gilt $f''(x) = \frac{1}{36}x - \frac{2}{9}$. Daher gilt $f''(0) = -\frac{2}{9} \neq 0$ und $f''(6) = -\frac{1}{16} \neq 0$. Also ist f an den Stellen $x = 0$ bzw. $x = 6$ nicht krümmungssprungfrei. Eine solche Funktion müsste sechs Bedingungen erfüllen, hätte also mindestens fünften Grad. Der Ansatz lautet: $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$;
$f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$; $f''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d$. Die 6 Bedingungen sind:
(1) $f(0) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (2) $f'(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow e = \frac{1}{3}$ (3) $f''(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$
(4) $f(6) = -1 \Leftrightarrow 6^5a + 6^4b + 6^3c + 36d + 6e + f = -1 \underset{d=f=0;e=\frac{1}{3}}{\Longleftrightarrow} 6^5a + 6^4b + 6^3c = -3$
(5) $f'(6) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 5 \cdot 6^4a + 4 \cdot 6^3b + 3 \cdot 6^2c + 12d + e = -\frac{1}{2} \underset{d=0;e=\frac{1}{3}}{\Longleftrightarrow} 5 \cdot 6^4a + 4 \cdot 6^3b + 3 \cdot 6^2c = -\frac{5}{6}$
(6) $f''(6) = 0 \Leftrightarrow 20 \cdot 6^3a + 12 \cdot 6^2b + 36c + 2d = 0 \underset{d=0}{\Leftrightarrow} 20 \cdot 6^3a + 12 \cdot 6^2b + 36c = 0$.
Mit dem GTR folgt für die Gleichungen (4) bis (6): $a = -\frac{1}{2592}$; $b = \frac{5}{648}$; $c = -\frac{5}{108}$. Mit $d = f = 0$ bzw. $e = \frac{1}{3}$ folgt: $f(x) = -\frac{1}{2592}x^5 + \frac{5}{648}x^4 - \frac{5}{108}x^3 + \frac{1}{3}x$.

Der fettgedruckte Graf garantiert im Gegensatz zum gestrichelten Grafen krümmungssprungfreie Übergänge





Aufgabe 4

a) $f_{b,d}(0) = 50 \Leftrightarrow \frac{d^2}{b} = 50 \Leftrightarrow d^2 = 50b$ und $f_{b,d}(30) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b}\cdot(d-900)^2 = 0 \Leftrightarrow d = 900$. Also $b = \frac{d^2}{50} = 16200$.

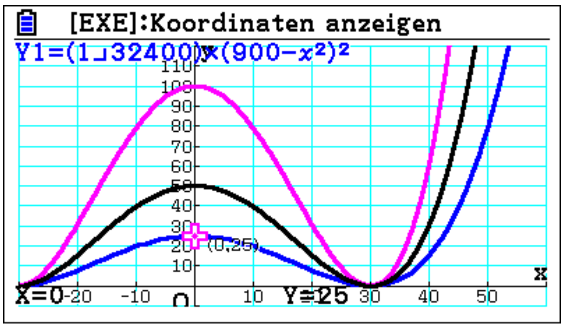
b) Es gilt nach der 2. binomischen Formel: $f_{b,d}(x) = \frac{1}{b}\cdot(d-x^2)^2 = \frac{1}{b}\cdot(d^2-2dx^2+x^4)$. Daher folgt $f_{b,d}'(x) = \frac{1}{b}\cdot(4x^3-4dx) = \frac{4}{b}(x^3-dx)$

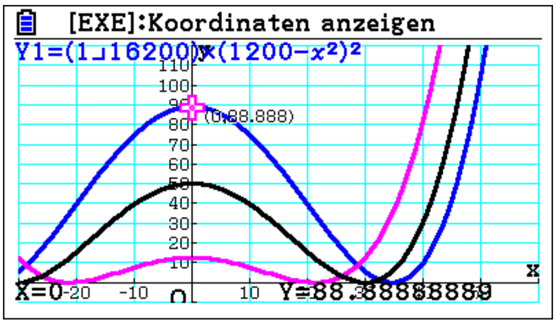
[mit der Kettenregel („innere mal äußere Ableitung"), die wir in der Q2 kennenlernen, geht es schneller: $f_{b,d}'(x) = \frac{1}{b}\cdot 2\cdot(d-x^2)(-2x) = \frac{4}{b}\cdot(x^2-d)x = \frac{4}{b}(x^3-dx)$]

Nun folgt: $f_{b,d}''(x) = \frac{4}{b}(3x^2-d)$. Setze b = 16200 und d = 900 ein und man erhält:
$f_{16200,900}'(x) = \frac{1}{16200}(x^3-900x)$ und $f_{16200,900}''(x) = \frac{1}{4050}(3x^2-900)$.
Es gilt $f_{16200,900}'(30) = f_{16200,900}'(0) = 0$.
Allerdings gilt $f_{16200,900}''(0) = -\frac{900}{4050} \neq 0$ und $f_{16200,900}''(30) = \frac{1800}{4050} = \frac{4}{9} \neq 0$. Daher sind die Übergänge sprung-, aber nicht krümmungssprungfrei.

c) $f_{16200,900}''(x) = \frac{1}{4050}(3x^2-900) = 0 \Leftrightarrow 3x^2-900 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{300} \approx \pm 17{,}32$.
$f_{16200,900}'''(x) = \frac{x}{625} = \frac{1}{625}x$
$f_{16200,900}'''(\sqrt{300}) = \frac{1}{625}\sqrt{300} > 0$ und $f_{16200,900}(\sqrt{300}) = \frac{20}{9}$: Re-Li-Wendepunkt $W(17\frac{1}{3}/22\frac{2}{9})$.

d) Es gilt $f_{b,d}(0) = \frac{d^2}{b}$. b > 16200 bewegt sich die erste Übergangsstelle bei konstantem d = 900 nach unten, analog für b < 16200 nach oben (vgl. Abbildung links). Für d > 900 verschiebt sich der zweite Übergangspunkt nach rechts und gleichzeitig wird der erste Übergangs nach oben verschoben, für d < 900 gelangt der zweite Übergangspunkt weiter nach unten und der zweite nach nach links (vgl. Abbildung rechts).





Aufgabe 5

a)	Vorteil	Nachteil
Kleeblatt (Leverkusener Kreuz)	• geringer Platzbedarf • einfache Bauweise, kostensparend • Umkehren des Kreuz möglich (zweimal abbiegen)	• hohe Staugefahr durch starkes Absenken der Geschwindigkeit (z. B. Leverkusener Kreuz)
Malteser (Köln-Ost)	• geringere Staugefahr, da Kreuz mit höherer Geschwindigkeit durchfahren werden kann.	• aufwendige Baukonstruktionen in der Mitte (vier Fahrbahnen übereinander), kostenintensiv • kein Wenden möglich
Turbine (oft in Großbritannien)	• geringere Staugefahr, da Kreuz mit höherer Geschwindigkeit durchfahren werden kann. • weniger aufwendig in der Bauweise als das Malteserkreuz	• größerer Platzbedarf als bei Kleeblattlösung • kein Wenden möglich
Windmühle (USA)	• höhere Geschwindigkeiten als bei Kleeblattkreuz möglich	• geringere Geschwindigkeiten als bei Malteser oder Turbine • kein Wenden möglich

Näheres erfährst Du unter www.wikipedia.org/wiki/Autobahnkreuz

b) Etwa in der Mitte der Trasse I liegt ein Rechts-Links-Wendepunkt. Daher wird Trasse I durch eine Funktion mindestens vierten Grades beschrieben (mindestens zwei Wendestellen bedeuten mindestens zwei Nullstellen der zweiten Ableitung, d. h. mindestens Grad zwei der zweiten und damit mindestens Grad vier bei der Funktion). Daher werden mindestens fünf Bedingungen zur Modellierung von Trasse I benötigt.

c) Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$; $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$; $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
Bedingungsgleichungen:
(1) A st sprungfrei: $f(-100) = 0 \Leftrightarrow (-100)^4a + (-100)^3b + (-100)^2c + (-100)d + e = 0$
(2) A ist knickfrei: $f'(-100) = 0 \Leftrightarrow 4(-100)^3a + 3(-100)^2b + 2(-100)c + d = 0$
(3) A ist krümmungssprungfrei: $f''(-100) = 0 \Leftrightarrow 12(-100)^2a + 6(-100)b + 2c = 0$
(4) B ist sprungfrei: $f(0) = -50 \Leftrightarrow e = -50$
(5) B ist knickfrei: $f'(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$
Mit dem GTR folgt für a, b, c: $a = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$; $b = 4 \cdot 10^{-4}$; $c = 0{,}03$. Mit d = 0 und e = -50 folgt:
$f(x) = 1{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 + 4 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 + 0{,}03 \cdot x^2 - 50 \; (-50 \le x \le 0)$

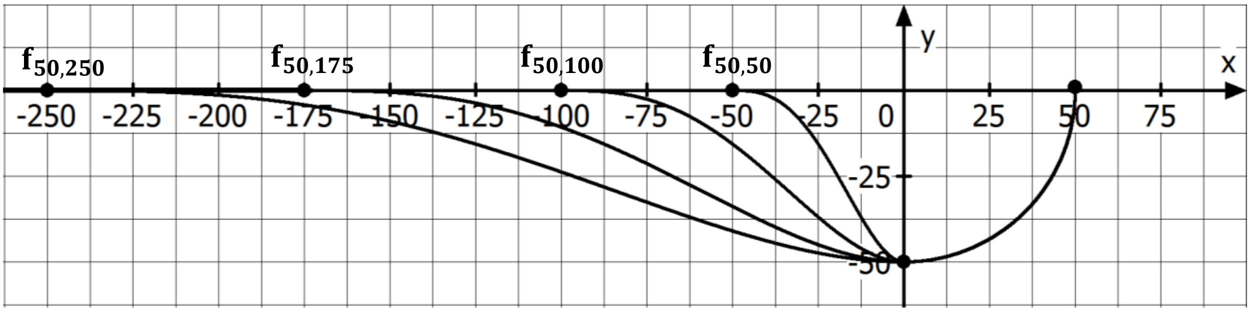
d) $f(x) = 1{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 + 4 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 + 0{,}03 \cdot x^2 - 50$; $f'(x) = 6 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 + 12 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 0{,}06 \cdot x$
$f''(x) = 18 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 24 \cdot 10^{-4} \cdot x + 0{,}06$; $f'''(x) = 36 \cdot 10^{-6} \cdot x + 24 \cdot 10^{-4}$
$f''(x) = 18 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 24 \cdot 10^{-4} \cdot x + 0{,}06 = 0 \underset{GTR}{\Longrightarrow} x = -100 \lor x = -33\frac{1}{3}$
$f'''(-100) = 36 \cdot 10^{-6} \cdot (-100) + 24 \cdot 10^{-4} = -12 \cdot 10^{-4} < 0$: -100 ist Links-Rechts-Wendestelle.
$f'''\left(-33\frac{1}{3}\right) = 36 \cdot 10^{-6} \cdot \left(-33\frac{1}{3}\right) + 24 \cdot 10^{-4} = 12 \cdot 10^{-4} > 0$: $-33\frac{1}{3}$ ist Links-Rechts-Wendestelle.

e) Da 0 eine Extremstelle von f ist, ist die Krümmung an der Stelle 0 nach dem Merksatz von Aufgabe 2 gleich $f''(0) = 0{,}06$. Dieser Wert entspricht aber nicht der Krümmung des Kreises mit dem Radius 50, der $\frac{1}{50} = 0{,}02$ beträgt. Daher hat der Übergang einen Krümmungssprung bei 0.

f) Die Funktionsschar $f_{r,t}$ mit $f_{r,t}(x) = \frac{3r}{t^4} \cdot x^4 + \frac{8r}{t^3} \cdot x^3 + \frac{6r}{t^2} \cdot x^2 - r$ besitzt die folgenden Ableitungen:
$f_{r,t}'(x) = \frac{12r}{t^4} \cdot x^3 + \frac{24r}{t^3} \cdot x^2 + \frac{12r}{t^2} \cdot x$ und $f_{r,t}''(x) = \frac{36r}{t^4} \cdot x^2 + \frac{48r}{t^3} \cdot x + \frac{12r}{t^2}$
Nun müssen die folgenden fünf Bedingungen überprüft werden:
$f_{r,t}(-t) = 0$; $f_{r,t}'(-t) = 0$; $f_{r,t}''(-t) = 0$; $f_{r,t}(0) = -r$; $f_{r,t}'(0) = 0$

$$f_{r,t}(-t) = \frac{3r}{t^4}\cdot(-t)^4 + \frac{8r}{t^3}\cdot(-t)^3 + \frac{6r}{t^2}\cdot(-t)^2 - r = 3r - 8r + 6r - r = 0$$
$$f_{r,t}'(-t) = \frac{12r}{t^4}\cdot(-t)^3 + \frac{24r}{t^3}\cdot(-t)^2 + \frac{12r}{t^2}\cdot(-t) = -\frac{12r}{t} + \frac{24r}{t} - \frac{12r}{t} = 0$$
$$f_{r,t}''(-t) = \frac{36r}{t^4}\cdot(-t)^2 + \frac{48r}{t^3}\cdot(-t) + \frac{12r}{t^2} = \frac{36r}{t^2} - \frac{48r}{t^2} + \frac{12r}{t^2} = 0$$
$$f_{r,t}(0) = \frac{3r}{t^4}\cdot 0^4 + \frac{8r}{t^3}\cdot 0^3 + \frac{6r}{t^2}\cdot 0^2 - r = -r$$
$$f_{r,t}'(-t) = \frac{12r}{t^4}\cdot 0^3 + \frac{24r}{t^3}\cdot 0^2 + \frac{12r}{t^2}\cdot 0 = 0$$

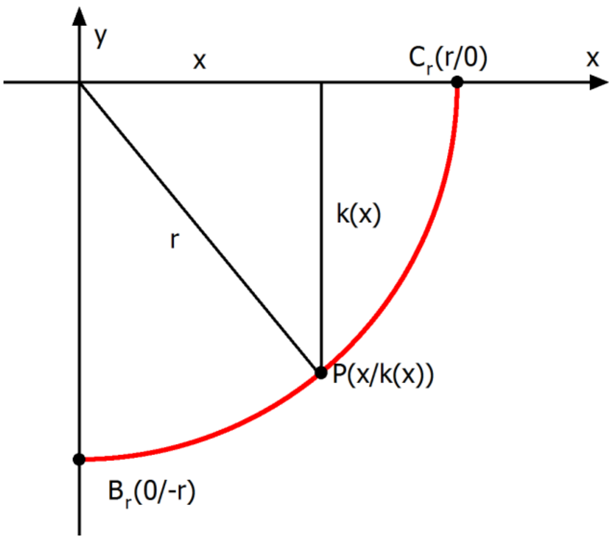
g)



Am besten geeignet ist der Graf zu $f_{50,175}$. Hier schmiegt sich ein Kreis mit dem Radius 50 in der Nähe von Null am besten an.

h) und i) Damit der Übergang B krümmungssprungfrei ist, muss nach dem Merksatz von Aufgabe 2 für die Extremstelle x = 0 gelten: $f_{r,t}''(0) = \frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{12r}{t^2} = \frac{1}{r} \Leftrightarrow 12r^2 = t^2 \underset{r,t>0}{\Longleftrightarrow} t = \sqrt{12}\cdot r \approx 3{,}46\cdot r$. Damit wird klar warum in Aufgabenteil g) $f_{50,175}$am besten geeignet zu sein scheint. Denn für einen Wert $t = \sqrt{12}\cdot 50 \approx 173$ ist bei einem Radius r = 50 die Stelle 0 krümmungssprungfrei.

j) Nach dem Satz des Pythagoras (siehe folgende) gilt: ${k_r}^2(x) + x^2 = r^2$. Umgeformt nach $k_r(x)$ ergibt sich für $0 \le x \le r$: $k_r(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Für den unteren Viertelkreis gilt daher für $0 \le x \le r$: $k_r(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$.



k) Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$; $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$; $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
Bedingungsgleichungen:
(1) A st sprungfrei: $f(-t) = 0 \Leftrightarrow (-t)^4a + (-t)^3b + (-t)^2c + (-t)d + e = 0$
(2) A ist knickfrei: $f'(-t) = 0 \Leftrightarrow 4(-t)^3a + 3(-t)^2b + 2(-t)c + d = 0$
(3) A ist krümmungssprungfrei: $f''(-t) = 0 \Leftrightarrow 12(-t)^2a + 6(-t)b + 2c = 0$
(4) B ist sprungfrei: $f(0) = -r \Leftrightarrow e = -r$

(5) B ist knickfrei: $f'(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$
Man erhält nun das LGS in für a, b und c Matrizenschreibweise:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} (-t)^4 & (-t)^3 & (-t)^2 & r \\ 4(-t)^3 & 3(-t)^2 & 2(-t) & 0 \\ 12(-t)^2 & 6(-t) & 2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} t^4 & -t^3 & t^2 & r \\ -4t^3 & 3t^2 & -2t & 0 \\ 12t^2 & -6t & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\mathrm{II}+t\cdot\mathrm{III}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} t^4 & -t^3 & t^2 & r \\ -4t^3 & 3t^2 & -2t & 0 \\ 8t^3 & -3t^2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{2\cdot\mathrm{I}+t\cdot\mathrm{II}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} t^4 & -t^3 & t^2 & r \\ -2t^4 & t^3 & 0 & 2r \\ 8t^3 & -3t^2 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{3\cdot\mathrm{II}+t\cdot\mathrm{II}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} t^4 & -t^3 & t^2 & r \\ -2t^4 & t^3 & 0 & 2r \\ 2t^4 & 0 & 0 & 6r \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} t^2 & -t & 1 & \frac{r}{t^2} \\ -2t & 1 & 0 & \frac{2r}{t^3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{3r}{t^4} \end{array}\right].$$

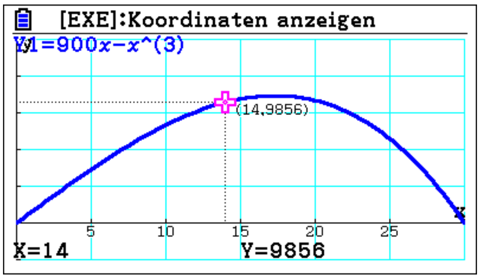
Es folgt für a, b, c: $a = \frac{3r}{t^4}$; $b = \frac{2r}{t^3} + 2t \cdot \frac{3r}{t^4} = \frac{8r}{t^3}$; $c = \frac{r}{t^2} + t\frac{8r}{t^3} - t^2\frac{3r}{t^4} = \frac{6r}{t^2}$. Mit d = 0 und e = -r erhält man die Funktionsschar $f_{r,t}$.

2.4 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

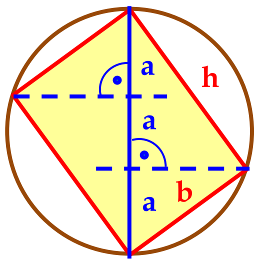
Aufgabe 1

a) Die Zielfunktion $T(b) = b \cdot (900 - b^2) = 900b - b^3$ erhält man für $0 \le b \le 30$, indem man die Nebenbedingung $b^2 + h^2 = 30^2$ (Satz des Pythagoras) nach h^2 auflöst und $h^2 = 900 - b^2$ in $T(b, h) = b \cdot h^2$ einsetzt. So hängt T nur noch von b ab. Gesucht ist nun das globale Maximum von T im Intervall [0; 30]. Dafür bestimmt man zunächst T´ und T´´: $T'(b) = 900 - 3b^2$; $T''(b) = -6b$; Setzt man T´ nun Null, folgt: $T'(b) = 900 - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow b = \pm 10\sqrt{3} \approx \pm 17{,}3$. Interessant ist nur den positive Wert, den man nun in T´´ einsetzt: $T''\left(10\sqrt{3}\right) = -60\sqrt{3} < 0$: $b = 10\sqrt{3} \approx 17{,}3$ ist lokale Maximumstelle und wegen $T(0) = 0 = T(30)$ sogar global im Intervall [0; 30]. Die dazugehörige Höhe ist $h = \sqrt{30^2 - b^2} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6} \approx 24{,}5$.

b) Man betrachte die Zielfunktion auf dem Intervall [0; 14]. Da die Funktion T für $0 \le b \le 10\sqrt{3} \approx 17{,}3$ streng monoton wachsend ist, liefert der Randwert $b = 14$ (und $h = \sqrt{900 - 14^2} \approx 26{,}5$) die gesuchte Lösung.



c)

Zimmermannsregel	Faustregel
Teile den Durchmesser eines kreisförmigen Querschnitts des Baumstammes in 3 gleiche Teile. Errichte in den Teilungspunkten jeweils das Lot. Damit erhältst du den Balkenquerschnitt. 	Breite : Höhe = 5 : 7
Nach dem Kathetensatz gilt: $b^2 = a \cdot 3a = 3a^2$ bzw. $h^2 = 2a \cdot 3a = 6a^2$ $\Rightarrow \frac{b^2}{h^2} = 0{,}5 \Rightarrow \frac{b}{h} = \sqrt{0{,}5}$ Der Wert stimmt genau mit dem berechneten Wert überein (siehe rechts)	$\frac{b}{h} = \frac{10\sqrt{3}}{10\sqrt{6}} = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}707$ $\frac{5}{7} \approx 0{,}714$ $\frac{\frac{5}{7}}{\sqrt{0{,}5}} \approx 1{,}01$ Abweichung ca. 1 %

d) Man hat als Zielfunktion $T(b) = k \cdot b \cdot (D^2 - b^2) = k \cdot (D^2 b - b^3)$ und betrachte den Parameter $k > 0$ als beliebig aber fest. Es gilt: $T'(b) = k \cdot (D^2 - 3b^2)$ und $T''(b) = -6\,k \cdot b$. Man erkennt, dass die Rechnungen die gleichen sind wie in Aufgabenteil a). Man erhält daher als optimale Breite und Höhe: $b = \frac{\sqrt{3}}{3} D$ und $h = \sqrt{D^2 - b^2} = \sqrt{D^2 - \frac{D^2}{3}} = \sqrt{\frac{2D^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, D = \frac{\sqrt{6}}{3} D$. Insbesondere gilt die Zimmermannsregel für einen beliebigen Baumdurchmesser D, da der Quotient aus b und h für jeden Durchmesser $\sqrt{0{,}5}$ ist.

Aufgabe 2

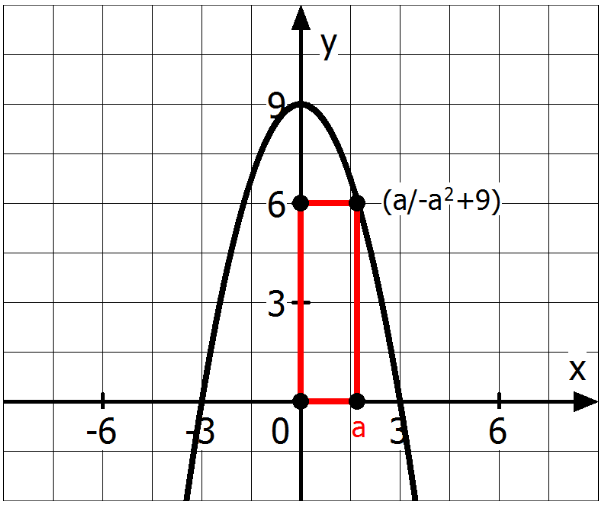
a)

Zielfunktion Flächeninhalt: $A(a) = 2a \cdot f(a) = 2a(-a^2 + 4) = -2a^3 + 8a$
Definitionsbereich: $0 \leq a \leq 2$
Globales Maximum bestimmen: $A'(a) = -6a^2 + 8$; $A''(a) = -12a$
$A'(a) = -6a^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$
Es gilt $A''\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -8\sqrt{3} < 0 \wedge A(0) = A(2) = 0$: $a = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}15$ ist globale Maximumstelle auf dem Intervall [0; 2].
Optimale Seitenlängen und maximalen Flächeninhalt bestimmen:
Breite = $\frac{4}{3}\sqrt{3}$
Höhe = $f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 + 4 = \frac{8}{3}$;
Maximaler Flächeninhalt = $\frac{4}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{9}\sqrt{3} \approx 6{,}16$.

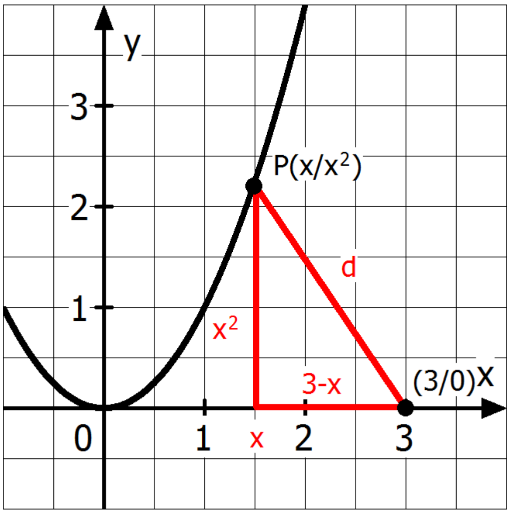
Zielfunktion Umfang: $U(a) = 4a + 2 \cdot (-a^2 + 4) = -2a^2 + 4a + 8$
Definitionsbereich: $0 \leq a \leq 2$
Globales Minimum bestimmen: $U'(a) = -4a + 4$; $U''(a) = -4$
$U'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$.
Es gilt: $U''(1) = -4 < 0 \wedge U(0) = U(2) = 8 \wedge U(1) = 10$: $a = 1$ ist globale Maximumstelle auf [0; 2].
Optimale Seitenlängen und maximalen Umfang bestimmen:
Breite = 2
Höhe = $f(1) = -1^2 + 4 = 3$;
Maximaler Umfang = 10.

b)

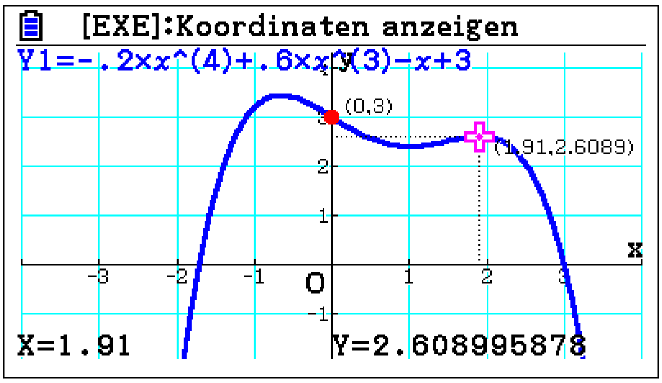
(1) Zielfunktion Flächeninhalt: $A(a) = a \cdot f(a) = a(-a^2 + 9) = -a^3 + 9a$
Definitionsbereich: $0 \leq a \leq 3$
Globales Maximum bestimmen: $A'(a) = -3a^2 + 9$; $A''(a) = -6a$
$A'(a) = -3a^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$.
Es gilt: $A''(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0 \wedge A(0) = A(3) = 0$: $a = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ ist globale Maximumstelle auf [0; 3].
Optimale Seitenlängen und maximalen Flächeninhalt bestimmen:
Breite = $\sqrt{3}$
Höhe = $f(\sqrt{3}) = -(\sqrt{3})^2 + 9 = 6$;
Maximaler Flächeninhalt = $6\sqrt{3} \approx 10{,}39$.



(2) Zielfunktion $D(x) = d^2(x) = \left(x^2\right)^2 + (3-x)^2 = x^4 + x^2 - 6x + 9$
Definitionsbereich: $0 \le a \le 3$
Globales Maximum bestimmen: $D'(x) = 4x^3 + 2x - 6$; $D''(x) = 12x^2 + 2$
$D'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = 0 \underset{\text{GTR}}{\Longleftrightarrow} x = 1.$
Es gilt: $D''(1) = 14 > 0 \wedge D(0) = 9 \wedge D(3) = 81 \wedge D(1) = 5$: a = 1 ist globale Minimumstelle von D auf dem Intervall [0; 3].
Geringsten Abstand bestimmen:
$D(1) = 5 \Rightarrow d(1) = \sqrt{5}$ ist der geringste Abstand zur Parabel. der Lotfußpunkt lautet (1/1).



(3) Zielfunktion Flächeninhalt: $A(a) = (3-a) \cdot f(a) = (3-a) \cdot \left(1 + \frac{1}{5}a^3\right) = -\frac{1}{5}a^4 + \frac{3}{5}a^3 - a + 3$
Definitionsbereich: $0 \le a \le 3$
Globales Maximum bestimmen: $A'(a) = -\frac{4}{5}a^3 + \frac{9}{5}a^2 - 1$; $A''(a) = -\frac{12}{5}a^2 + \frac{18}{5}a$
$A'(a) = -\frac{4}{5}a^3 + \frac{9}{5}a^2 - 1 = 0 \underset{\text{GTR}}{\Longleftrightarrow} a \approx 1{,}91 \vee a = 1 \vee a \approx -0{,}66$
Es gilt: $A''(1) = \frac{6}{5} > 0$: a =1 ist lokale Minimumstelle auf [0; 3].
$A''(1{,}91) \approx -1{,}88 < 0$: $a \approx 1{,}91$ ist lokale Maximumstelle auf [0; 3].
$A(0) = 3 \wedge A(3) = 0 \wedge A(1{,}91) \approx 2{,}61$
Damit ist der Randwert a = 0 auf dem Intervall [0; 3] globale Maximumstelle. Ein Blick auf die Zielfunktion verdeutlicht dies:

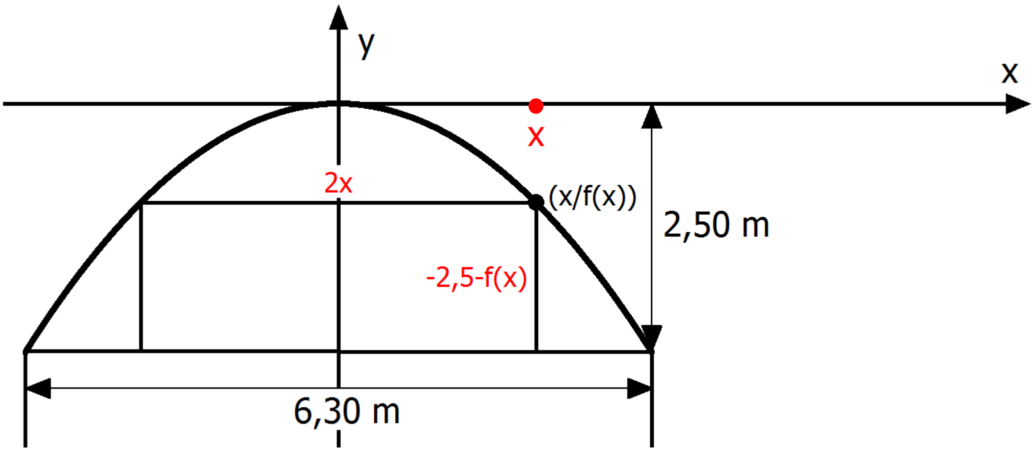


Optimale Seitenlängen und maximalen Flächeninhalt bestimmen:
Breite = 3
Höhe = f(0) = 1;
Maximaler Flächeninhalt = 3

Aufgabe 3

Schrottplatz Müller

Man legt das Koordinatensystem wie in der folgenden Abbildung beschrieben so, dass der Scheitelpunkt der nach unten geöffneten Parabel im Ursprung liegt.



Zielfunktion Flächeninhalt:
$A(x,a) = -\left(-2{,}5 - f_a(x)\right) \cdot 2x = \left(2{,}5 + f_a(x)\right) \cdot 2x$ mit $f_a(x) = ax^2$ $(a < 0)$
Nebenbedingung: (3,15/-2,5) liegt auf dem Parabelbogen: $-2{,}5 = a \cdot 3{,}15^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1000}{3969} \approx 0{,}2520$
Nebenbedingung einsetzen: $A(x) = \left(2{,}5 - \frac{1000}{3969}x^2\right) \cdot 2x = 5x - \frac{2000}{3969}x^3$
Definitionsbereich: $0 \leq x \leq 3{,}15$
Globales Maximum bestimmen: $A'(x) = 5 - \frac{6000}{3969}x^2$; $A''(x) = -\frac{12000}{3969}x$

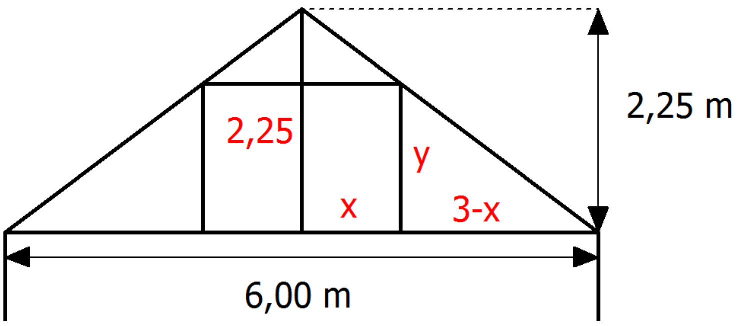
$A'(x) = 5 - \frac{6000}{3969}x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1323}{400}} = \frac{21}{20}\sqrt{3} \approx 1{,}82$

$A''(1{,}82) < 0 \;\wedge A(0) = A(3{,}15) = 0 \wedge A(1{,}82) \approx 6{,}1$: $x \approx 1{,}8$ ist globale Maximumstelle auf $[0; 3{,}15]$.
Optimale Seitenlängen und maximalen Flächeninhalt bestimmen:
Breite = 3,64 Höhe $= 2{,}5 + f(1{,}82) \approx 1{,}67$ Maximaler Flächeninhalt $= A(1{,}82) \approx 6{,}06$

[Alternative „elegantere“ Lösung: Wählt man das Koordinatensystem so, dass die untere Seite des Schildes auf der x-Achse liegt erhält man mit der Parabel mit $f(x) = 2{,}5 - \frac{1000}{3969}x^2$ dieselbe Zielfunktion wie oben: $A(x) = 2x \cdot f(x) = 2x \cdot \left(2{,}5 - \frac{1000}{3969}x^2\right) = 5x - \frac{2000}{3969}x^3$]

Schrottplatz Schmitz

Hier kommt man auch ohne Koordinatengeometrie aus. Man betrachte folgende Strahlensatzfigur:



Zielfunktion Flächeninhalt: $A(x,y) = 2x \cdot y$

Nebenbedingung: Der Strahlensatz liefert: $\frac{y}{2{,}25} = \frac{3-x}{3} \Rightarrow y = 0{,}75 \cdot (3-x)$
Nebenbedingung einsetzen: $A(x) = 2x \cdot 0{,}75 \cdot (3-x) = 4{,}5x - 1{,}5x^2$
Definitionsbereich: $0 \leq x \leq 3$
Globales Maximum bestimmen: $A'(x) = 4{,}5 - 3x$; $A''(x) = -3$
$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5$
$A''(1{,}5) = -3 < 0 \ \wedge A(0) = A(3) = 0 \wedge A(1{,}5) = 3{,}375$: $x = 1{,}5$ ist globale Maximumstelle auf [0; 3].
Optimale Seitenlängen und maximalen Flächeninhalt bestimmen:
Breite = 3 Höhe = 1,125 Maximaler Flächeninhalt = 3,375

Aufgabe 4

a)

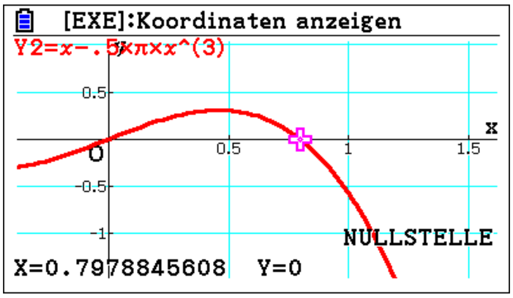
Zielfunktion: $O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ mit dem Radius r und der Höhe h
Nebenbedingung: $V = \pi r^2 h = 750 \Leftrightarrow h = \frac{750}{\pi r^2}$
Nebenbedingung einsetzen: $O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{750}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{1500}{r} = 2\pi r^2 + 1500r^{-1}$
Definitionsbereich: r, h > 0
Globales Minimum bestimmen: $O'(r) = 4\pi r - 1500r^{-2}$; $O''(r) = 4\pi + 3000r^{-3}$
$O'(r) = 4\pi r - 1500r^{-2} = 0 \underset{\cdot r^2}{\Leftrightarrow} 4\pi r^3 - 1500 = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{375}{\pi}} \approx 4{,}92$; $O''(4{,}92) > 0$
$\wedge\ O(r) = 2\pi r^2 + 1500r^{-1} \xrightarrow[r \to 0]{} +\infty$ (erster Term strebt gegen Null, zweiter gegen Unendlich)
$\wedge\ O(r) = 2\pi r^2 + 1500r^{-1} \xrightarrow[r \to +\infty]{} +\infty$ (erster Term strebt gegen Unendlich, zweiter gegen Null)
$O\left(\sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}\right) = 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}\right)^2 + \frac{1500}{\sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}} \approx 457$ [cm²]
Daher nimmt O bei $r = \sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}$ sein globales Minimum an.
Optimale Maße der Dose und minimale Oberflächeninhalt bestimmen:
Durchmesser = $2\sqrt[3]{\frac{375}{\pi}} \approx 9{,}84$ [cm] Höhe = $\frac{750}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}\right)^2} \approx 9{,}85$ [cm] Minimale Oberfläche = 457 cm²

b)

(1) Zielfunktion: $O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ mit dem Radius r und der Höhe h
Nebenbedingung: $V = \pi r^2 h = 330 \Leftrightarrow h = \frac{330}{\pi r^2}$ (0,33 l = 330 cm³)
Nebenbedingung einsetzen: $O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{330}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{660}{r} = 2\pi r^2 + 660r^{-1}$
Definitionsbereich: r, h > 0
Globales Minimum bestimmen: $O'(r) = 4\pi r - 660r^{-2}$; $O''(r) = 4\pi + 1320r^{-3}$
$O'(r) = 4\pi r - 660r^{-2} = 0 \underset{\cdot r^2}{\Leftrightarrow} 4\pi r^3 - 660 = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \approx 3{,}74$; $O''(3{,}74) > 0$
$\wedge\ O(r) = 2\pi r^2 + 660r^{-1} \xrightarrow[r \to 0]{} +\infty$ (erster Term strebt gegen Null, zweiter gegen Unendlich)
$\wedge\ O(r) = 2\pi r^2 + 660r^{-1} \xrightarrow[r \to +\infty]{} +\infty$ (erster Term strebt gegen Unendlich, zweiter gegen Null)
$O\left(\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}\right) = 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}\right)^2 + \frac{660}{\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}} \approx 264$ [cm²]
Daher nimmt O bei $r = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$ sein globales Minimum an.
Optimale Maße der Dose und minimale Oberflächeninhalt bestimmen:
Durchmesser = $2\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \approx 7{,}48$ [cm] Höhe = $\frac{330}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}\right)^2} \approx 7{,}48$ [cm] Minimale Oberfläche = 264 cm²

(2) Zielfunktion: $V(r,h) = \pi r^2 h$ mit dem Radius r und der Höhe h
Nebenbedingung: $O = \pi r^2 + 2\pi rh = 2 \Leftrightarrow h = \frac{2-\pi r^2}{2\pi r} = \frac{1}{\pi r} - \frac{1}{2}r$

Nebenbedingung einsetzen: $V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2\left(\frac{1}{\pi r} - \frac{1}{2}r\right) = r - \frac{1}{2}\pi r^3$



Definitionsbereich: Die Funktion macht nur Sinn für positives Volumen. Daher muss gelten wegen r > 0: $\pi r^2\left(\frac{1}{\pi r} - \frac{1}{2}r\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\pi r} - \frac{1}{2}r > 0 \underset{\cdot\, r>0}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}r^2 > 0 \Leftrightarrow r^2 < \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow r < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0{,}80$.

Also gilt $0 < r < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0{,}8$

Globales Maximum bestimmen: $V'(r) = 1 - 1{,}5\pi r^2;\ V''(r) = -3\pi r$

$V'(r) = 1 - 1{,}5\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \approx 0{,}46;\ V''\left(\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\right) < 0$

$\wedge\ V(r) = r - \frac{1}{2}\pi r^3 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$

$\wedge\ V\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) = 0$

$V\left(\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\right) = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} - \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\right)^3 \approx 0{,}307\ [m^3]$

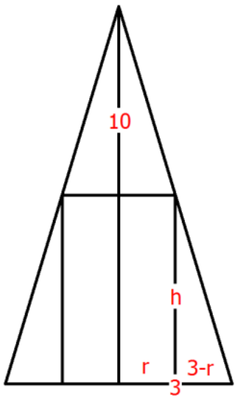
Daher nimmt V bei $r = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}$ sein globales Maximum an.

Optimale Maße der Dose und minimale Oberflächeninhalt bestimmen:

Radius $= \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \approx 0{,}46$ [m] Höhe $= \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{2}{3\pi}}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3\pi}} \approx 0{,}46$ [m] Maximales Volumen = 0,307 m^3

(3) Zielfunktion Volumen: $V(r, h) = \pi r^2 h$

Nebenbedingung: Der Strahlensatz liefert: $\frac{h}{10} = \frac{3-r}{3} \Rightarrow h = \frac{10}{3}\cdot(3 - r)$



Nebenbedingung einsetzen:

$V(r) = \frac{10}{3}\pi r^2\cdot(3 - r) = 10\pi r^2 - \frac{10}{3}\pi r^3$

Definitionsbereich: $0 \le r \le 3$

Globales Maximum bestimmen: $V'(r) = 20\pi r - 10\pi r^2;\ V''(r) = 20\pi - 20\pi r$

$V'(r) = 20\pi r - 10\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow 2r - r^2 = 0 \Leftrightarrow r(2 - r) = 0 \Leftrightarrow r = 2$ (da r > 0)

$V''(2) = -20\pi < 0\ \wedge V(r) \underset{r\to 0}{=\!\!\longrightarrow} 0 \wedge\ V(3) = 0 \wedge V(2) = \frac{40}{3}$: x = 2 ist globale Maximumstelle auf [0; 3].

Optimale Seitenlängen und maximalen Flächeninhalt bestimmen:

Breite = 4 cm Höhe $= \frac{10}{3}$ cm Maximaler Flächeninhalt $= \frac{40}{3}$ cm2

Kontrollergebnisse für die 1er-Aufgabe: a) Radius r ≈ 2,67 cm, Höhe h ≈ 3,33 cm b) Radius r ≈ 3,03 cm, Höhe h ≈ 2,42 cm.

Aufgabe 5

a)

Beispiel für eine mögliche Begründung: Eine kleine Erhöhung wird man akzeptieren, wenn die Qualität stimmt. Weniger Kunden wird es erst bei einer kräftigeren Erhöhung geben. Dann ist aber auch zu rechnen, dass gleich „überproportional" viele Kunden abspringen.

b)

Zielfunktion bestimmen: Die Kosten K, die Einnahmen E und der dazugehörige Gewinn $G = E - K$ hängen von der Anzahl n der Preiserhöhungen und dem damit verbundenen Käuferschwund KS ab. Für K, E und G (in €) gilt $K = 90 + (250 - KS) \cdot 1{,}2$ und $E = (250 - KS) \cdot (1{,}8 + 0{,}1n)$. Die Zielfunktion lautet in Abhängigkeit von KS und n: $G(KS; n) = (250 - KS) \cdot (1{,}8 + 0{,}1n) - [90 + (250 - KS) \cdot 1{,}2]$.
Nebenbedingung: $KS = n^2$.
Definitionsbereich: $0 \le n < 15$ (falls n ganzzahlig ist, sonst 15,81); $0 \le KS < 250$.
KS in die Zielfunktion einsetzen: $G(n) = \mathbf{(250 - n^2)} \cdot (1{,}8 + 0{,}1n) - [90 + \mathbf{(250 - n^2)} \cdot 1{,}2] = \mathbf{(250 - n^2)} \cdot (1{,}8 + 0{,}1n) - 90 - \mathbf{(250 - n^2)} \cdot 1{,}2 = \mathbf{(250 - n^2)} \cdot (1{,}8 + 0{,}1n - 1{,}2) - 90 = \mathbf{(250 - n^2)} \cdot (0{,}6 + 0{,}1n) - 90 = -0{,}1n^3 - 0{,}6n^2 + 25n + 150 - 90 = -0{,}1n^3 - 0{,}6n^2 + 25n + 60$
Nun **maximiert** man **die Gewinnfunktion** in Abhängigkeit von n:
$G'(n) = -0{,}3n^2 - 1{,}2n + 25$. Dann gilt: $G'(n) = 0 \Rightarrow n \approx 7{,}3$ (die zweite Lösung ist -11,3 und ist nicht Teil des Definitionsbereichs). G´ wechselt bei 7,3 das VZ von + nach – (z. B. $G'(0) = 25$ und $G'(10) = -17$): 7,3 ist lokale Maximumstelle. Das Maximum beträgt $G(7{,}3) = 171{,}62$.
Ränder untersuchen: Wegen $G(0) = 60$ und $G(15) = -37{,}5$ ist 7,3 globale Maximumstelle.
Ergebnis formulieren/Interpretation im Sachzusammenhang: Geht man von einer Preiserhöhung aus, die ein ganzzahliges Vielfaches von 10 ct beträgt, dann ergibt sich wegen $G(7) = 171{,}3$ sowie $G(8) = 170{,}7$ ein maximaler Gewinn (170,30 €) bei einer Erhöhung um 70 ct, d. h. einem Verkaufspreis von 2,50 €. Würde man eine beliebige ganzzahlige Preiserhöhung zulassen, betrüge der Gewinn bei einer Erhöhung um 73 ct 171,62 €.

Aufgabe 6

a)

Für den Verkaufspreis x (in €) und den Gesamtgewinn G gilt (N ist die Anzahl der 0,25 Euro-Preissenkungsschritte):

Verkaufspreis	Anzahl N	verkaufte Menge	Einnahmen	Kosten	Gewinn
10,00 €	0	10 000 kg	100 000 €	55 000 €	45 000 €
9,50 €	2	14 000 kg	133 000 €	77 000 €	56 000 €
6,00 €	16	42 000 k g	252 000 €	231 000 €	21 000 €

b)

Lösung 1 (Gewinnfunktion in Abhängigkeit von N):
$E(N) = (10000 + 2000N) \cdot (10 - 0{,}25N)$ und $K(N) = (10000 + 2000N) \cdot 5{,}5$. Der Verkaufspreis ist darstellbar durch $x = 10 - 0{,}25N$.
Zielfunktion: $G(N) = E(N) - K(N) = \mathbf{(10000 + 2000N)} \cdot (10 - 0{,}25N) - \mathbf{(10000 + 2000N)} \cdot 5{,}5 = \mathbf{(10000 + 2000N)} \cdot (10 - 0{,}25N - 5{,}5) = (10000 + 2000N) \cdot (4{,}5 - 0{,}25N) = 45000 + 6500N - 500N^2$.
Definitionsbereich von G: $0 \le N \le 40$.
Maximieren von G in Abhängigkeit von N: Der zugehörige Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, das globale Maximum tritt also im Scheitelpunkt auf. $G'(N) = -1000N + 6500 \Rightarrow G'(N) = 0 \Leftrightarrow N = 6{,}5 \Rightarrow x = 8{,}375$. Für $x = 8{,}38$ gilt $N = 6{,}52$ bzw. für $x = 8{,}37$ gilt $N = 6{,}52$ $(N = 40 - 4x)$.

Antwort im Sachzusammenhang: Da ein Verkaufspreis mit 0,5 ct im Einzelhandel nicht sinnvoll ist und G (6,52) = G (6,48) gilt (warum?), kann die Kaffeerösterei den Preis auf 8,37 € = 10 € – 0,25 · 6,48 € oder 8,38 € = 10 € – 0,25 · 6,52 € pro Kilogramm festlegen. Der Gewinn beträgt dabei in beiden Fällen 66 124,80 €.

Alternativlösung (Gewinnfunktion in Abhängigkeit vom Verkaufspreis x):
x ist der Verkaufspreis und N die Anzahl der 0,25 €-Ermäßigungen. E(x; N) = (10000 + 2000N) · x und K(x; N) = (10000 + 2000N) · 5,5.
Zielfunktion in Abhängigkeit von x und N: G(x; N) = E(x; N) – K(x; N) = **(10000 + 2000N)** · x – **(10 000 + 2000N)** · 5,5 = **(10 000 + 2000N)** · (x – 5,5)
Nebenbedingung: x = 10 – 0,25 N ⇔ N = 40 – 40x
Definitionsbereich: $D_G = \{ x \mid 5{,}5 \leq x \leq 10 \}$
Einsetzen in G(x; N): G(x; N) = (10 000 + 2000 · (40 – 4x)) · (x – 5,5) = (10 000 + 80 000 – 8000x) · (x – 5,5) = (-8000x + 90 000) · (x – 5,5) =$-8000\,x^2 + 134\,000\,x - 495\,000$
Maximieren von G in Abhängigkeit vom Kaufpreis x: Der zugehörige Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, das Maximum tritt also im Scheitelpunkt auf. $G'(x) = -16\,000\,x + 134\,000 \Rightarrow G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 8{,}375$
Antwort im Sachzusammenhang: Da ein Verkaufspreis mit 0,5 ct im Einzelhandel nicht sinnvoll ist und G(8,37) = G(8,38) gilt, kann die Kaffeerösterei den Preis auf 8,37 € oder 8,38 € pro Kilogramm festlegen. Der Gewinn beträgt dabei jeweils 66 124,80 €.

c)

Kritikpunkte: Der Zusammenhang von Preisreduzierung und Absatz ist unrealistisch, die Selbstkosten pro Tag sind nicht konstant. Ein realistischerer Ansatz konnte z. B. durch einen quadratischen oder kubischen Zusammenhang von Preisreduzierung und Absatzmenge erfolgen.

Aufgabe 7

a)

Für die durchschnittlichen Herstellungskosten H gilt: $H(x) = \frac{K(x)}{x} = 2x^2 - 16x + 48 + 100x^{-1}$.
Der Definitionsbereich von H ist $0 < x \leq 9$ (warum?).
Für die Ableitung H´ gilt $H'(x) = 4x - 16 - 100x^{-2}$. Setzt man H´ Null ergibt sich $4x - 16 - 100x^{-2} = 0$. Multipliziert man beide Seiten mit $x^2 > 0$ erhält man $4x^3 - 16x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 25 = 0$. Mithilfe des GTR erhält man die einzige Lösungen 5 (z. B. über MENU A). Wegen H´(5) = 0, H´(4) = -25 < 0 und H´(6) = 47 > 0 (VZW von – nach +) besitzt H an der Stelle 5 ein lokales Minimum, das sogar global ist, da H für kleine Werte von x sehr groß wird und auch H(9) ≈ 77,11 größer als H(5) = 38 ist.
Antwort: Bei einer Produktionsmenge von 5000 Einheiten sind die durchschnittlichen Produktionskosten minimal.

b)

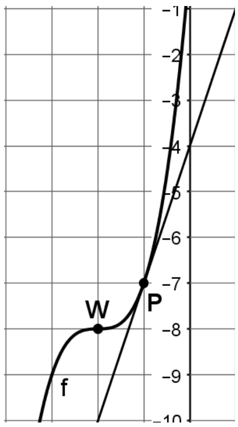
Zielfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = -18\,x^3 + 16\,x^2 + 96\,x - 100$.
Definitionsbereich: $0 \leq x \leq 9$.
Globales Maximum bestimmen: $G'(x) = -54\,x^2 + 32\,x + 96$; $G'(x) = 0 \Rightarrow x_1 \approx 1{,}662$; $x_2 \approx -1{,}07 < 0$ (entfällt), G´(1) = 74 > 0, G´(2) = -56 < 0 (VZW von G´ von + nach –): Also liegt bei x_1 ein lokales Maximum vor. Für die Randwerte gilt G(0) = −100; G(9) = −11 062 (Maximum global).
Antwort: Bei einer Produktionsmenge von ca. 1662 Einheiten ist der Gewinn maximal.

2.5 Kontrollaufgaben

Aufgabe 1

a)

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x = x \cdot (x^2 + 6x + 12) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee x^2 + 6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, denn die Diskriminante von der quadratischen Gleichung in Normalform lautet $D = 3^2 - 12 = -3 < 0$.



b)

$f'(-1) = 3$ entspricht der Steigung der Tangente an der Stelle -1 (im Punkt P).

c)

$t(x) = f'(-1) \cdot x - 4 = 3x - 4$ (von P erreicht man die Schnittstelle mit der y-Achse, indem man von P eine Einheit nach rechts und drei Einheiten nach oben geht.)

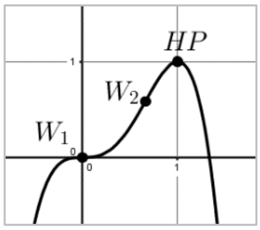
d)

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 12, f''(x) = 6x + 12, f''(x) = 6$.
Es gilt: $f'(-2) = f''(-2) = 0, f'''(-2) = 6 > 0$ (ReLiPo) und $f(-2) = -8$.
Daher ist W(-2/-8) ein Sattelpunkt

Aufgabe 2

a)

Die Aussage ist falsch, da es Graphen ganzrationaler Funktionen gibt, die nach einem Sattelpunkt (W_1) zunächst einen Wendepunkt (W_2) haben, bevor ein Extrempunkt (HP) vorliegt. Z . B. für den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -3x^4 + 4x^3$ (siehe rechts)



b)

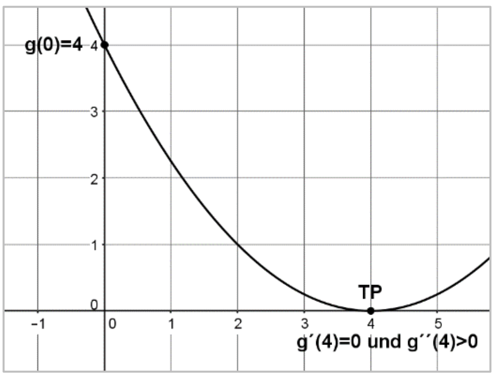
Die Aussage ist richtig, da die Krümmung an den beiden benachbarten Extrempunkten unterschiedlich sein muss und daher dazwischen ein Krümmungswechsel erfolgen muss.

c)

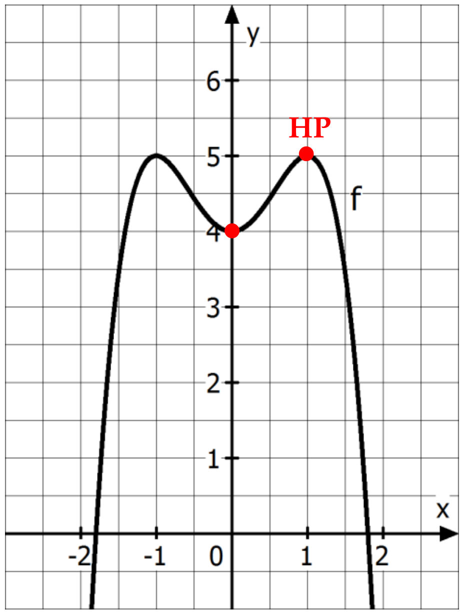
Die Aussage ist richtig, da der Graph der Ableitungsfunktion eine Parabel zweiter Ordnung ist, die mit dem Scheitelpunkt einen Extrempunkt besitzt.

Aufgabe 3

a)



b)



Zu (1)

Die Funktion f ist gerade $\Rightarrow f(x) = ax^4 + bx^2 + c$
(I) $f(0) = 4$
(II) $f(1) = 5$
(III) $f'(1) = 0$

Zu (2)

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$
(I) $f(0) = 4 \Rightarrow c = 0$
(II) $f(1) = 5 \Rightarrow a + b + c = 5 \underset{c=0}{\Leftrightarrow} a + b = 5$
(III) $f'(1) = 0 \Rightarrow 4a + 2b = 0$
(III) + (-2)$\cdot$(II): $2a = -10 \Leftrightarrow a = -5 \underset{a \text{ in } (2)}{\Longrightarrow} b = 10$
Also: $f(x) = -5x^4 + 10x^2$

Aufgabe 4

a)

$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ (Funktion ist wegen der Achsensymmetrie des Graphen gerade)
$f'(x) = 4ax^3 + 2bx,\ \ f''(x) = 12ax^2 + 2b,$
$f(1) = 3$: $a + b + c = 3$, (II) $f''(1) = 0$: $12a + 2b = 0$ (III) $f'(1) = -2$: $4a + 2b = -2 \Leftrightarrow 2a + b = -1$.
Man erhält das LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 12 & 2 & 0 & 0. \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Mit dem GTR erhält man die Lösung: a = 0,25, b = -1,5 und c = 4,25.

b)

$f(x) = ax^3 + bx$ (Funktion ist wegen der Punktsymmetrie des Graphen ungerade)
$f'(x) = 3ax^2 + b,$
(I) $f(1) = 2$: $a + b = 2$, (II) $f'(1) = 0$: $3a + b = 0$.
(II) – (I) ergibt $2a = -2$ bzw. $a = -1$ und damit $b = 3$.

c)

Ansatz $f(x) = x^2 + ax + b$.
Bedingung (1) $f(3) = 0 \Leftrightarrow 9 + 3a + b = 0 \Leftrightarrow b = -9 - 3a$. Daher folgt $f_a(x) = x^2 + ax - 9 - 3a$.
$f_a(x) = x^2 + ax - 9 - 3a = 0$. Die Diskriminante lautet: $D = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + 9 + 3a = \frac{a^2}{4} + 3a + 9$. Die Diskriminante ist Null genau dann, wenn $\frac{a^2}{4} + 3a + 9 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 12a + 36 = 0 \Leftrightarrow (a+6)^2 = 0$.
Also für $a = -6$ ist die Diskriminante Null. Der Graph zu f_{-6} hat daher genau eine Nullstelle. Für alle anderen Parameter von a hat die Funktion genau zwei Nullstellen $-\frac{a}{2} \pm \sqrt{D} = -\frac{a}{2} \pm |a + 6|$

Aufgabe 4

a)

$g(x) = g_{AC}(x) = 5x$ und $h(x) = g_{BD}(x) = -2x + 12$

b)

Ein sprungfreier Übergang bedeutet, dass eine Straße ohne Lücke in die andere Straße übergeht. Ein knickfreier Übergang bedeutet, dass die beiden Straßen im Übergangspunkt die gleiche Steigung haben.

c)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Bedingungen aufstellen:
(I) f(0) = g(0) = 0, (II) f´(0) = g´(0) = 5; (III) f(4) = h(4) = 4, (IV) f´(4) = h´(4) = -2
Aus (I) folgt d = 0 und aus (II) unmittelbar c = 5. (III) und (IV) ergeben folgendes LGS:
(III) 64a + 16b + 4c + d = 4 und (IV) 48a + 8b + c = -2. Setzt man c und d ein, ergibt sich:
(III) 64a + 16b = -16 und (IV) 48a + 8b = -7.
Mit dem GTR erhält man: a = 0,0625 und b = -1,25
Also: $f(x) = 0{,}0625x^3 - 1{,}25x^2 + 5x$ und $f'(x) = 0{,}1875x^2 - 2{,}5x + 5$

d)

Es müsste eine Parabel mit einer Funktionsgleichung der Form $p(x) = ax^2 + 5x$ sein, da der Punkt A als Koordinatenursprung ein knick- und sprungfreier Übergang ist. Mit f(4) = 4 ergibt sich die Gleichung 16a + 20 = 4 oder a = -1. Damit gilt für die Funktionsgleichungen der Funktionen von p und p´ $p(x) = -x^2 + 5x$ und $p'(x) = -2x + 5$. Wegen $p'(4) = -2 \cdot 4 + 5 = -3$ ist der Übergang nicht knickfrei. Eine Parabel hat in der obigen Situation mindestens einen Übergang der nicht knickfrei ist.

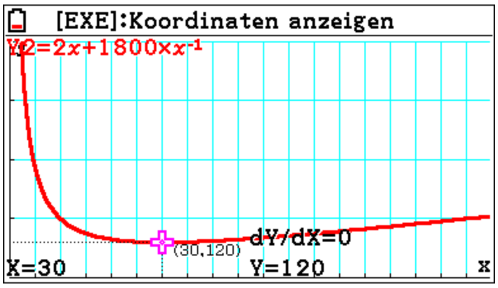
e)

$f''(x) = 0{,}375x - 2{,}5$
$f''(0) = -2{,}5 \neq g''(0) = 0$ und f´´(4) = -1 $\neq h''(0) = 0$
Ein Graph mit krümmungssprungfreien Übergängen A und B kann durch eine GRF vom Grad fünf modelliert werden (es kommen zwei Bedingungen dazu). Wenn es einen Graphen einer GRF vierten Grades gäbe, für den an den knick- und sprungfreien Übergangsstellen die zweite Ableitung den Wert Null annimmt, könnte das Problem auch durch eine Funktion vierten Grades beschrieben werden (denn dann würde f´´(0) = g´´(0) = 0 und f´´(4) = h´´(4) = 0 gelten).

Aufgabe 6

a)

Zielfunktion: $U(x; y) = 2x + 2y$;
Definitionsbereich: x und y sind positiv.
Nebenbedingung: $900 = x \cdot y$. Formt man diese Bedingung nach y um, erhält man $y = \frac{900}{x}$.
Einsetzen der NB in Zielfunktion: Setzt man y in die Zielfunktion ein, ergibt sich:
$U(x) = 2x + \frac{1800}{x} = 2x + 1800x^{-1}$.
Globales Minimum bestimmen:
$U'(x) = 2 - 1800x^{-2} = 0 \underset{\cdot x^2}{\Rightarrow} 2x^2 - 1800 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 900 \Leftrightarrow x = 30 \Rightarrow y = \frac{900}{30} = 30$.
Wegen $U'(29) \approx -0{,}14 < 0$ und $U'(31) = 0{,}13 > 0$ sowie $U(x) \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$ und $U(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ nimmt U für x = y = 30 ein globales Minimum an.
Antwort: Für x = y =30 cm beträgt der minimale Umfang 120 cm
[Lösung und Argumentation mit GTR möglich, allerdings müssen alle Ansätze und Ableitungen angegeben werden.]



b)

Zielfunktion: $O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ mit dem Radius r und der Höhe h
Nebenbedingung: $V = \pi r^2 h = 500 \Leftrightarrow h = \frac{500}{\pi r^2}$
Nebenbedingung einsetzen: $O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{500}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r} = 2\pi r^2 + 1000r^{-1}$
Definitionsbereich: r, h > 0
Globales Minimum bestimmen: $O'(r) = 4\pi r - 1000r^{-2};\ O''(r) = 4\pi + 2000r^{-3} > 0$
$O'(r) = 4\pi r - 1000r^{-2} = 0 \underset{\cdot r^2}{\Leftrightarrow} 4\pi r^3 - 1000 = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \approx 4{,}30;\ O''(4{,}30) > 0$
$\wedge\ O(r) = 2\pi r^2 + 1000r^{-1} \xrightarrow[r\to 0]{} +\infty$ (erster Term strebt gegen Null, zweiter gegen Unendlich)
$\wedge\ O(r) = 2\pi r^2 + 1000r^{-1} \xrightarrow[r\to +\infty]{} +\infty$ (erster Term strebt gegen Unendlich, zweiter gegen Null)
$O\left(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}\right) = 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}\right)^2 + \frac{1000}{\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}} \approx 348{,}73$ [cm²]
Daher nimmt O bei $r = \sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}$ sein globales Minimum an.
Optimale Maße der Dose und minimale Oberflächeninhalt bestimmen:
Durchmesser $= 2\sqrt[3]{\frac{375}{\pi}} \approx 8{,}60$ [cm] Höhe $= \frac{750}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}\right)^2} \approx 8{,}60$ [cm] Minimale Oberfläche = 349 cm²

c)

Zielfunktion: $V(x;y) = 2x^2 \cdot y$;
Definitionsbereich: $0 \le x, y \le 2$
Nebenbedingung: $2 = 6x + 4y$. Formt man diese Bedingung nach y um, erhält man $y = 0{,}5 - 1{,}5x$.
Einsetzen der NB in die Zielfunktion: $V(x) = 2x^2 \cdot (0{,}5 - 1{,}5x) = x^2 - 3x^3$
Bestimmung des globalen Maximums:
$V'(x) = 2x - 9x^2 = x \cdot (2 - 9x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (sinnlos) oder $x = \frac{2}{9}$. Mit $V''(x) = 2 - 18x$ ergibt sich $V''\left(\frac{2}{9}\right) = 2 - 18 \cdot \frac{2}{9} = -2 < 0$. Ferner gilt $V(0) = 0$ und $V(2) = -20$. Daher nimmt das Volumen sein globales Maximum für $x = \frac{2}{9}$ an.
Antwort: Die Länge beträgt ca. 22 cm die Breite (2x) beträgt ca. 44 cm und die Höhe (y) etwa 17 cm.

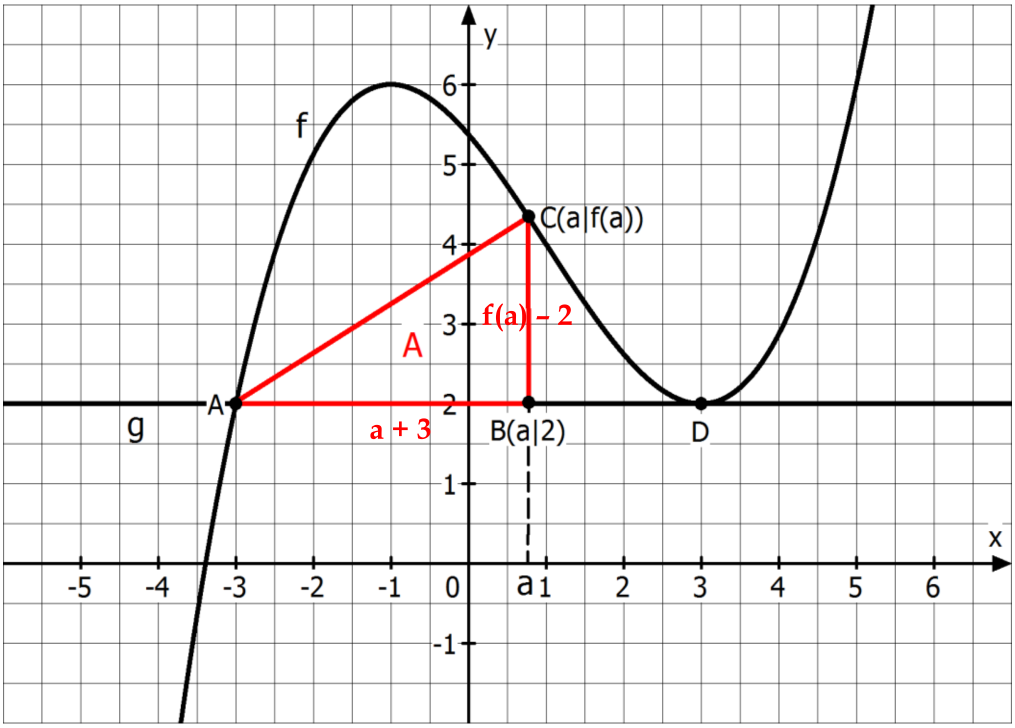
d)

Der Graf der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x + 43)$ schneidet die Gerade g mit g(x) = 2 in den Punkten A(-3/2) und D(3/2) (vgl. Abbildung). Für -3 ≤ a ≤ 3 bilden die Punkte A, B(a/2) und C(a/f(a)) ein Dreieck. **Bestimme** a, so dass dieses Dreieck maximalen Flächeninhalt hat.

Zielfunktion: $A(a) = \frac{1}{2}(a+3) \cdot [f(a) - 2] = \frac{1}{2}(a+3) \cdot \left[\frac{1}{8}(a^3 - 3a^2 - 9a + 43) - 2\right] = \frac{1}{16}(a+3) \cdot (a^3 - 3a^2 - 9a + 27) = \frac{1}{16}(a^4 - 18a^2 + 81)$
Definitionsbereich: $-3 \le a \le 3$
Globales Maximum bestimmen: $A'(a) = \frac{1}{16}(4a^3 - 36a);\ A''(a) = \frac{1}{16}(12a^2 - 36)$

$A'(a) = \frac{1}{16}(4a^3 - 36a) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}a(a^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = \pm 3;\ A''(0) = -\frac{9}{4} < 0;\ A''(3) = \frac{72}{16} = \frac{9}{2} <$ $0;\ A(-3) = A(3) = 0;\ A(0) = \frac{81}{16} = 5{,}0625 \Rightarrow 0$ ist auf $[-3; 3]$ eine globale Maximumstelle.

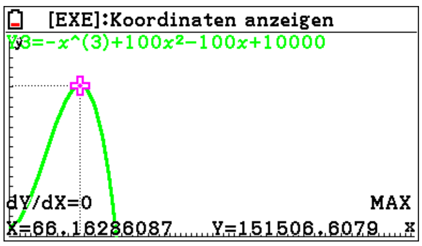
Antwort: Für a = 0 wird der Flächeninhalt des Dreiecks mit einer Länge der Grundseite von 3 cm und der Höhe von f(0) – 2 = $\frac{27}{8}$ = 3,375 cm maximal und beträgt $\frac{81}{16}$ = 5,0625 cm².



Aufgabe 7

a)

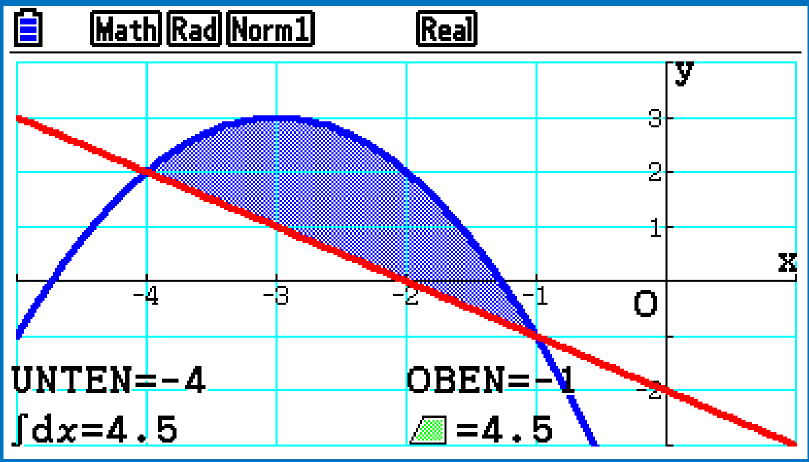
Seien x der Preisreduzierung in Euro, K(x) die monatlichen Kosten, E(x) die monatlichen Einnahmen und $G(x) = E(x) - K(x)$ der Gewinn. Dann gilt:
$K(x) = (100 + x^2) \cdot 100 = 10000 + 100x^2$
$E(x) = (100 + x^2) \cdot (200 - x) = 20000 + 200x^2 - 100x - x^3$.
Zielfunktion:
$G(x) = 20000 + 200x^2 - 100x - x^3 - 10000 - 100x^2 = -x^3 + 100x^2 - 100x + 10000$
Definitionsbereich: x > 0
Globales Maximum bestimmen: $G'(x) = -3x^2 + 200x - 100;\ G''(x) = -6x + 200$
$G'(x) = -3x^2 + 200x - 100 = 0 \underset{GTR}{\Longleftrightarrow} x \approx 66{,}16 \vee x \approx 0{,}51;$
$G''(66{,}16) \approx -197 < 0;\ G''(0{,}51) \approx 197 > 0;\ G(0) = 10000;\ G(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} -\infty;\ G(66{,}16) \approx 151507$
⇒ G wird für 66,16 global maximal.
Antwort: Für eine Preisreduzierung von 66,16 € pro Stück wird der Gewinn mit 151507 am größten. Die dazugehörige Verkaufszahl beträgt etwa $100 + 66{,}16^2 \approx 4477$ Stück pro Monat. [Alternativ kann auch ein grafischer Nachweis erfolgen. Allerdings müssen dabei alle Ableitungen und Ansätze gemacht werden.]



b)

Sei N die Anzahl der monatlich verkauften Flaschen und x die Preisreduzierung. Dann gilt für N: $N = 100 + x^2$. Formt man diese Gleichung nach x um, erhält man $x = \sqrt{N - 100}$. Damit gilt für den Gewinn: $G(N) = E(N) - K(N) = N \cdot (200 - x) - N \cdot 100 = N \cdot \left(100 - \sqrt{N - 100}\right)$.

Lektion 3: Integralrechnung



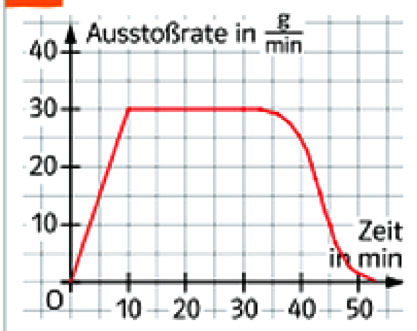
Lektion 3: Integralrechnung

3.1 Flächen und Wirkungen

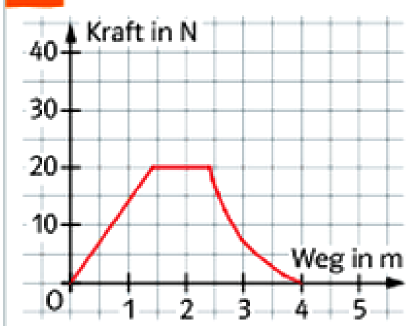
Erkundung: Flächeninhalte haben ihre Bedeutung[45]

1 Bei einem Handballspiel werden die Zuschauer 1,5 h vor Spielbeginn in die Halle gelassen.	**2** Ein Auto wird über 4 m mit einer sich verändernden Kraft angeschoben.	**3** In einer Messstelle einer Ölpipeline wird zu jedem Zeitpunkt die durchfließende Ölmenge gemessen.
4 Aus dem Pegelstand eines Flusses kann auf die Abflussmenge pro Minute geschlossen werden.	**5** Ein Auto fährt 25 Minuten lang auf einer wenig befahrenen Autobahnstrecke.	**6** Im Kamin eines Kraftwerks wird ständig die in der Abluft enthaltene Menge eines Schadstoffs gemessen.

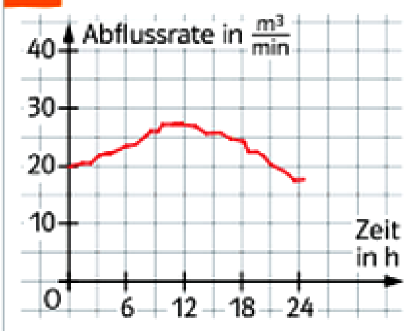
A



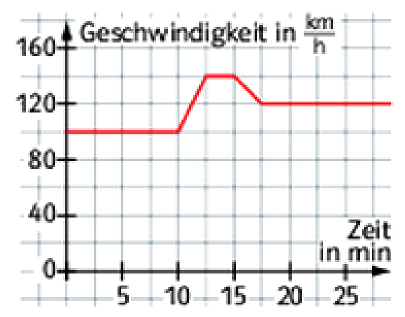
B



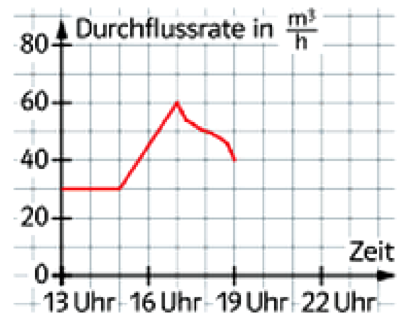
C



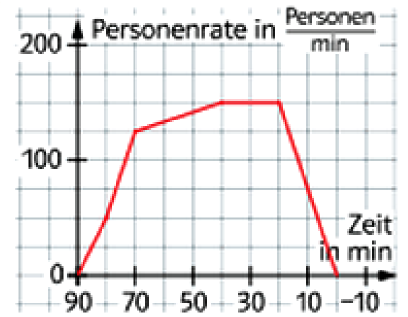
D



E



F



Ergebnis 1 Ca. 34 320 m³	**Ergebnis 2** Ca. 9750 Personen	**Ergebnis 3** Ca. 251 m³
Ergebnis 4 Ca. 47 Nm	**Ergebnis 5** Ca. 47,9 km	**Ergebnis 6** Ca. 1110 g

a) **Ordne begründend** jeweils einen Sachkontext 1 bis 6 einem Grafen A bis F und einem Ergebnis 1 bis 6 **zu**. **Vervollständige** das Ergebnis zu einem Antwortsatz.

b) **Kontrolliere**, ob die Ergebnisse stimmen und können. **Erläutere** Dein Vorgehen und **notiere** Deine Rechnungen.

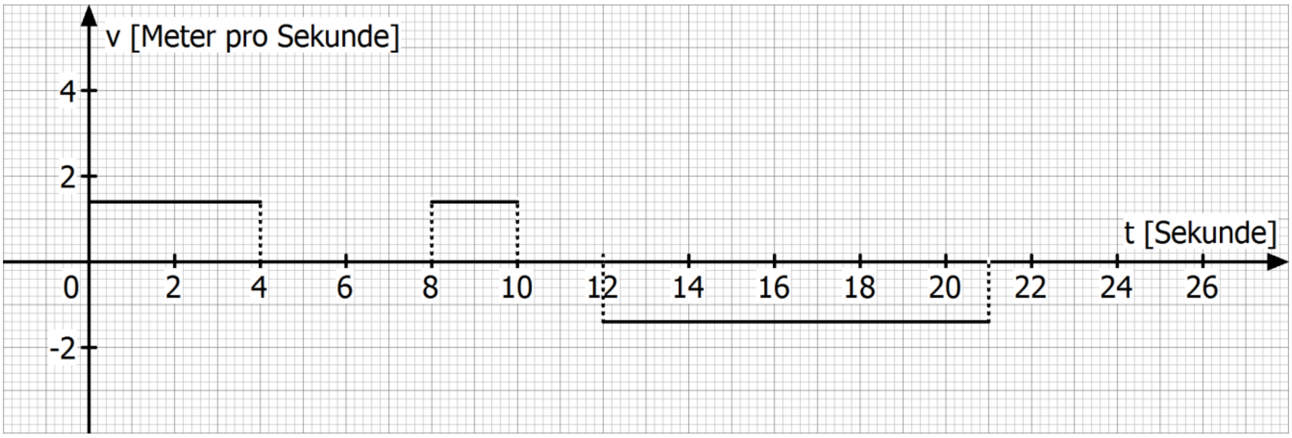
c) **Ermittle** einen Zusammenhang zwischen den Einheiten der beiden Achsen und der Einheit des Flächeninhalts zwischen Graf und waagerechter Achse.

[45] Aufgabe aus Lambacher Schweizer für die Oberstufe (2015)

d) **Erstelle** eine Übersicht für die Bedeutung der Flächeninhalte in den einzelnen Situationen. **Ermittle** weitere Beispielsituationen. **Erstelle** dazu einen beschrifteten Grafen.

Aufgabe 1 (Fahrstuhl)

Ein Fahrstuhl beginnt seine Fahrt im Erdgeschoss (EG), hält kurz im 2. Stock, fährt weiter in den dritten Stock und nach einem kurzen Stopp direkt in die Tiefgarage. Im Koordinatensystem ist der Graf der zugehörigen idealisierten Geschwindigkeits-Zeit-Funktion (ohne Beschleunigungs- und Bremsphasen) eingetragen.



Zeitpunkt	0	4	8	10	12	21
Länge des Zeitintervalls Δt (in s)	4 s					
Geschwindigkeit v in m pro s (in ms^{-1})	1,4					
im Zeitintervall zurückgelegter Weg ΔS (in m)	$4 \cdot 1{,}4 = 5{,}6$					
Bedeutung des Vorzeichens von ΔS	Weg nach oben					
Entfernung zum Startpunkt (EG) (in m)	0	5,6				

a) **Bestimme** die Entfernungen des Fahrstuhls zum Startpunkt (EG) zu den Zeitpunkten 0s, 4s, 8s, 10s und 12s, indem Du die Tabelle ausfüllst.

b) **Interpretiere** die Bedeutung einer negativen Entfernung.

c) **Bestimme** die mittlere Geschwindigkeit für die ersten 21 Sekunden. **Zeichne** diese Geschwindigkeit im Diagramm ein.

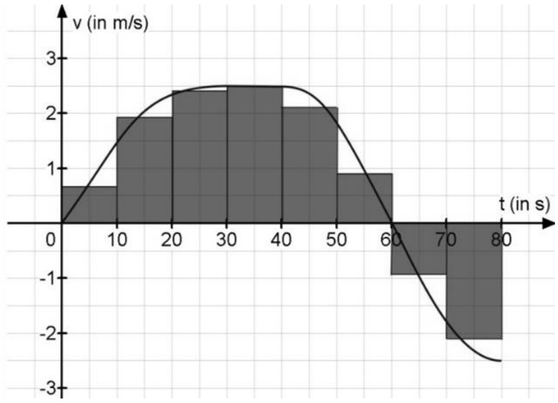
d) **Skizziere** den Weg-Zeit-Verlauf-des Grafen.

> **Merke:** Die Fläche, die der Graph der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion einer Bewegung zwischen zwei Zeitpunkten mit der t-Achse einschließt, entspricht **dem in diesem Zeitintervall zurückgelegter Weg.** Deren Flächeninhalt ist somit die Maßzahl der **Länge des Weges.** Liegt ein Flächenstück unter der t-Achse, so **wird die Weglänge negativ gezählt („Weg nach unten" bzw. „Weg zurück").**

Aufgabe 2 (Heißluftballon)

Im Koordinatensystem ist die vertikale Geschwindigkeit v (Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit) eines Heißluftballons in Abhängigkeit der Zeit t seit dem Start dargestellt. Im Gegensatz zur (idealisierten) Fahrstuhlfahrt ändert sich hier die Geschwindigkeit nicht abrupt, sondern kontinuierlich.

a) **Bestimme** die Entfernung zum Startpunkt (Höhe gegenüber dem Erdboden) zu den Zeitpunkten 0s, 10s, 20s, …, 80s, indem Du die Tabelle ausfüllst. Dazu benötigst du die mittleren Geschwindigkeiten der Zeitintervalle, die du näherungsweise aus dem Grafen bestimmen kannst (im ersten Intervall ist diese etwa 0,7 ms^{-1}).



b) **Bestimme** näherungsweise die mittlere Geschwindigkeit des Ballons für die ersten 60 Sekunden. **Zeichne** die mittleren Geschwindigkeiten im Zeitintervall [0;60] im Diagramm ein.

c) **Bestimme** analog die mittlere Geschwindigkeit für die Gesamtdauer von 80 Sekunden und **zeichne** sie im Diagramm ein.

d) **Skizziere** grob den Grafen der Weg-Zeit-Funktion des Ballons.

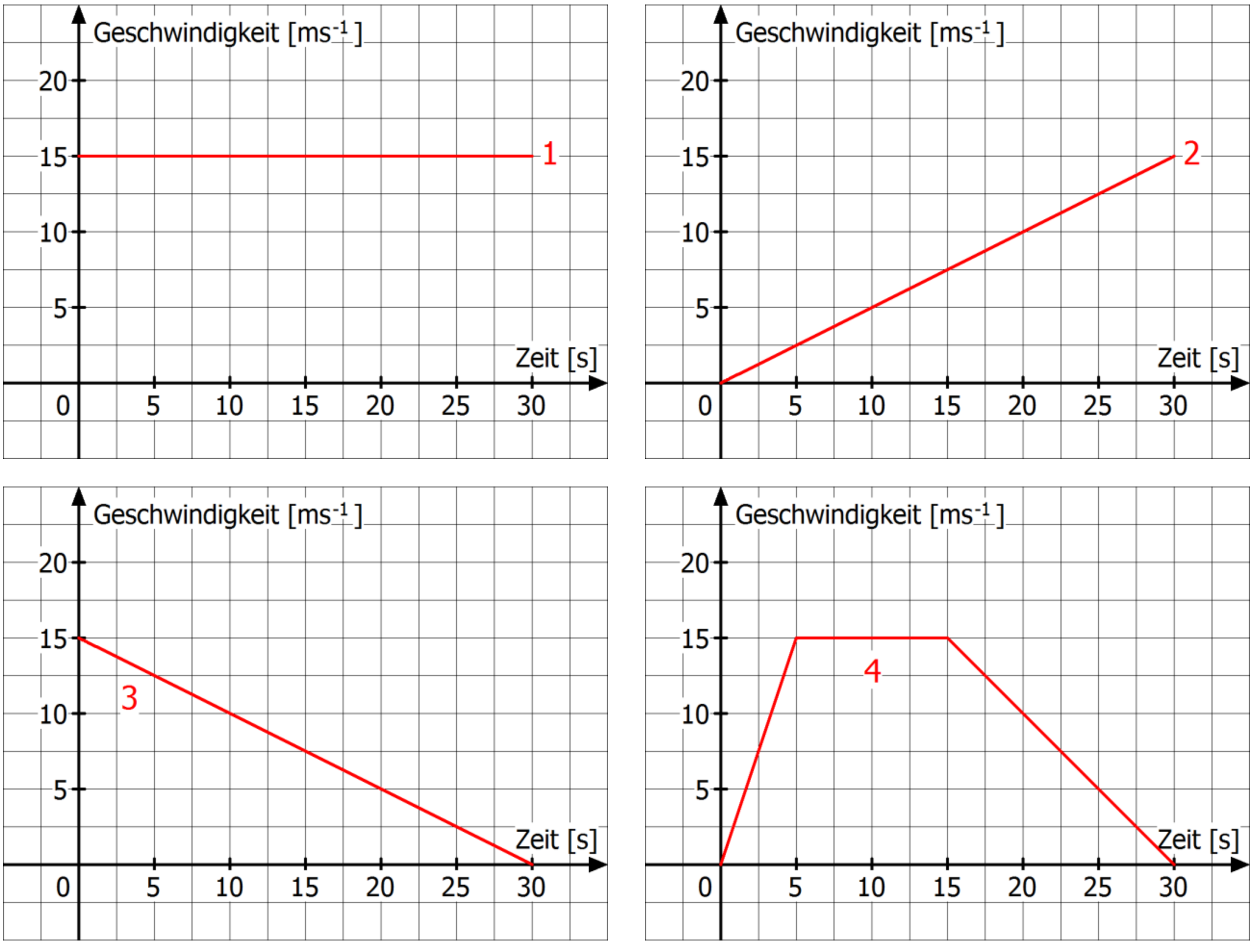
Zeitpunkt	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Länge des Zeitintervalls Δt (in s)	10	10	10	10	10	10	10	10	
(geschätzte) mittlere Geschwindigkeit v in diesem Zeitintervall (in m/s)	0,7								
im Zeitintervall zurückgelegter Weg Δs (in m)	7								
Bedeutung des Vorzeichens von Δs	Weg nach oben								
Entfernung zum Startpunkt (Höhe gegenüber dem Erdboden) (in m)	0	7							

Merke: Bei kontinuierlichen Kurvenverläufen von Geschwindigkeits-Zeit-Verläufen kann der Flächeninhalt zwischen Graph und t-Achse durch **Rechteckflächen** angenähert werden. Der Näherungswert entspricht der **Entfernung** vom Startpunkt.

Merke: Aus dem Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf v, die jedem Zeitpunkt t genau einen Geschwindigkeitswert v(t) zuordnet, lässt sich durch die Bestimmung des Flächeninhalts unter der Kurve der zurückgelegte Weg s(t) nach der Zeit t bestimmen. Man nennt die Weg-Zeit-Funktion s auch **Wirkungsfunktion** der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion v, da sich die Geschwindigkeit v auf die zurückgelegte Strecke s **auswirkt**.

Aufgabe 3 (Geschwindigkeits-Zeit-Verläufe eines PKW)

Die folgenden vier Abbildungen zeigen den Geschwindigkeitsverlauf eines PKW (in Meter pro Sekunde) über einen Zeitraum von jeweils 30 Sekunden.



a) **Gib** die Bedeutung der Fläche unter der Kurve im Sachzusammenhang **an** und **interpretiere** den jeweiligen Verlauf qualitativ.

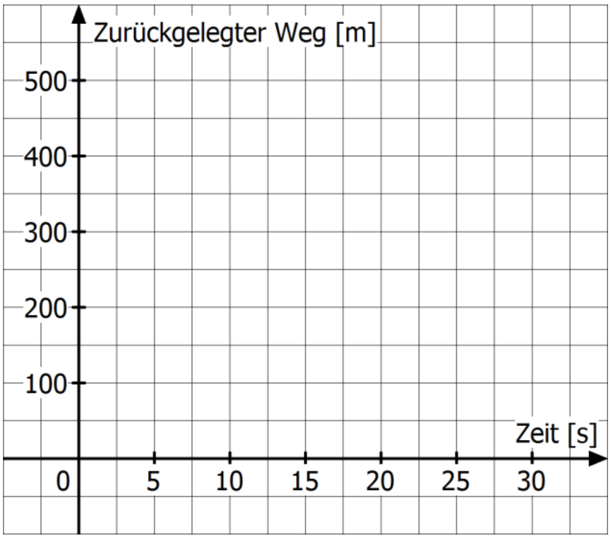
b) **Bestimme** die (linearen) Funktionsgleichungen v(t) der vier Geschwindigkeits-Zeit-Verläufe. [Hinweis für 4: Betrachte die Funktion abschnittsweise.]

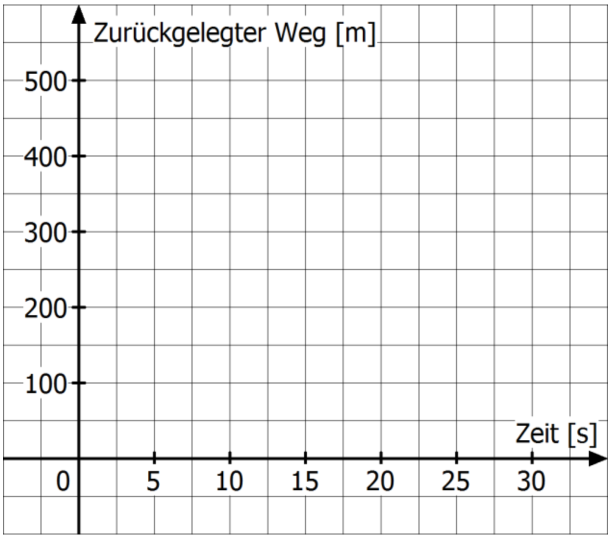
c) **Berechne** mithilfe einfacher Flächenberechnung die zurückgelegte Strecke des Autos in Meter (m) nach 5, 10, 15, 20, 25 und 30 Sekunden (s). Fülle dazu folgende Tabellen aus.

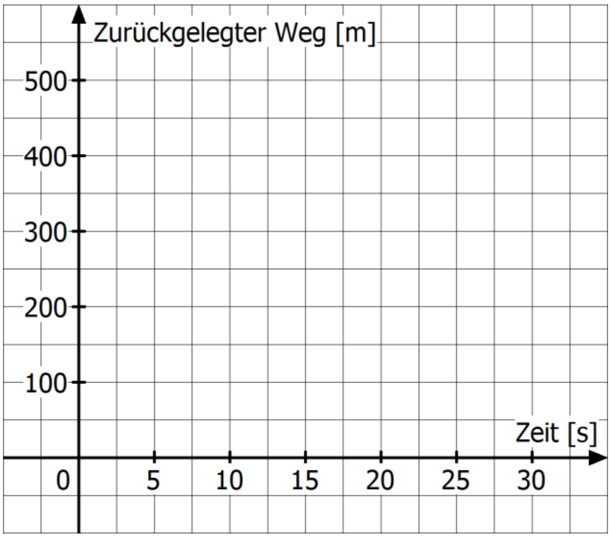
	Zeit in s	0	5	10	15	20	25	30
1	zurückgelegte Strecke in m	0						
2	zurückgelegte Strecke in m	0						
3	zurückgelegte Strecke in m	0						
4	zurückgelegte Strecke in m	0						

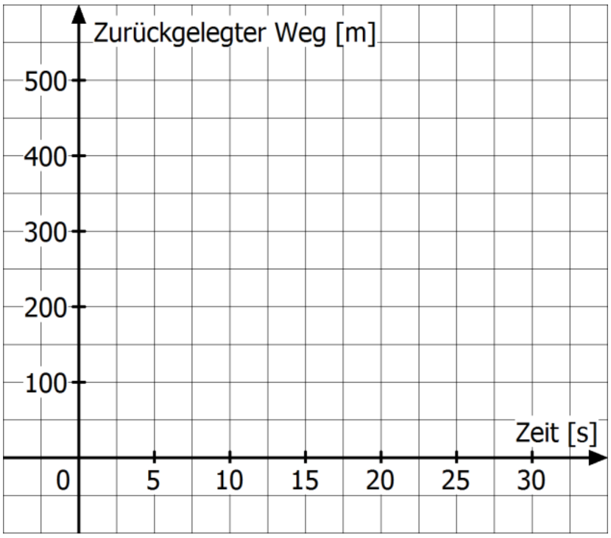
d) **Berechne** jeweils die mittlere Geschwindigkeit des Autos im Zeitintervall [0;30] und **trage** die Werte in die obigen Diagramme **ein**.

e) **Zeichne** mithilfe der vier Tabellen den Weg-Zeit-Verlauf des Autos für die vier Darstellungen in die folgenden Koordinatensysteme **ein**.









f) **Bestimme** die Funktionsgleichungen s(t) der vier Weg-Zeit-Verläufe für die ersten 30 Sekunden. [Hinweis für 4: Betrachte die Funktion abschnittsweise.]

g) **Untersuche** den Zusammenhang von Funktionsgleichung (Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf, vgl. Teilaufgabe b)) und Wirkungsfunktionsgleichung (Weg-Zeit-Verlauf, vgl. Teilaufgabe f)).

> **Merke:** Die Maßeinheit für die **Maßzahl der Fläche**, die der Graph und die x-Achse einschließen, erhält man aus dem Produkt von Maßeinheit der x-Achse (z. B. Zeit in Sekunden) und Maßeinheit der y-Achse (z.B. Geschwindigkeit in m/s). In den Aufgaben 1 und 2 ist die Maßeinheit der Fläche also das Produkt von Sekunde $\cdot \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$ = Meter. Daher hat der **Flächeninhalt** in den Aufgaben 1 und 2 die **Bedeutung der zurückgelegten Strecke**.

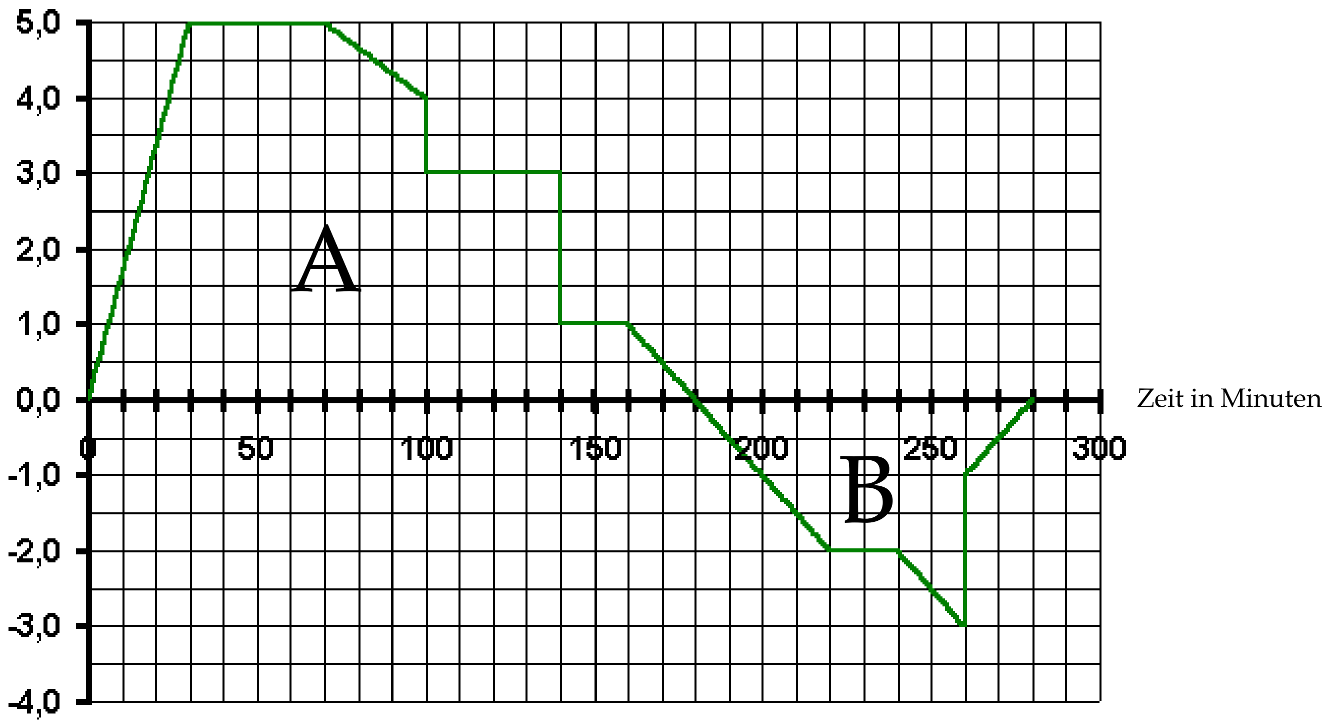
h) **Überprüfe** die obige Merkregel falls die Funktion f:

(1) die Schadstoffausstoßrate eines Kohlekraftwerks in $\frac{\text{g}}{\text{min}}$ von 7 bis 7:50,
(2) den Kraft-Weg-Verlauf eines Körpers für die ersten 4 Meter,
(3) die Durchflussrate einer Ölpipeline in $\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ über eine Zeitraum von 24 Stunden,
(4) den Besucherandrang in $\frac{\text{100 Besucher}}{\text{min}}$ beim Einlass in ein Fußballstadion,
(5) die Abflussrate eines Flusses in ein Staubecken in $\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ über einen Zeitraum von 1 h beschreibt.

→ **Arbeitsblatt zur Ergebnissicherung: Herleitung der Wirkungsfunktion**

Aufgabe 4 (Pumpvorgänge bei einem Wasserrückhaltebecken)

Ein Wasserrückhaltebecken hat die Abmessungen 25 m x 15 m x 4 m (L x B x H). Das Wasser steht vor dem Pumpvorgang 60 cm hoch. Der Wasserstand in einem Wasserrückhaltebecken wird von fünf Pumpen gesteuert, die jeweils eine maximale Pumpleistung von 1 m³ Wasser pro Minute haben. Ein Probelauf mit den fünf Pumpen ist im folgenden Diagramm erfasst worden. Dabei **wirkt** die Pumpleistung in m³ Wasser pro Minute auf die Wassermenge in m³.



a) **Gib** die Bedeutung der Flächen A und B im Sachzusammenhang **an**.

b) **Bestimme**, wie viel Kubikmeter Wasser vor dem Pumpvorgang im Becken sind und wie viel Kubikmeter Wasser in den ersten 30 Minuten in das Becken gepumpt werden.

c) **Entscheide** begründend, welche der folgenden Aussagen wahr sind.

- ○ In den ersten 3 Stunden wird Wasser in das Rückhaltebecken gepumpt.
- ○ Für 45 Minuten laufen alle fünf Pumpen zugleich mit maximaler Pumpleistung.
- ○ Nach 200 Minuten hat das Becken einen Wasserstand von weniger als 60 cm.
- ○ Der Wasserstand des Beckens ist nach 280 Minuten höher als am Anfang.
- ○ Der Wasserstand des Beckens ist nach 280 Minuten niedriger als am Anfang.
- ○ Nach 3 Stunden wird Wasser aus dem Becken abgepumpt.
- ○ Der maximale Wasserstand ist nach 70 Minuten erreicht.

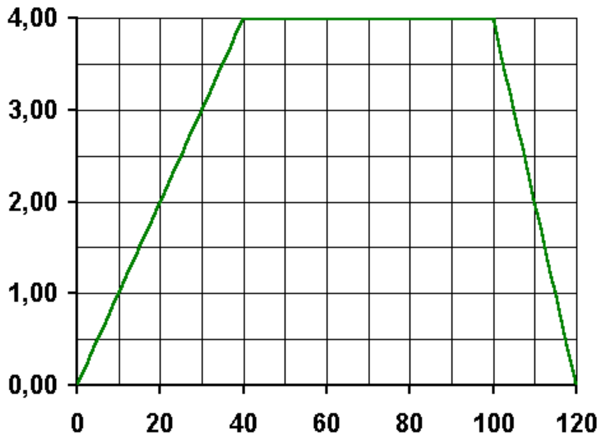
d) **Bestimme** näherungsweise, nach welcher Zeit 300 m³ Wasser ins Becken gepumpt worden sind.

e) **Bestimme**, wie viel m³ Wasser in den ersten drei Stunden ins Becken gepumpt wurde (A) und wie viel m³ Wasser dann bis zum Ende abgepumpt wurde (B).

f) **Berechne** die durchschnittliche Pumpleistung in m³ pro Minute in den 300 Minuten du **trage** diese Wert in das Koordinatensystem **ein**.

Aufgabe 5 (Füllen eines Aquariums)

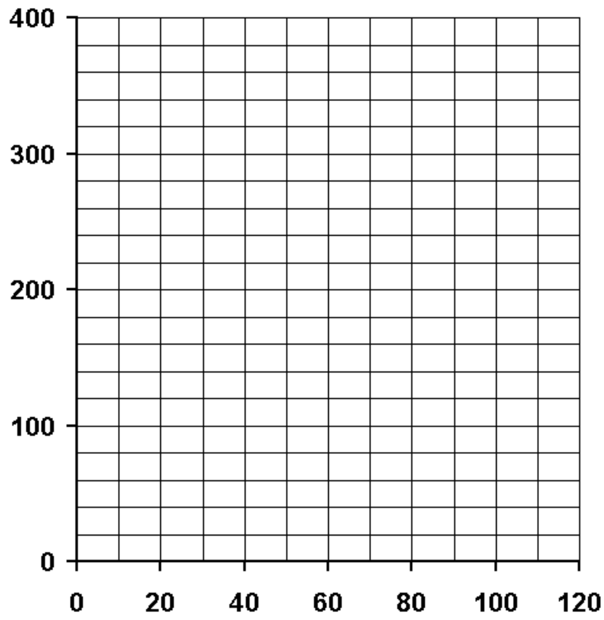
Ein Aquarium habe die Maße 120 cm x 60 cm x 60 cm (L x B x H). Die angeschlossene Hochleistungspumpe MEGA FILL soll dieses Aquarium angeblich in zwei Minuten füllen können. Die Höchstleistung der Pumpe beträgt 4 l/s. Der Füllvorgang ist idealisiert in folgendem Diagramm dargestellt:



x-Achse: Zeit in s

y-Achse: „Pumpleistung“ in $\frac{\text{Liter}}{\text{Sekunde}}$

Dabei **wirkt** die Pumpleistung in $\frac{\text{Liter}}{\text{Sekunde}}$ auf die Wassermenge in l, so dass man mithilfe der **Wirkungsfunktion** W(x) die Wassermenge in l bestimmen kann.



x-Achse: Zeit in s

y-Achse: Wassermenge in l

a) **Untersuche**, wie viel Wasser nach 2 Minuten im Aquarium ist und **bestimme** die Höhe des Wasserspiegels. [Hinweis: 1000 cm³ = 1 l]

b) **Bestimme** in 10 Sekunden-Abständen die eingelaufene Wassermenge und fülle die folgende Tabelle aus.

Zeit in s	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Wassermenge in l													

c) **Zeichne** den Graphen der Wirkungsfunktion W, die die Wassermenge W(x) zu einem Zeitpunkt x angibt, in das obige freie Koordinatensystem.

d) **Bestimme** zu den drei Teilabschnitten die linearen Grundfunktionsgleichungen, welche die Pumpleistung f(x) zu einem Zeitpunkt x angeben.

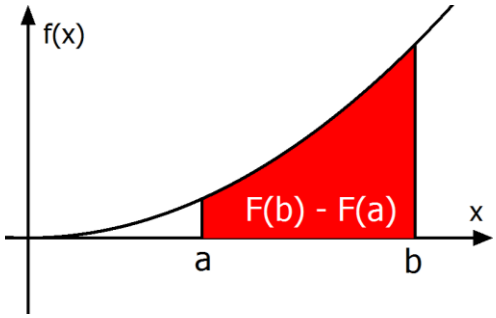
e) **Bestimme** die Gleichungen der Wirkungsfunktionen W für die drei Zeitabschnitte.

f) **Berechne** die mittlere Pumpleistung in Liter pro Sekunde in den 120 Sekunden und trage den Wert im rechten Koordinatensystem ein.

3.2 Von der Stammfunktion zum HSDIR

Bisher haben wir die Flächen unterhalb des Grafen einer Änderungsrate einer Funktion im Sachkontext gedeutet. Seinen Flächeninhalt konnten wir mithilfe der Wirkungsfunktion bestimmen. Das Besondere der Wirkungsfunktion ist, dass ihre Ableitung der Ausgangsfunktion entspricht. Solche speziellen Funktionen heißen Stammfunktion zur Ausgangsfunktion.

Mithilfe der **Stammfunktion** kann der Flächeninhalt unterhalb des Grafen einer Funktion ermittelt werden. Der dazu notwendige Satz heißt **Hauptsatz der Differential und Integralrechnung**. Er verknüpft die Differentialrechnung (Schlüsselkonzept: Ableitung) mit der Integralrechnung (Schlüsselkonzept: Integral). Er besagt vereinfacht, dass der Flächeninhalt unterhalb des Grafen einer Funktion f über einem Intervall [a; b] durch die Differenz F(b) – F(a) berechnet werden kann, wobei F eine Stammfunktion von f ist.



Definition: Eine Funktion F heißt Stammfunktion von f, wenn für alle x des Definitionsbereiches gilt: $F'(x) = f(x)$.

Merksatz: Zwei Stammfunktionen einer Funktion f unterscheiden sich nur um eine Konstante.

Beispiele (an der Tafel besprochen)**:**

a) $f(x) = 7 \Rightarrow F(x) = 7x + c$

b) $f(x) = 3x + 2 \Rightarrow F(x) = 1{,}5x^2 + 2x + c$

c) $f(x) = 5x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{5}{4}x^4 + c$

d) $f(x) = \frac{5}{x^3} = 5x^{-3} \Rightarrow F(x) = -\frac{5}{2}x^{-2} + c$

e) Allgemein gilt für $n \neq -1$: $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$

Aufgabe 1

Gib eine Funktionsgleichung der Stammfunktion F bzw. F_a **an**.

a) $f(x) = 4$ b) $f(x) = 2x - 1$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x$ d) $f(x) = 3x^4$ e) $f(x) = \frac{2}{5}x^5$ f) $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{8}x^5$

g) $f(x) = 2x \cdot (1 - x^2)$ h) $f(x) = (2x - 4)^2$ i) $f(x) = 2x^{-2}$ j) $f(x) = \sqrt{x}$ k) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

l) $f_a(x) = ax + 2$ m) $f_a(x) = ax^2 + 3ax^4$ n) $f_a(x) = \frac{a}{x^3} + 3ax^{-2}$ o) $f_a(x) = \frac{a}{\sqrt{x^3}}$

Aufgabe 2

a) **Beweise** den obigen Merksatz.

b) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 4x$ [$f(x) = 5x^{-3}$]

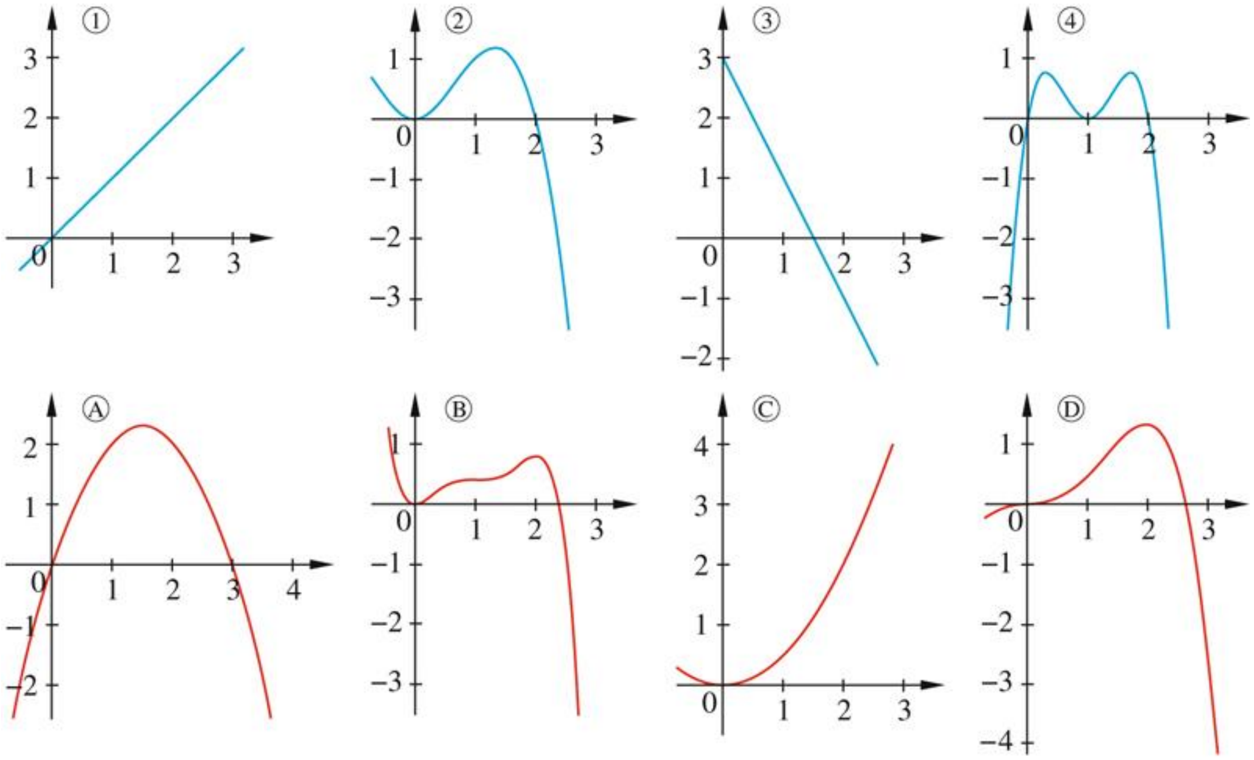
Ermittle die Stammfunktionen F von f mit $F(1) = -2$.

Aufgabe 3

Die Grafen A bis D sind Stammfunktionsgrafen zu den Grafen 1 bis 4.

a) **Entscheide begründend,** welche Grafen zusammengehören.

b) **Gib** für die Graphen 1, 3, A, C eine Funktionsgleichung **an**.



Aufgabe 4

Sei v die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion des Autos 4 in Aufgabe 3 von Kapitel 2:

$$v(t) = \begin{cases} 3t & 0 \leq t \leq 5 \\ 15 & 5 \leq t \leq 15 \\ 30 - t & 15 \leq t \leq 30 \end{cases}$$

a) **Bestimme** für die drei Teilabschnitte die Menge aller Stammfunktionen zur Geschwindigkeits-Zeit-Funktion v.

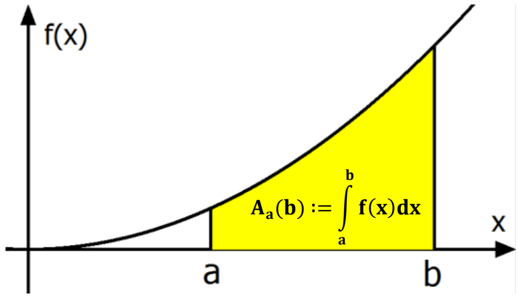
b) Für die Wirkungsfunktion s (Weg-Zeit-Funktion) wurden mit einem etwas aufwendigen Verfahren folgende drei Gleichungen von speziellen Stammfunktionen zu v ermittelt:

$$s(t) = \begin{cases} 1{,}5 \cdot t^2 & 0 \leq t \leq 5 \\ 15 \cdot t - 37{,}5 & 5 \leq 0 \leq 15 \\ 30 \cdot t - 0{,}5 \cdot t^2 - 150 & 15 \leq t \leq 30 \end{cases}$$

Untersuche, wie man diese speziellen Stammfunktionen bestimmen kann. [Tipp: Aufgabe 2]

→ Arbeitsblatt zur Ergebnissicherung: Herleitung des HSDIR

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:



Sei F eine Stammfunktion zu f und A_a die dazugehörige Flächeninhaltsfunktion. Dann gilt: $A_a(b) = F(b) - F(a)$.
Statt $A_a(b)$ schreibt man $\int_a^b f(x)\,dx$ und liest hierfür: „Integral von f über dem Intervall [a; b]“. a heißt untere, b obere Integrationsgrenze, f(x) heißt Integrand und x die Integrationsvariable.

Es gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) := [F(x)]_a^b$

Beispiel: $\int_1^2 2x^2dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$

Hinweis: In den Aufgaben 5-7 soll der Hauptsatz der DIR unter Verwendung der Stammfunktion angewendet werden. Erst **anschließend** darf das Ergebnis mithilfe des GTR (über MATH, F6, F1) überprüft werden.

Aufgabe 5

Überprüfe, ob die folgenden Behauptungen wahr sind.

a) $\int_0^4 \left(\frac{1}{4}x + 3\right) dx = 10$ b) $\int_1^4 (1{,}5x - 8)\,dx = -\frac{51}{4}$ c) $\int_{-1}^1 dx = 2$ d) $\int_{-1}^1 x^2dx = \frac{2}{3}$ e) $\int_0^n x^2dx = \frac{n^3}{3}$

Aufgabe 6

a) **Berechne** das Integral $\int_{-1}^1 x^n dx$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, k$.

b) **Bestimme** folgende Integrale: $\int_0^{10} [x \cdot (x+2)]dx$; $\int_{-1}^1 (x+1)^2 dx$; $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$; $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

Aufgabe 7

Zeichne die Graphen folgender Funktionen und **markiere** den entsprechenden Flächeninhalt unterhalb der Kurve über dem Intervall I. **Berechne** den Flächeninhalt mit Hilfe des Hauptsatzes der DIR. **Überprüfe** Deine Zeichnung und Rechnung mit dem GTR.

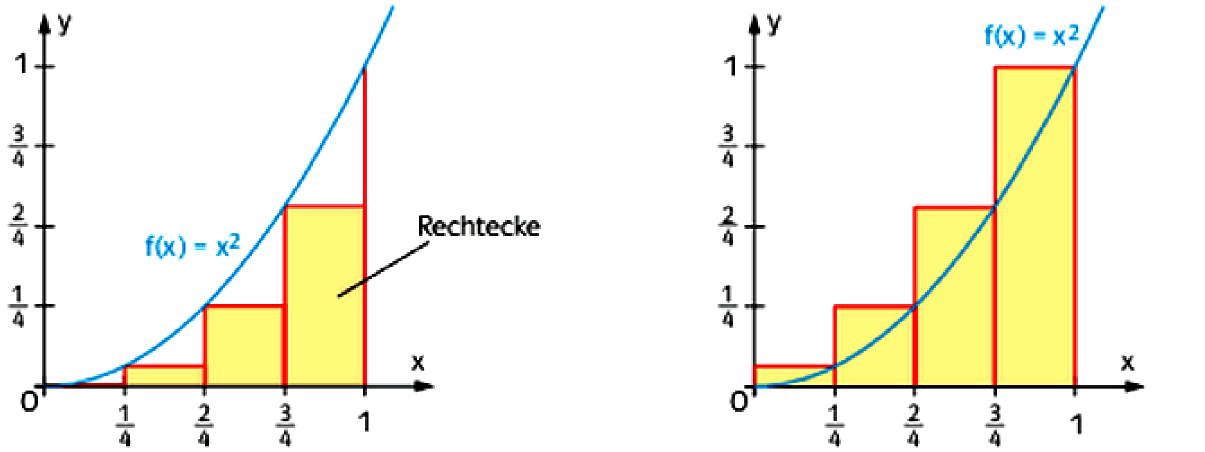
a) $f(x) = x + 0{,}5$ im Intervall I = [-1,5; -0,5] und I = [-0,5; 1].
b) $f(x) = 2x^2$ im Intervall I = [0,5; 1] und I = [-1; 0].
c) $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall I = [0; 1] und I = [1; 2].
d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ im Intervall [1; 2] und [2; R] für R→+∞.

→ Arbeitsblatt zur Ergebnissicherung: Zusammenhang von Integral und Flächeninhalt

Exkurs: Numerische Berechnung von Flächeninhalten

In der folgenden Abbildung wird der Flächeninhalt der Fläche, den die Normalparabel über dem Intervall [0,1] mit der x-Achse einschließt, durch Rechteckflächen angenähert.

Untersumme (Abschätzung nach unten) | **Obersumme** (Abschätzung nach oben)



Der Inhalt der Rechtecke beträgt

$U_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \approx 0{,}2188.$

Der Inhalt der Rechtecke beträgt

$O_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 \approx 0{,}4688.$

a) **Beschreibe** die Näherungen des gesuchten Flächeninhalts mithilfe der Untersumme und der Obersumme von Rechteckflächen.

b) **Gib** Terme für die Untersumme U_8 und die Obersumme O_8 an und bestimme ihre Werte.

c) **Begründe,** dass die Terme für die Untersumme U_n und die Obersumme O_n bei einer Unterteilung des Intervalls in n gleichgroße Teilintervalle der Länge $\frac{1}{n}$ folgendermaßen lauten:

$$U_n = \frac{1}{n} \cdot 0^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left[0^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

$$\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \quad \text{(lies: Summe aller } \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \text{ von k gleich 1 bis n)}$$

$$O_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot 1^2$$

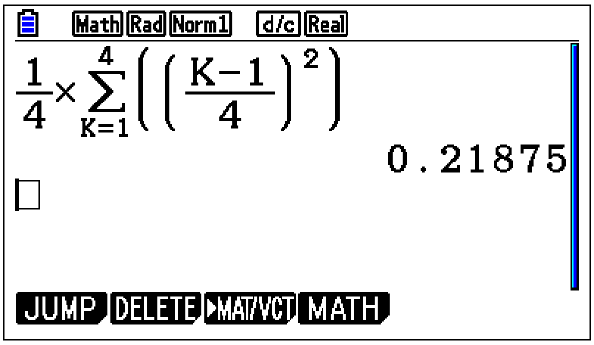
$$= \frac{1}{n} \cdot \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + 1\right]$$

$$\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \quad \text{(lies: Summe aller } \left(\frac{k}{n}\right)^2 \text{ von k gleich 1 bis n)}$$

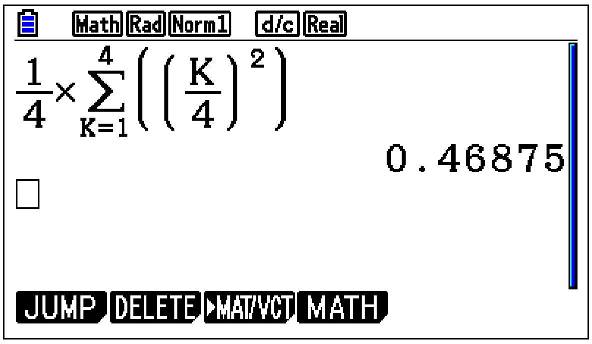
Dabei steht das Symbol $\sum$ (*Sigma* für Summe) für die Aufsummierung von Summanden (hier Funktionswerte von f an den Stützstellen $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$). Der Buchstabe k heißt *Laufindex*. Er startet hier bei 1 und endet in unserem Fall bei n. Es werden also n Summanden aufaddiert.

d) Der Taschenrechner hilft Dir bei der Berechnung der Untersumme und Obersumme. Verwende in MENU 1 die Funktion MATH (F4) und dann über F6 und F2 die Aufsummierung $\sum$. Nun lassen sich die Untersumme und Obersumme aus c) für unterschiedliche Werte für n berechnen. Für n = 4 erhält man folgende Darstellungen:

Untersumme U_4



Obersumme O_4



Bestimme mithilfe der Formeln aus c) und dem GTR die Werte für die Untersumme und Obersumme bei den folgenden Unterteilungen in gleichgroße Teilintervalle:

Anzahl n der Teilintervalle	**4**	**8**	**10**	**100**	**1000**
Rechteckuntersumme U_n	0,2188				
Rechteckobersumme O_n	0,4688				

e) Der gesuchte Wert für den Flächeninhalt liegt für jede beliebig große Unterteilung in n gleichgroße Teilintervalle zwischen dem Wert für die Unter- und Obersumme. **Begründe** folgende Aussagen:

(1) Es gilt: $O_n - U_n = \frac{1}{n}$. Daher streben Ober- und Untersumme für wachsendes n gegen den gleichen Wert.

(2) Es gilt: $O_n = \frac{1}{n^3}\cdot\left[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2\right]$.

(3) In der Formelsammlung findet man für die Summe der ersten n Quadratzahlen den folgenden Ausdruck: $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$. Es gilt mit (2) für die Obersumme $O_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{6n^2} = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{2n^2}{6n^2} + \frac{3n}{6n^2} + \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$.

(4) Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} O_n = \frac{1}{3}$.

Bemerkung: Nun kann man die Symbolik des Integrals besser verstehen. Für eine beliebige Funktion f und ein Intervall [0; 1] erhält man analog für die Obersumme:

$$O_n = \frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{n}\cdot f(1) = \sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right]$$

Es folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} O_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)\cdot\Delta x] = \sum_{k=1}^{\infty}[f(x_k)\cdot\Delta x] = \int_0^1 f(x)\,dx$

Das Integralzeichen $\int$ repräsentiert also den Grenzwert (falls er existiert) einer Summe von Rechteckflächen mit einer beliebig klein werdenden Intervallbreite Δx und der dazugehörigen Höhe $f(x_k)$. Das Symbol dx steht für die immer kleiner werdende Intervallbreiten Δx.

3.3 Fläche zwischen Kurven und weitere interessante Anwendungen

→ **Arbeitsblatt zur Ergebnissicherung: Flächeninhalt zwischen Kurven**

Merksatz 1: Bei der Berechnung des **Flächeninhalts zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse über dem Intervall [a; b]** geht man folgendermaßen vor:

1. Man überprüft, ob f auf dem Intervall [a; b] **Nullstellen** besitzt.
2. Man bestimmt abschnittsweise von Nullstelle zu Nullstelle den Flächeninhalt aller Teilflächen durch Integrale und **addiert** sie. Dabei wird bei negativen Integralwerten der **Betrag** des Integralwertes betrachtet.

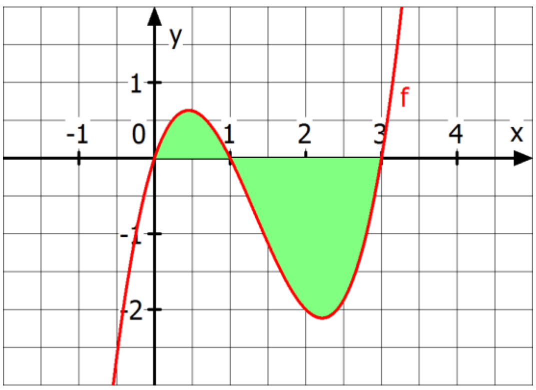
Merksatz 2: Bei der Berechnung des **Flächeninhalts zwischen zwei Graphen von Funktionen f und g** geht man folgendermaßen vor:

1. Man berechnet die **Schnittstellen** von f und g: $x_1, x_2, x_3, \ldots$
2. Man bestimmt $\mathbf{f(x) - g(x)}$.
3. Man berechnet **A** = $\left|\int_{x_1}^{x_2}[\mathbf{f(x)-g(x)}]\mathbf{dx}\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3}[\mathbf{f(x)-g(x)}]\mathbf{dx}\right| + \cdots$

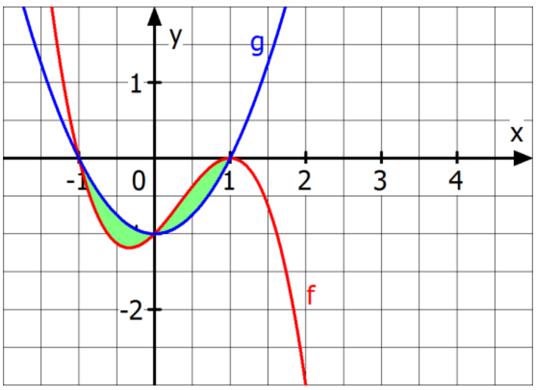
Aufgabe 1

Bestimme den Inhalt der markierten Flächen und **kontrolliere** Deine Rechnung anschließend mit dem GTR.

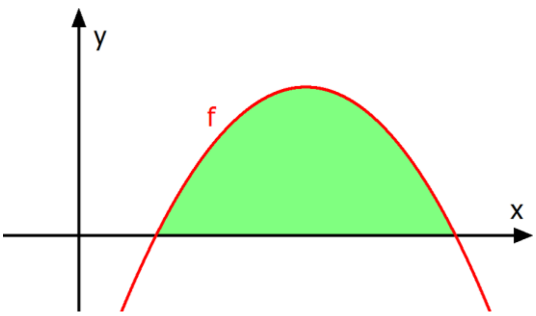
a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$



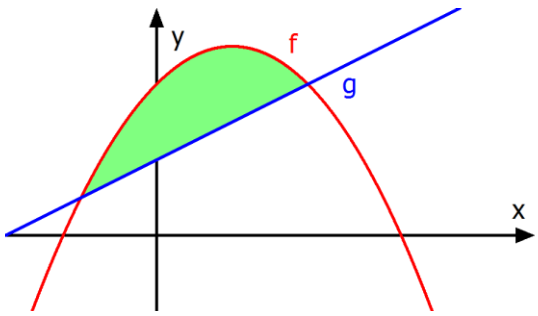
b) $f(x) = -x^3 + x^2 + x - 1;\ g(x) = x^2 - 1$



c) $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5$

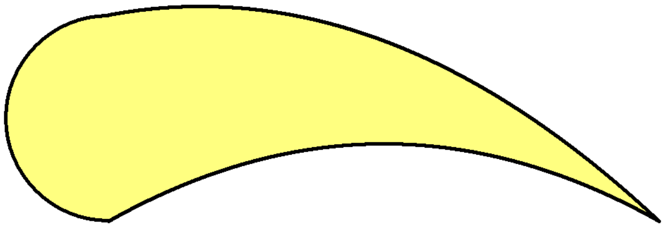


d) $f(x) = -0{,}25x^2 + x + 4;\ g(x) = 0{,}5x + 2$



Aufgabe 2[46]

Peter baut gerne Flugzeugmodelle aus Holz. Für ein Flügelprofil hat er folgende Zeichnung gefunden.



Am Rande der Zeichnung sind folgende Vermerke: Die Fläche wird durch Grafen quadratischer Funktionen g und h und einem Halbkreis begrenzt. Genauer gilt:

(1) Der Graf zu h verläuft durch die Punkte A (0|7), B (8|10) und C (16|7).
(2) Der Graf zu g verläuft durch die Punkte D (4|4), E (12|7) und F (20|4).
(3) Für $x \leq 6$ erfolgt die Flächenbegrenzung durch einen Halbkreis.
(4) Alle Einheiten sind in Zentimeter angegeben.

a) **Stelle** die Situation **grafisch** in einem Koordinatensystem **dar** und **markiere** dort die Informationen, die Du aus den Vermerken (1) bis (4) ableiten kannst.

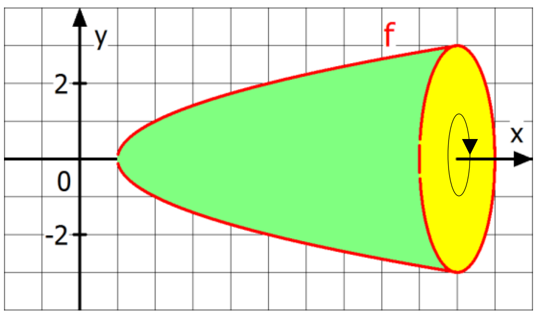
b) **Ermittle** aus den obigen Angaben die Funktionsgleichungen für g und h. **Zeige**, dass sich der Graf zu h durch eine geeignete Verschiebung aus dem Grafen von g erzeugen lässt. [Zur Kontrolle und zum Weiterarbeiten: $g(x) = -\frac{3}{64}x^2 + \frac{9}{8}x + \frac{1}{4}$ und $h(x) = -\frac{3}{64}x^2 + \frac{3}{4}x + 7$]

c) **Bestimme** die Querschnittsfläche des Flügels.

d) Peter hat vor, dass der Flügel eine Länge von 40 cm hat. **Berechne** den Materialverbrauch für einen solchen Flügel sowie die Masse eines Holzflügels mit einer Dichte von 1,8 $\frac{g}{cm^3}$.

Aufgabe 3

Lässt man einen Grafen einer Funktion um die x-Achse rotieren, entsteht ein Rotationskörper. In der rechts befindlichen Darstellung wurde der Graf zur Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \sqrt{x-1}$ einer solchen Rotation unterzogen. Will man nun das Volumen dieses Körpers berechnen, kann die folgende Volumenformel verwendet werden:



$$\mathbf{V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx}$$

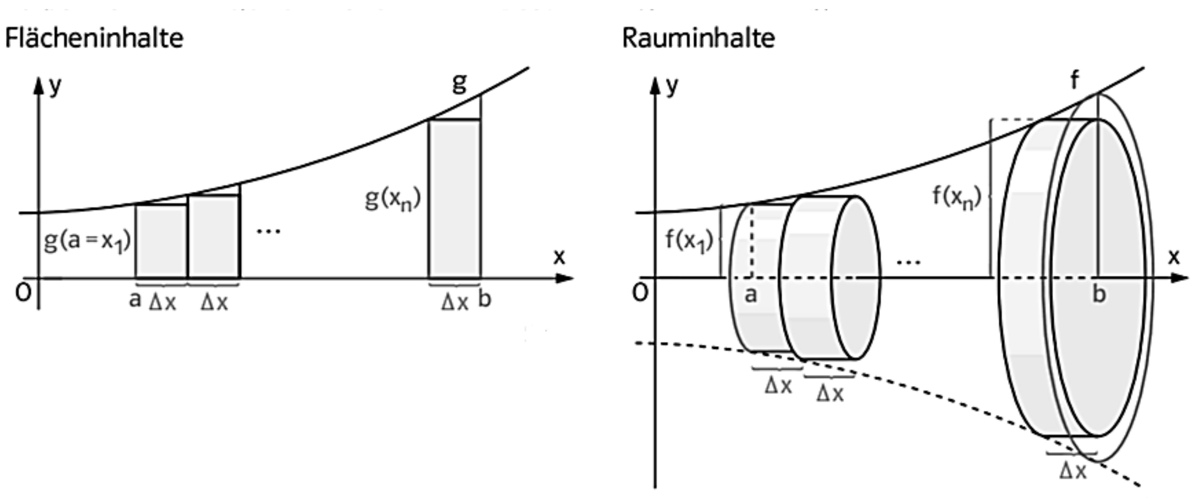
a) **Berechne** mit der Formel das Volumen des obigen Rotationskörpers.

b) **Fertige** eine Zeichnung an für einen Rotationskörper, der durch Rotation des Grafen von f mit $f(x) = 0{,}1 \cdot x^2$ über dem Intervall [1; 4] um die x-Achse entsteht. **Berechne** das Volumen dieses Körpers.

46 Aufgabenidee von Karsten Burghaus, FALS (Solingen)

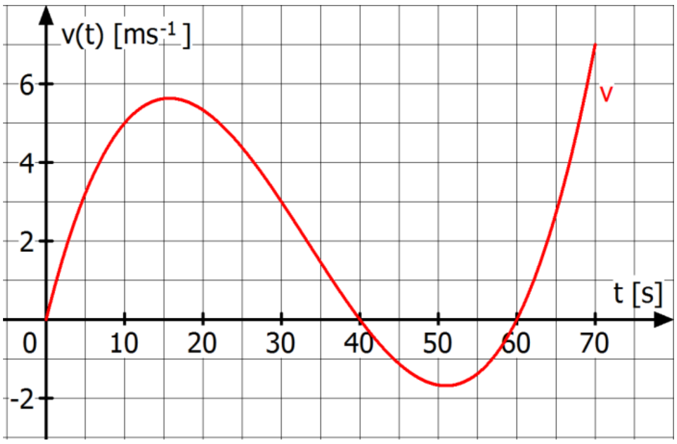
c) Die Grafen zu f mit $f(x) = 0{,}5x + 1$ und g mit $g(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 1$ schließen eine Fläche A ein. **Fertige** eine saubere Zeichnung **an** und **bestimme** das Volumen, das entsteht, wenn die Fläche A um die x-Achse rotiert.

d) **Leite** mithilfe der folgenden Abbildung die Formel für das Volumen von Rotationskörpern **her**.



Aufgabe 4[47]

Die Darstellung unten zeigt den Graphen des Geschwindigkeitsverlaufs einer Hand-Draisine, die entlang eines gradlinigen Gleisabschnitts fährt. Die Geschwindigkeit wird innerhalb der ersten 70 Sekunden beschrieben durch die Funktion v mit $\mathbf{v(t)} = \frac{1}{3000} \cdot \mathbf{t^3} - \frac{1}{30} \cdot \mathbf{t^2} + \frac{4}{5} \cdot \mathbf{t}$ und gibt die Geschwindigkeit der Draisine in Meter pro Sekunde an.



a) **Gib** die Bedeutung der Fläche zwischen Graph und t-Achse an und **beschreibe** qualitativ die Bewegung des Gefährts.

b) **Bestimme** (zur Übung auch ohne GTR) die Nullstellen der Funktion v und **interpretiere** ihre Bedeutung in der vorgegebenen Situation.

c) **Berechne** (unter Angabe der Stammfunktion) $\int_0^{10} v(t)dt$, $\int_0^{50} v(t)dt$, $\int_0^{60} v(t)dt$ sowie $\int_0^{70} v(t)dt$ und **gib** die Bedeutung der berechneten Maßzahlen im Sachzusammenhang **an**.

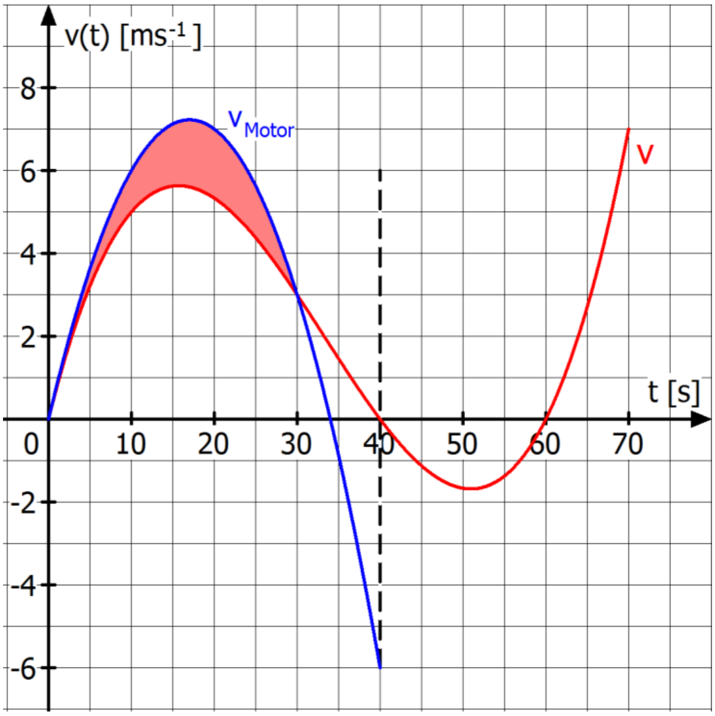
d) **Ermittle** die Strecke, die die Handdraisine bis zum ersten Umkehrpunkt bei t = 40 Sekunden zurücklegt.

[47] Aufgabenidee aus Fokus Mathematik (LK), Cornelsen (2014).

e) **Berechne** die mittleren Geschwindigkeiten der Handdraisine in Meter pro Sekunde in den Zeitintervallen [0; 40], [0; 60] und [0; 70] und **zeichne** sie im Koordinatensystem **ein**.

f) **Skizziere** grob den Weg-Zeit-Verlauf s der Handdraisine, indem Du die lokalen Extremstellen von s bestimmst.

Direkt neben der handbetriebenen Draisine startet zu gleichen Zeitpunkt auf einem parallel verlaufenen Gleis eine weitere, motorbetriebene Draisine, deren zeitlicher Geschwindigkeitsverlauf (vgl. Abb. unten rechts) für die ersten 40 Sekunden näherungsweise durch die Funktion v_{Motor} beschrieben wird mit folgender Funktionsgleichung: $\mathbf{v_{Motor}(t) = -\frac{1}{40}t^2 + \frac{51}{60}t}$.



g) **Gib** die Bedeutung der Fläche an, die durch die beiden Graphen zu v und v_{Motor} eingeschlossen wird.

h) **Berechne** die Schnittstellen von v und v_{Motor} und **bestimme** den Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche.

i) **Ermittle** den gegenseitigen Abstand der beiden Draisinen 40 s nach dem Start.

3.4 Kontrollaufgaben

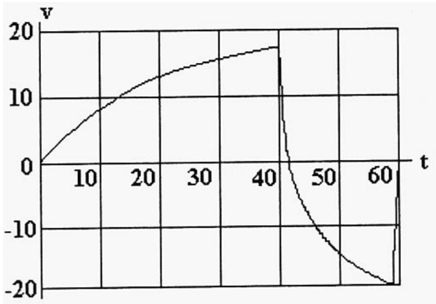
Kompetenzraster zu den Kontrollaufgaben

Ich kann …	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
Die Bedeutung von Flächeninhalten angeben.	1, 5, 6				
Flächen zwischen Graf und x-Achse mithilfe von Rechtecken, Trapezen und Dreiecken (näherungsweise) bestimmen.	1, 5, 9				
erklären, was eine Wirkungsfunktion ist.	2				
den Grafen der Wirkungsfunktion zeichnen.	1, 5				
die Funktionsgleichung der Wirkungsfunktion bestimmen.	5				
„negative“ Flächeninhalte im Sachkontext deuten.	6				
den Unterschied zwischen Stammfunktion und Wirkungsfunktion erklären.	2				
die Stammfunktion einer Potenzfunktion berechnen.	3, 5-7				
den HSFIR anwenden.	3, 5-7				
Flächeninhalte zwischen Kurven mithilfe des HSDIR ohne GTR bestimmen.	3				
einen Sachkontext modellieren und mithilfe der Differenzial- und Integralrechnung mathematische Probleme lösen.	7				
Steckbriefaufgaben ohne GTR lösen.	4				
die Wirkungsfunktion mittels Integralschreibweise darstellen.	6				
mittlere Geschwindigkeiten durch Integrale darstellen.	5, 6				
Flächeninhalte zwischen Kurven im Kontext von funktionalen Geschwindigkeits-Zeit-Verläufen berechnen und deuten.	5, 6				
den Graf der Wirkungsfunktion auf sein Grafenverlauf untersuchen, wenn der Graf der Geschwindigkeitsfunktion gegeben ist.	5, 6				
die Wirkungsfunktion für Problemstellungen nutzen.	5, 6				
die Trapezmethode zur Flächenannäherung anwenden.	9				
eine Formel zur Trapezmethode deuten.	9				
Steckbriefaufgaben unter Nutzung des GTR (MENU A) lösen.	7				
mit dem GTR Integralwerte bestimmen.	6-8				
mit dem GTR den Flächeninhalt zwischen Kurven berechnen.	6-8				
mit dem GTR und dem Summensymbol Ober- und Untersummen berechnen	9				

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

Aufgabe 1 (Heißluftballon)

Ein Heißluftballon startet zum Zeitpunkt $t = 0$ (t in Sekunden) vom Boden. Der Graph beschreibt die Geschwindigkeit v des Ballons in vertikaler Richtung in Meter pro Sekunde.



a) **Gib** die Bedeutung des Flächeninhalts zwischen der Kurve des Geschwindigkeits-Zeit-Verlaufes und der Zeitachse **an**.

b) **Beschreibe** den Bewegungsablauf qualitativ. Berücksichtige dabei folgende Fragen:

- In welchen Zeitabschnitten bewegt sich der Ballon nach oben / unten?
- Zu welchen Zeitpunkten steigt bzw. fällt er am schnellsten?
- Was passiert vermutlich in den Zeitpunkten mit $v = 0$?
- Wie kommt es zu den abrupten Geschwindigkeitsänderungen bei den beiden Zeitpunkten $t = 40$ und $t = 58$?

c) **Bestimme** näherungsweise die nach 30 Sekunden erreichte Höhe.

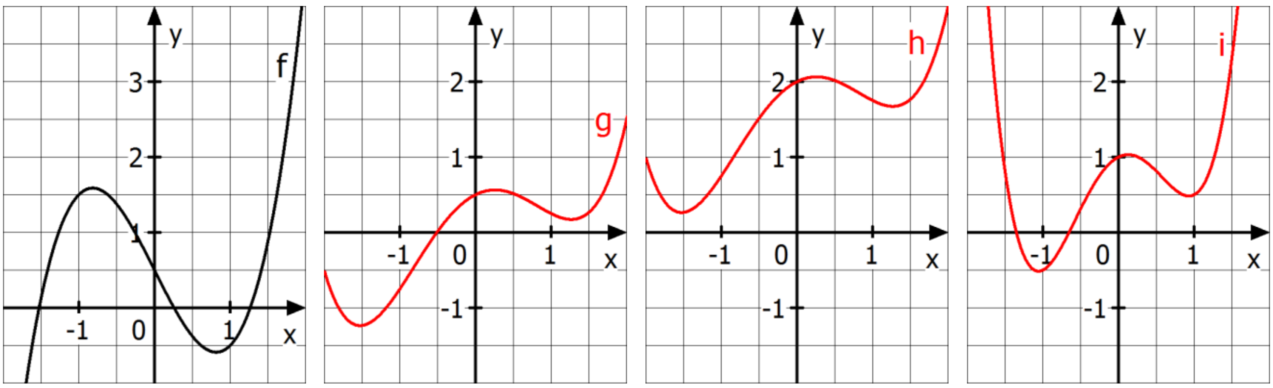
d) **Untersuche**, wann die die maximale Steighöhe erreicht wurde und **gib** näherungsweise ihren Wert **an**.

e) **Begründe**, dass die Ballonfahrt nicht auf der gleichen Höhe endet wie sie begonnen hat. **Entscheide begründend**, ob der Ballon auf einer Anhöhe oder in einer Vertiefung landet und **bestimme** den Höhenunterschied zum Abflugort.

f) **Skizziere** den Grafen der Wirkungsfunktion von v.

Aufgabe 2 (Funktion, Stammfunktion, Wirkungsfunktion – Graphen zuordnen)

Im Bild unten links siehst du den Graphen einer Funktion f, welche die Pumpleistung einer Pumpe in m^3 pro Stunde darstellt ($x = 0$ entspricht 0 Uhr), welche Wasser in ein Becken hinein- bzw. hinauspumpt. Die Bilder rechts davon zeigen drei weitere Graphen von Funktionen g, h und i.



a) **Entscheide** begründend, welche zwei Funktionen Stammfunktion zu f sind.

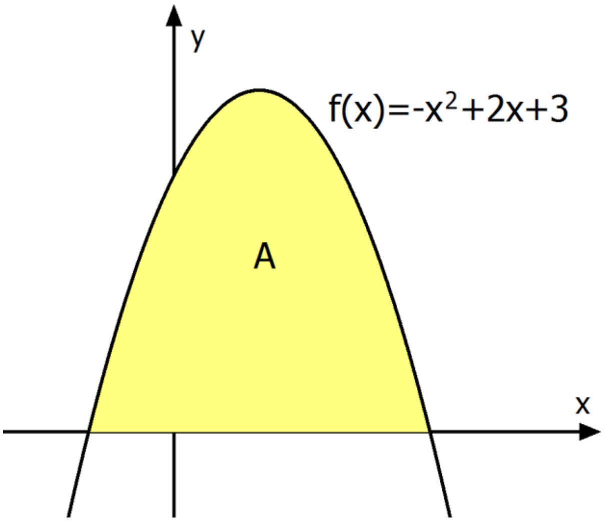
b) **Begründe** welche dieser beiden Stammfunktionen Wirkungsfunktion zu f sein, welche die gepumpte Wassermenge zum Zeitpunkt x angibt.

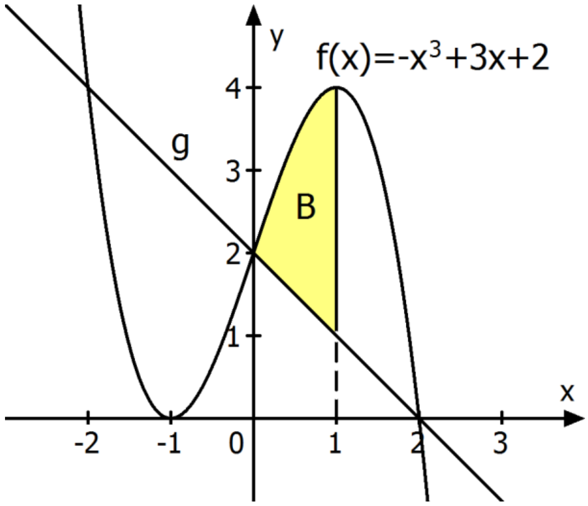
Aufgabe 3 (Flächenberechnung)

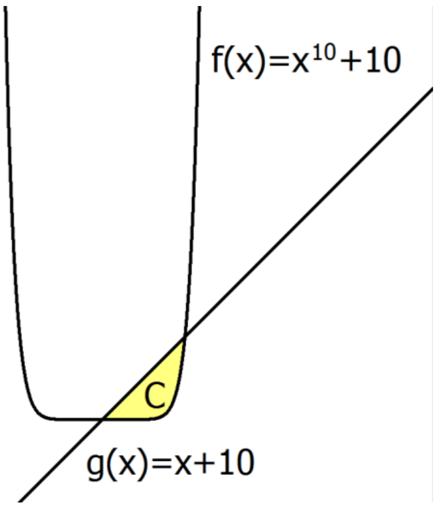
a) **Ermittle** die Flächeninhalte A, B und C.

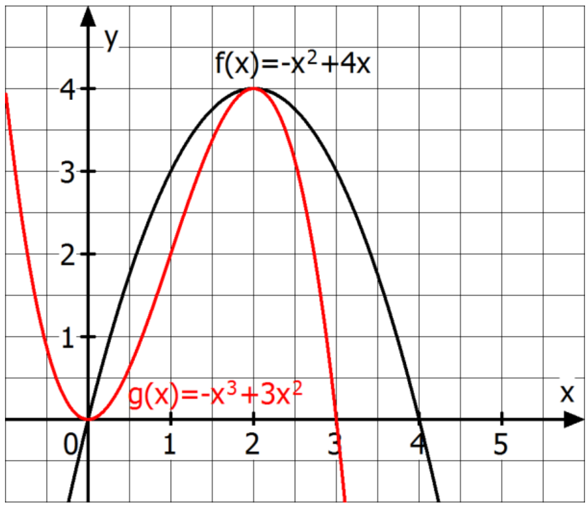
b) **Berechne** und **markiere** in der Abbildung mit Koordinatengitter den Flächeninhalt, den

- die Grafen von f und g einschließen.
- die Grafen von f und g und die x-Achse begrenzen.
- der Graf von f, die y-Achse und die Gerade y = 4 vollständig umschließen.



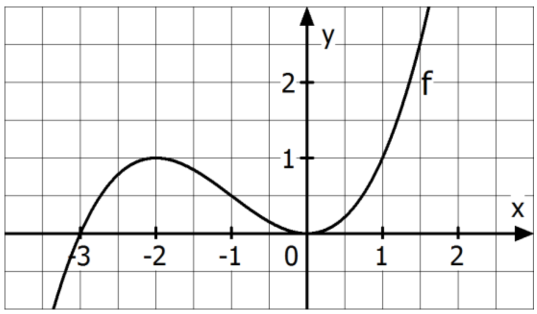






Wiederholungsteil: Aufgabe 4 (Steckbriefaufgabe)[48]

Bestimme eine Funktionsgleichung f(x) der ganzrationalen Funktion dritten Grades, deren Graf rechts angegeben ist.

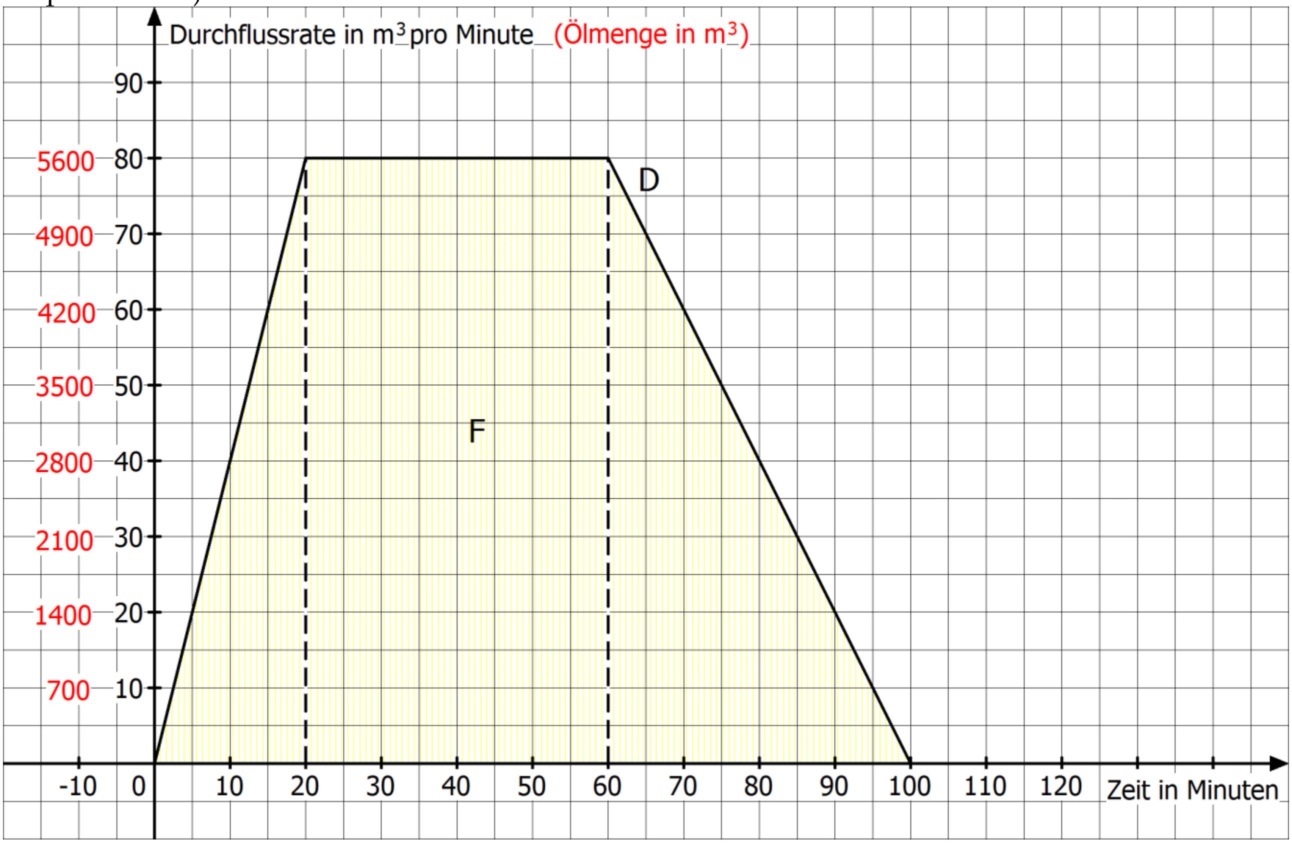


[48] Lambacher Schweizer LK Mathematik 2014

Teil II: Aufgaben unter Zuhilfenahme des GTR

Aufgabe 5 (Durchfluss in einer Ölpipeline)

Durch Ölpipelines fließen in jeder Stunde viele Kubikmeter Öl. Der momentane Durchfluss durch eine Pipeline wird mit Hilfe eines Propellers im Rohr überwacht. Die nachfolgende Grafik zeigt den momentanen Durchfluss D durch eine Ölpipeline im Zeitraum von 0 bis 100 Minuten (gemessen in m^3 pro Minute).



a) **Gib** die Bedeutung des Flächeninhalts F im Sachzusammenhang **an**.

b) **Bestimme** die Ölmenge W, die in den ersten 20 Minuten sowie in den ersten 60 Minuten durch die Ölpipeline fließt. [Kontrollergebnisse: $W(20) = 800$ und $W(60) = 4000$]

c) **Berechne** die mittlere Durchflussrate für die ersten 60 Minuten [von der 10. bis zur 40. Minute] und **zeichne** beide Raten in GRÜN im obigen Koordinatensystem **ein**.

d) D(t) wird abschnittsweise durch folgende Funktionsgleichungen beschrieben:

$$D(t) = \begin{cases} a \cdot t \text{ für } 0 \leq t \leq 20 \\ b \text{ für } 20 \leq t \leq 60 \\ -2 \cdot t + c \text{ für } 60 \leq t \leq 100 \end{cases}$$

Bestimme die Parameter a, b und c für die obigen drei Funktionsgleichungen. [Kontrollergebnisse zum Weiterrechnen: a = 4, b = 80 und c = 200.]

e) **Zeige**, dass für die Wirkungsfunktion W von D gilt:

$$W(t) = \begin{cases} 2 \cdot t^2 \text{ für } 0 \leq t \leq 20 \\ 80 \cdot t - 800 \text{ für } 20 \leq t \leq 60 \\ -t^2 + 200 \cdot t - 4400 \text{ für } 60 \leq t \leq 100 \end{cases}$$

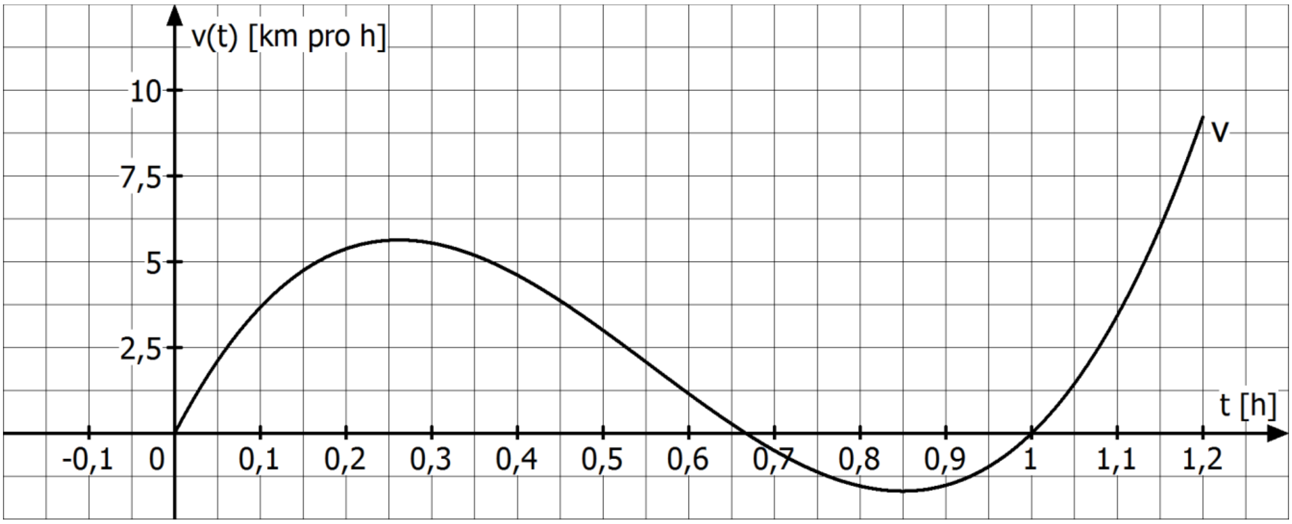
f) **Berechne** mithilfe der Wirkungsfunktion W die Ölmenge, die in den ersten 90 Minuten durch die Pipeline fließt.

g) **Untersuche**, nach welcher Zeit 500 m^3 [1000 m^3; 4500 m^3] Öl durch die Pipeline geflossen sind.

h) **Skizziere** in **ROT** den Graphen der Wirkungsfunktion W für den Zeitraum [0;100] im obigen Koordinatensystem und beschreibe am dargestellten Beispiel den Zusammenhang von Wirkungsfunktion W und Durchflussfunktion D.

Aufgabe 6 (Geschwindigkeitsverlauf zweier Objekte)

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen des Geschwindigkeitsverlaufes eines sich geradlinig bewegenden Objekts. Seine Geschwindigkeit wird innerhalb der ersten 1,2 Stunden beschrieben durch die Funktion v mit $v(t) = 72 \cdot t^3 - 120 \cdot t^2 + 48 \cdot t$.



a) **Zeige**, dass das Objekt nach 40 und nach 60 Minuten seine Richtung ändert.

b) **Berechne**[49] $\int_0^{\frac{2}{3}} v(t)dt$, $\int_{\frac{2}{3}}^{1} v(t)dt$, $\int_0^{1,2} v(t)dt$ und **interpretiere** die Integrale im Sachkontext.

c) **Bestimme** die Geschwindigkeit des Objekts 1,2 h nach Startbeginn und **ermittle** die mittlere Geschwindigkeit des Objekts über den gesamten Zeitraum.

d) **Gib** die Bedeutung des Terms $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b v(t)dt$ mit $0 \leq a < b \leq 1{,}2$ in der dargestellten Situation **an**.

e) Gegeben ist für $0 \leq t \leq 1{,}2$ die Funktion $s(t) = \int_0^t v(x)dx$.

(1) **Interpretiere** diese Funktion im Sachkontext.
(2) **Ermittle** einen integralfreien Term für s(t).
(3) **Untersuche** den Grafen zu s auf lokale und globale Extremstellen.

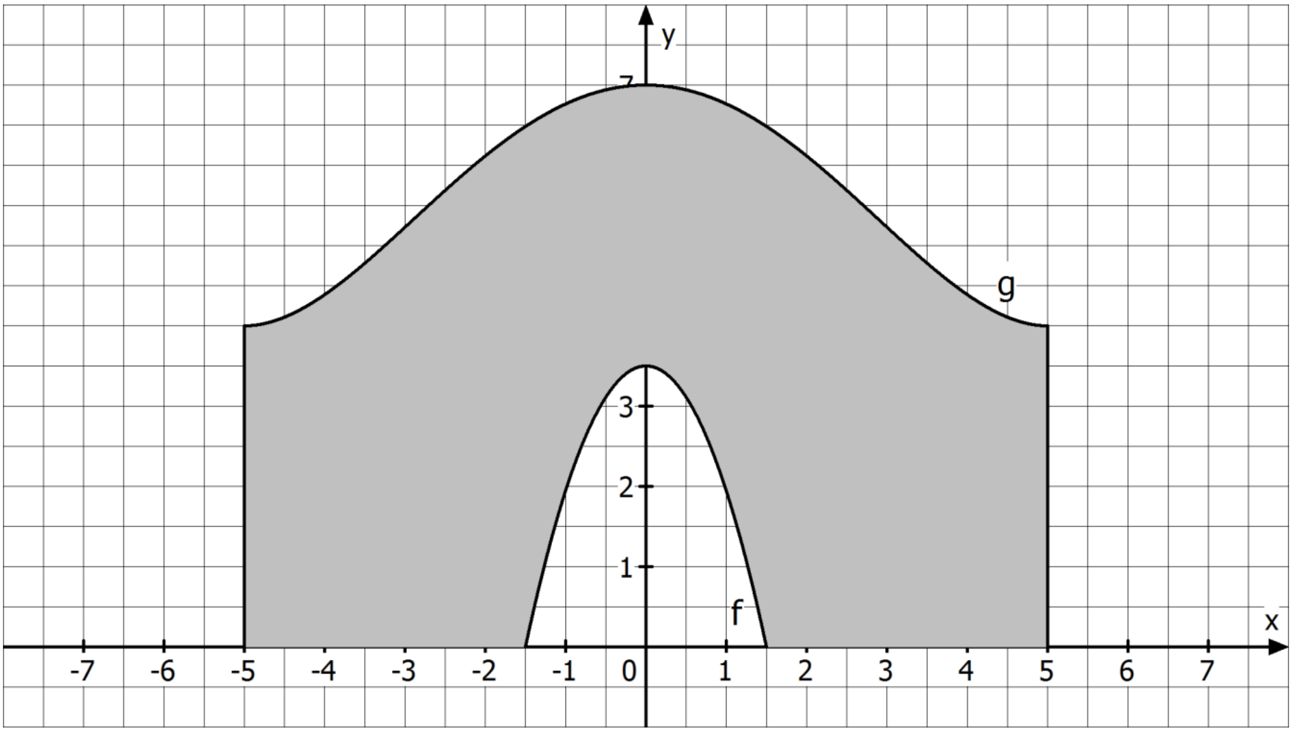
f) Ein zweites Objekt startet zum gleichen Zeitpunkt und hat über den Zeitraum von 1,2 h eine konstante Geschwindigkeit von 2,5 $\frac{km}{h}$.

(1) **Zeichne** den Grafen zum zweiten Objekt oben **ein.**
(2) **Ermittle** die Entfernung des zweiten Objekt vom Startpunkt nach 1,2 h.
(3) **Gib** einen Term an, der angibt, wie weit beide Objekte t Minuten nach dem Startbeginn voneinander entfernt sind.
(4) **Ermittle** den Zeitpunkt, an dem Objekt 1 **zum ersten Mal** Objekt 2 einholt.

[49] Zur Erinnerung: Beim Operator *Berechne* muss die Stammfunktion angeben werden sowie der HSDIR. Die Berechnung des Integrals kann dann mit dem GTR erfolgen.

Aufgabe 7 (Torbogen)

In der italienischen Stadt Bonafede soll über die Prachtstraße ein Triumphbogen zur Rückkehr ihres „großen“ Namenspatrons gebaut werden. Die Ausschreibung hat festgelegt, dass es sich dabei um einen massiven Bogen aus Carrara – Marmor ($\rho = 2{,}7\frac{g}{cm^3}$) handeln soll. Das Ingenieurbüro BoBu beteiligt sich an der Ausschreibung, wobei folgende Vorgaben gelten. Die Gesamtbreite beträgt 10 m, die Gesamthöhe 7 m, die seitliche Höhe 4 m. Dort läuft die obere geschwungene Linie waagerecht aus. Das parabelförmige Tor ist 3 m breit und 3,5 m hoch. Die Tiefe des Bogens beträgt 6 m. Um die Kosten kalkulieren zu können, müssen die BoBu - Mitarbeiter den Marmorbedarf für diesen Bogen in Tonnen berechnen.



a) **Ermittle** Funktionsgleichungen für f(x) und h(x). [Kontrollergebnisse: $f(x) = -\frac{14}{9}x^2 + 3{,}5$ und $g(x) = \frac{3}{625}x^4 - \frac{6}{25}x^2 + 7$].

b) **Berechne** die Querschnittsfläche des Bogens, die in der Zeichnung gekennzeichnet ist.

c) **Bestimme** das Gesamtvolumen und die Masse des Bogens in Tonnen.

d) Eine Tonne Marmor kostet in Carrara 760 € zuzüglich 19 % Mehrwertsteuer. **Berechne** die Materialkosten.

Aufgabe 8 (Flächenberechnung bewusst unter Nutzung des GTR)

Hinweis: Notiere für die folgenden Flächenberechnungen alle wichtigen Ansätze. Die Berechnungen sollen mit dem GTR erfolgen. Unten ist zur Kontrolle eine mögliche Darstellung mit dem GTR angegeben. Gib zuerst nur den Grafen zu f ein, wenn Du Aufgabenteil a) erledigst. Beachte auch die Fußnoten.

a) Gegeben ist Funktionen f mit $f(x) = x^3 - 2x$. (8P)

Bestimme unter Zuhilfenahme des GTR den Inhalt der Fläche, den der Graf zu f

(1) mit der x-Achse einschließt.

(2) mit den Geraden x = 1 und x = 3 sowie der x-Achse einschließt.[50]

b) Sei weiter g mit $g(x) = -x^2$ gegeben. (8P)

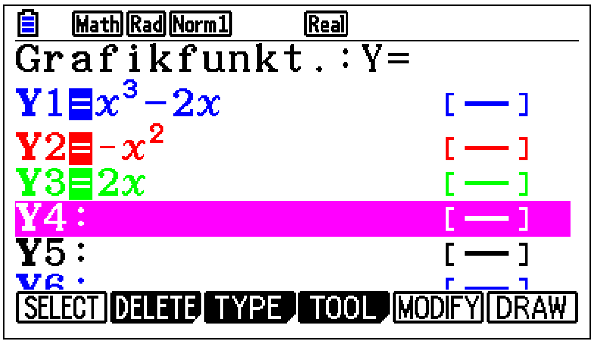
Bestimme unter Zuhilfenahme des GTR den Inhalt der Fläche A, den die beiden Grafen von f und g

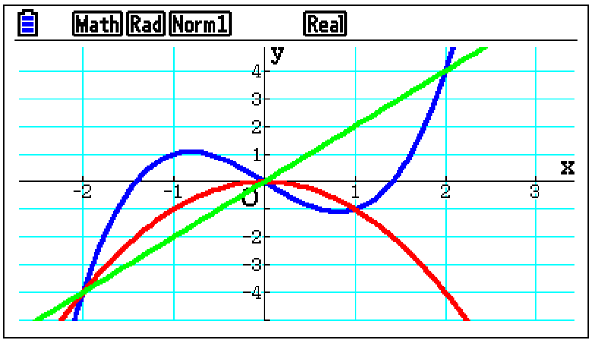
(1) vollständig umschließen.

(2) mit den Geraden x = 1 und x = 3 umschließen.[51]

c) Die Gerade h mit $h(x) = 2x$ schließt mit den Grafen zu f und g eine Fläche A ein.

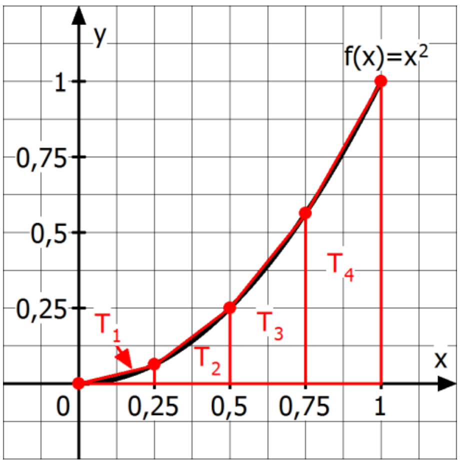
Ermittle den Flächeninhalt von A. (6P)





Aufgabe 8 (Trapezmethode)

In der Abbildung auf der nächsten Seite wird der Flächeninhalt, den die Normalparabel über dem Intervall [0; 1] mit der x-Achse einschließt, mithilfe der sogenannten **Trapez-Methode**[52] angenähert. Bei der Trapezmethode wird das Intervall [0; 1] zunächst in gleich große Abschnitte unterteilt (in der Abbildung sind dies 4 Abschnitte der Länge $\frac{1}{4}$). Diese Abschnitte beschreiben die Höhe der Trapeze. Die parallelen Seiten der Trapeze erhält man durch die Funktionswerte zweier benachbarter Abschnittsstellen.



a) **Erkläre,** warum sich der Flächeninhalt der Näherungsfläche $S_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ durch folgende Formel berechnen lässt:

[50] Die Geraden x = 1 und x = 3 sind Parallelen zur y-Achse. Alternativ kann die Aufgabe auch heißen: Bestimme den Flächeninhalt der Fläche, den der Graf von f über dem Intervall [1; 3] mit der x-Achse einschließt.

[51] Siehe Fußnote 5

[52] Dabei wird das rechtwinklige Dreieck T_1 als Trapez mit einer „parallelen" Seite der Länge Null aufgefasst.

$$S_4 = \left[\frac{\left(\frac{0}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{2}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{4}{4}\right)^2}{2}\right] \cdot \frac{1}{4}$$

b) Das Intervall [0; 1] wird nun in 100 gleichlange Abschnitte der Länge $\frac{1}{100}$ unterteilt. S_{100} beschreibt in Analogie zu S_4 die Näherungsfläche aus 100 Trapezen jeweils mit der Höhe $\frac{1}{100}$.

Gib durch Verallgemeinerung der Formel für S_4 mithilfe des Summensymbols Σ eine Formel für S_{100} **an** und **berechne** mithilfe des GTR den Wert von S_{100}.

c) Es lässt sich zeigen, dass bei einer Unterteilung des Intervalls in n gleichlange Abschnitte der Länge $\frac{1}{n}$ der Flächeninhalt S_n der n Trapeze durch folgenden Term beschrieben werden kann:

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n^2}$$

Interpretiere den Term für S_n und **gib** in Abhängigkeit von n einen Rechenausdruck **an** für die prozentuale Abweichung von S_n zum tatsächlichen Flächeninhalt, den die Normalparabel über dem Intervall [0; 1] mit der x-Achse einschließt.

3.5 Lösungen

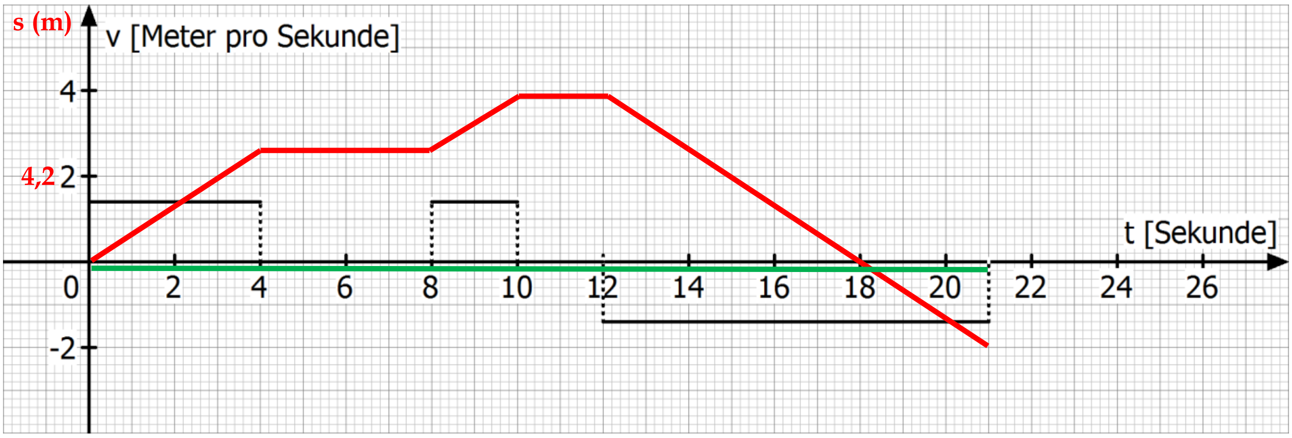
3.1 Flächen und Wirkungen

Erkundung

Situation	1	2	3	4	5	6
Graf	F	B	E	C	D	A
Ergebnis	9750 Personen	ca. 47 Nm	ca. 251 m^3	ca. 34320 m^3	ca. 47,9 km	ca. 1110 g
Bedeutung	Anzahl von Personen	Arbeit	Durchfluss-menge	Abfluss-menge	Zurückge-legter Weg	Ausstoß-menge
Lösungsweg	Man nähert (bzw. bestimmt) die Flächen unterhalb des Grafen und der waagerechten Achse durch Rechteckflächen an.					
Begründung	Da man die Flächen unterhalb des Grafen und der waagerechten Achse durch Rechtecke annähern kann, erhält man die Einheit der Flächen durch Multiplikation der beiden Achseneinheiten.					

Aufgabe 1

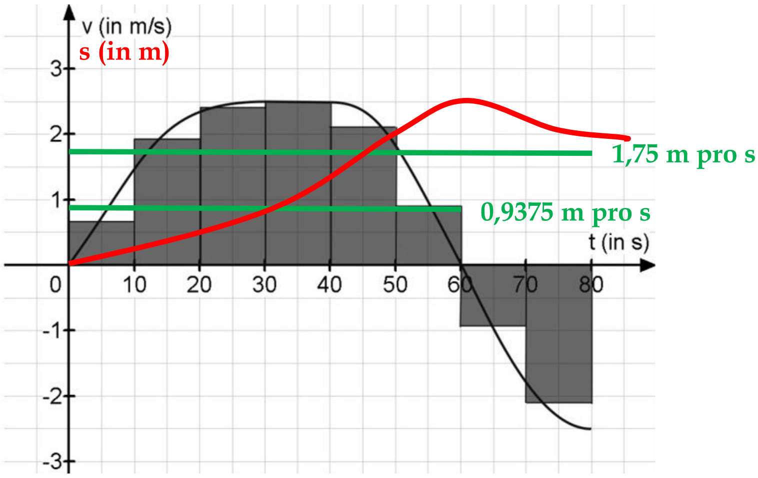
Weg-Zeit-Verlauf



Zeitpunkt	0	4	8	10	12	21
Länge des Zeitintervalls Δt (in s)	4	**4**	**2**	**2**	**9**	
Geschwindigkeit v in m pro s (in ms^{-1})	1,4	**0**	**1,4**	**0**	**-1,4**	
im Zeitintervall zurückgelegter Weg Δs (in m)	4 · 1,4 = 5,6	**0**	**2,8**	**0**	**-12,6**	
Bedeutung des Vorzeichens von Δs	Weg nach oben	**Stillstand**	**Weg nach oben**	**Stillstand**	**Weg nach unten**	
Entfernung zum Startpunkt (EG) (in m)	0	5,6	**5,6**	**8,4**	**8,4**	**-4,2**

$v_{[0;21]}$ = -4,2 m : 21 s = -0,2 m pro s

Aufgabe 2



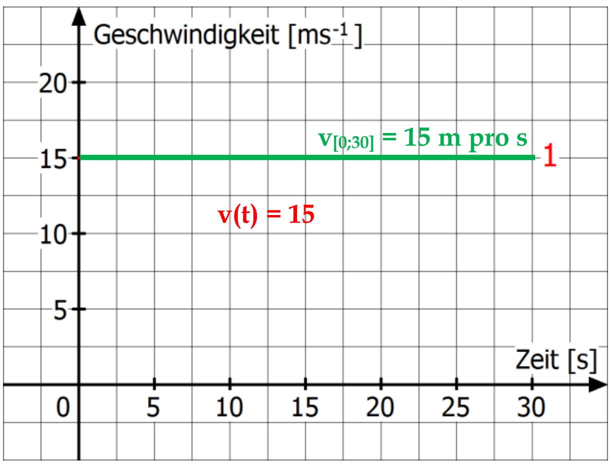
Mittlere Geschwindigkeit des Ballons für die ersten 60 Sekunden: 0,9375 $\frac{m}{s}$.

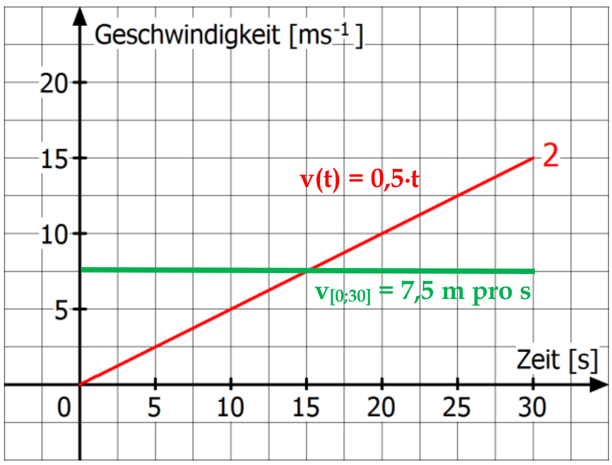
Mittlere Geschwindigkeit für die Gesamtdauer von 80 Sekunden: 1,75 $\frac{m}{s}$.

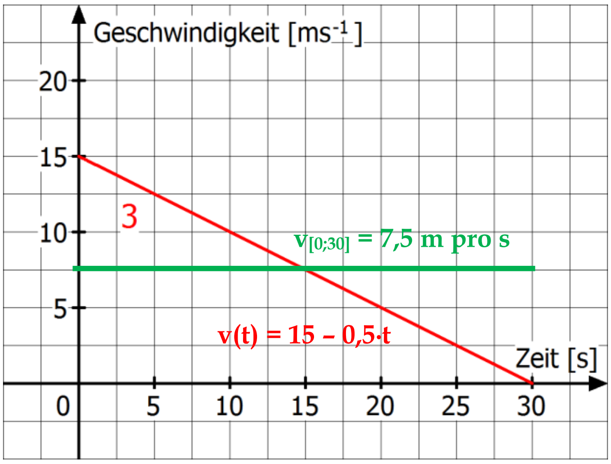
Kurve des Weg-Zeit-Verlaufs

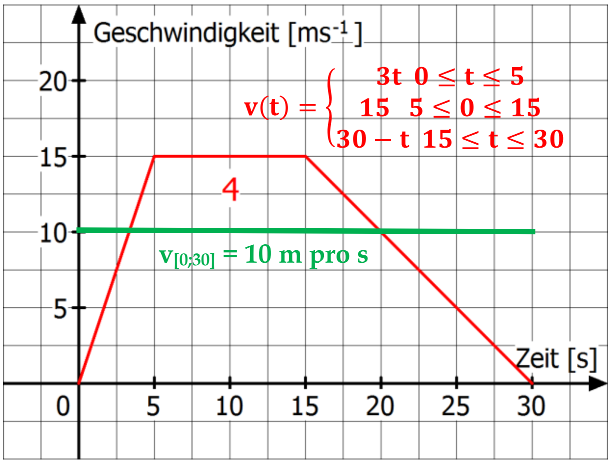
Zeitpunkt	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Länge des Zeitintervalls Δt	10	10	10	10	10	10	10	10	
(geschätzte) mittlere Geschwindigkeit v in diesem Zeitintervall (in m/s)	0,7	**1,3**	**2,4**	**2,5**	**2,1**	**0,9**	**-0,9**	**-2,1**	
im Zeitintervall zurückgelegter Weg Δs (in m)	7	**19**	**24**	**25**	**21**	**9**	**-9**	**-21**	
Bedeutung des Vorzeichens von Δs	Weg nach oben	**Weg nach oben**	**Weg nach oben**	**Weg nach oben**	**Weg nach oben**	**Weg nach unten**	**Weg nach unten**	**Weg nach unten**	
Entfernung zum Startpunkt (Höhe gegenüber dem Erdboden) (in m)	0	7	**26**	**50**	**75**	**96**	**105**	**96**	**75**

Aufgabe 3

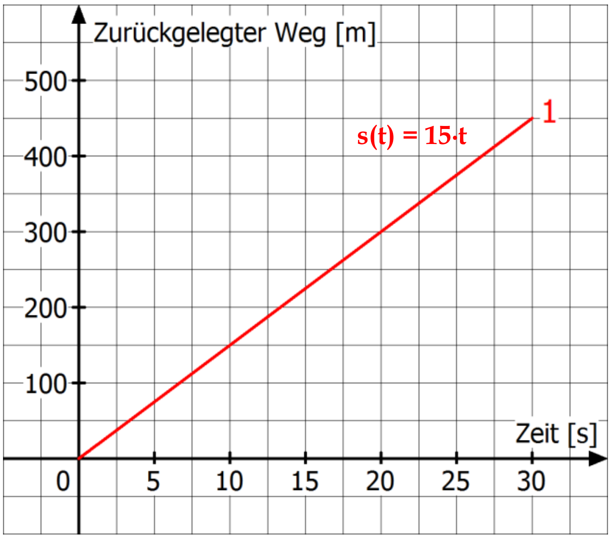


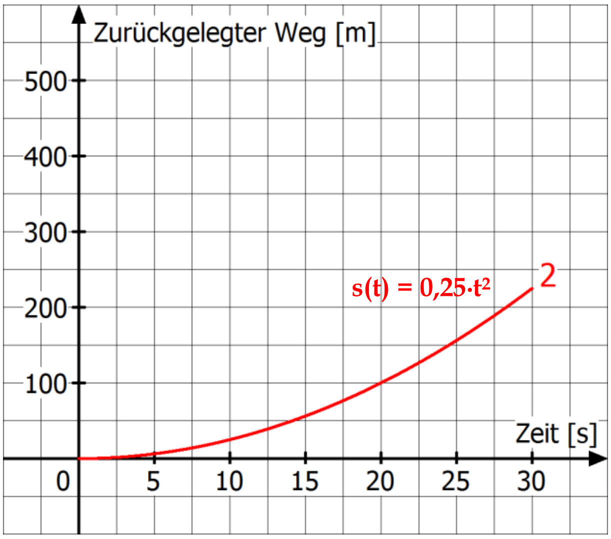


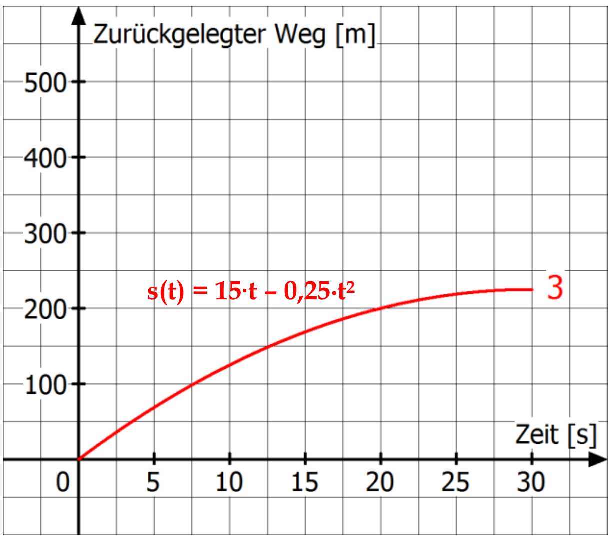


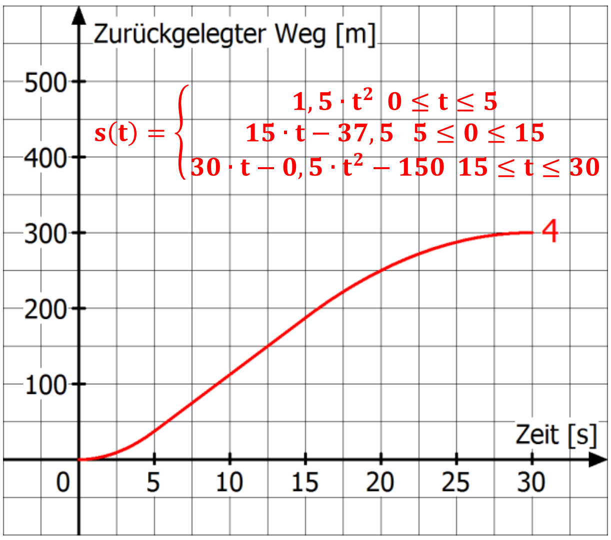


	Zeit in s	0	5	10	15	20	25	30
1	zurückgelegte Strecke in m	0	**75**	**150**	**225**	**300**	**375**	**450**
2	zurückgelegte Strecke in m	0	**6,25**	**25**	**56,25**	**100**	**156,25**	**225**
3	zurückgelegte Strecke in m	0	**68,75**	**125**	**168,75**	**200**	**218,75**	**225**
4	zurückgelegte Strecke in m	0	**37,5**	**112,5**	**187,5**	**250**	**287,5**	**300**









Es gilt: Die Ableitung der Wirkungsfunktion ist die Ursprungsfunktion.

Bedeutung der Fläche im Sachkontext:

(1) Menge Schadstoffe in g, die zwischen 7 und 7:50 ausgestoßen wird.
(2) Geleistete Arbeit auf den ersten 4 Metern.
(3) Ölmenge in m³, die an einem Tag durch die Pipeline gepumpt wird.
(4) Zuschauer, die ins Stadion kommen.
(5) Wassermenge, die in einer Stunde in ein Staubecken fließt.

Aufgabe 4

a) **Abgepumpte bzw. hineingepumpte Wassermenge in m³**

b) **V_0 = 225 m³ und V(30) = 75 m³**

c)

- [x] In den ersten 3 Stunden wird Wasser in das Rückhaltebecken gepumpt. **A > 0**
- [ ] Für 45 Minuten laufen alle fünf Pumpen zugleich mit maximaler Pumpleistung. **40 min**
- [ ] Nach 200 Minuten hat das Becken einen Wasserstand von weniger als 60 cm.
- [x] Der Wasserstand des Beckens ist nach 280 Minuten höher als am Anfang. **A > |B|**
- [ ] Der Wasserstand des Beckens ist nach 280 Minuten niedriger als am Anfang.
- [x] Nach 3 Stunden wird Wasser aus dem Becken abgepumpt. **B < 0**
- [ ] Der maximale Wasserstand ist nach 70 Minuten erreicht. **Nein, nach 3 h**

d) **ca. 75 min**

e) **560 m³ / -140 m³**

f) **siehe oben**

Aufgabe 5

$V_{Aquarium} = 432000\ cm^3$

a) **360 l = 360000 cm³ entspricht 50 cm Höhe**

b)

Zeit in s	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Wassermenge in l	**0**	**5**	**20**	**45**	**80**	**120**	**160**	**200**	**240**	**280**	**320**	**350**	**360**

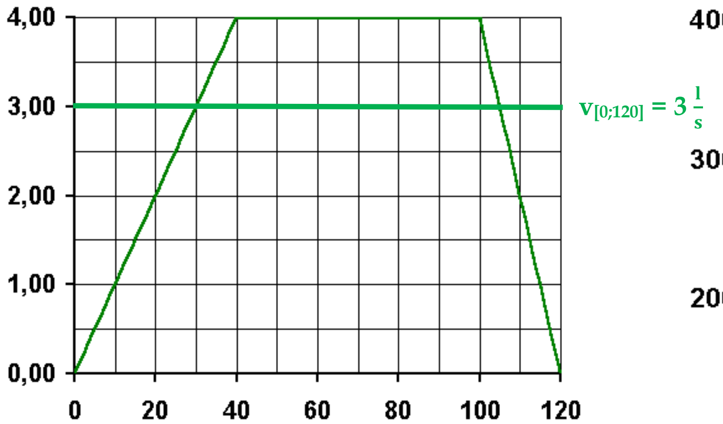
c) **s. u. rechts**

d) **s. u. links**

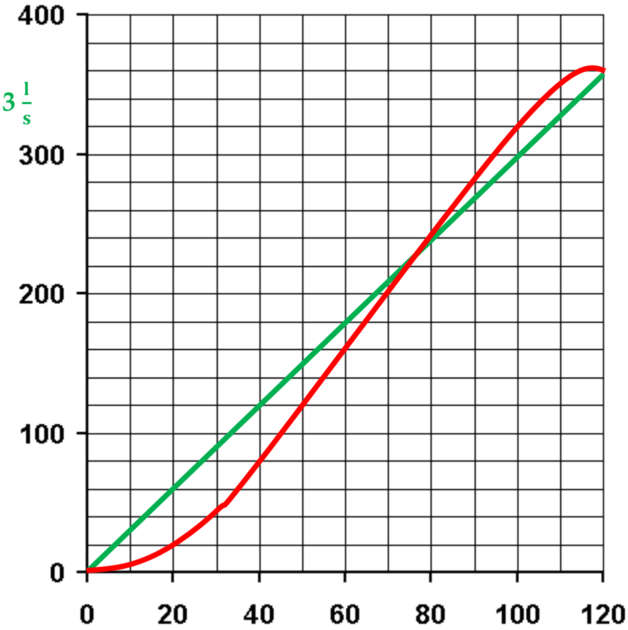
e) **s. u. rechts**

f) **siehe unten links bzw. rechts.**

$$W(t) = \begin{cases} 0{,}05 \cdot t^2 & 0 \le t \le 40 \\ 4 \cdot t - 80 & 40 \le 0 \le 100 \\ 24 \cdot t - 0{,}1 \cdot t^2 - 1080 & 100 \le t \le 120 \end{cases}$$



$$f(t) = \begin{cases} 0{,}1 \cdot t & 0 \le t \le 40 \\ 4 & 40 \le 0 \le 100 \\ 24 - 0{,}2 \cdot t & 100 \le t \le 120 \end{cases}$$



3.2 Von der Stammfunktion zum HS der Differential- und Integralrechnung

Aufgabe 1

a) $F(x) = 4x$ b) $F(x) = x^2 - x$ c) $F(x) = \frac{1}{4}x^2$ d) $F(x) = 0{,}6 \cdot x^5$ e) $F(x) = \frac{1}{15}x^6$ f) $F(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{48}x^6$
g) $F(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4$ h) $F(x) = \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 16x$ i) $F(x) = -2x^{-1}$ j) $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ k) $F(x) = 2\sqrt{x}$
l) $F_a(x) = \frac{a}{2}x^2 + 2x$ m) $F_a(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{3a}{5}x^5$ n) $F_a(x) = -\frac{a}{2}x^{-4} - 3ax^{-1}$ o) $F_a(x) = -2ax^{-0,5} = \frac{-2a}{\sqrt{x}}$

Aufgabe 2

a) Seien F und G zwei Stammfunktionen zur Funktion f und sei H(x) = F(x) – G(x). Dann gilt nach den Summenregel H´(x) = F´(x) – G´(x) = f(x) – f(x) = 0. Daher ist H eine konstante Funktion. Daher unterscheiden sich F und G durch eine Konstante.

b) $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + c \land F(1) = -2 \Rightarrow -\frac{1}{3} + 2 + c = -2 \Rightarrow c = -3\frac{2}{3}$.
$F(x) = -2{,}5x^{-2} + c \land F(1) = -2 \Rightarrow c = 0{,}5$

Aufgabe 3

a) 1C / 2D / 3A / 4B. A, B, C und D müssen jeweils einen Grad mehr haben als 1-4- Da A und C Parabeln sind, bleibt für 2 (ungerader Grad) nur D (gerader Grad) übrig und somit gilt 4B. Da der Graph 1 für $x > 0$ oberhalb der x-Achse liegt, muss der dazugehörige Graph der Stammfunktion für x > 0 monoton steigend sein ⇒ 1C ⇒ 3A.

b) 1: $f(x) = x$; 3: $f(x) = -2x + 3$; A: $f(x) = -x^2 + 3x$; C: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Aufgabe 4

a) Beliebige Stammfunktion $s(t) = \begin{cases} 0 \le t \le 5: 1{,}5 \cdot t^2 + c \\ 5 \le 0 \le 15: 15 \cdot t + d \\ 15 \le t \le 30: 30 \cdot t - 0{,}5 \cdot t^2 + e \end{cases}$

b) Wirkungsfunktion s – Berechnung der Konstanten:

$$s(t) = \begin{cases} 0 \le t \le 5: 1{,}5 \cdot t^2 + c \ \land s(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \\ 5 \le 0 \le 15: 15 \cdot t + d \land s(5) = 1{,}5 \cdot 5^2 = 37{,}5 \Rightarrow c = -37{,}5 \\ 15 \le t \le 30: 30 \cdot t - 0{,}5 \cdot t^2 + e \ \land s(15) = 15 \cdot 15 - 37{,}5 = 187{,}5 \Rightarrow e = -150 \end{cases}$$

Strategie zu b): Wertepaare aus der Tabelle in Aufgabe 3 von Kapitel 2 in V einsetzen – hier die „Anfangswerte“ der drei Intervalle (0/0), (5/37,5) und (15/187,5) – und Konstanten c, d und e ausrechnen: s(0) = 0 ⇒ c = 0; s(5) = 37,5 ⇒ d = -37,5; s(15) = 187,5 ⇒ e = -150. Also gilt: Die Wirkungsfunktion ist **<u>eine spezielle</u>** Stammfunktion. Aber nicht jede Stammfunktion ist Wirkungsfunktion.

Aufgabe 5

a) $\int_0^4 \left(\frac{1}{4}x + 3\right) dx = \left[\frac{1}{8}x^2 + 3x\right]_0^4 = 14 \neq 10$

b) $\int_1^4 (1{,}5x - 8)\, dx = [0{,}75x^2 - 8x]_1^4 = 12 - 32 - (0{,}75 - 8) = -12{,}75 = -\frac{51}{4}$

c) $\int_{-1}^1 dx = [x]_{-1}^1 = 1 - (-1) = 2$

d) $\int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$

e) $\int_0^n x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^n = \frac{n^3}{3}$

Aufgabe 6

a) $\int_{-1}^{1} x^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{n+1}1^{n+1} - \frac{1}{n+1}(-1)^{n+1}.$

Wenn n gerade ist, ist $\frac{1}{n+1}(-1)^{n+1} = -\frac{1}{n+1}$, andernfalls gilt $\frac{1}{n+1}(-1)^{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Für gerade n besitzt das Integral den Integralwert $\frac{2}{n+1}$. Für ungerade n ist der Integralwert 0.

b) $\int_0^{10}[x \cdot (x+2)]dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^{10} = \frac{1000}{3} + 100 = 433\frac{1}{3}$

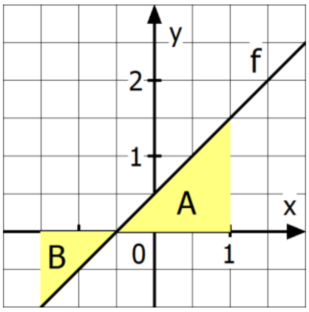
$\int_{-1}^{1}(x+1)^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_{-1}^{1} = 2\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 2\frac{2}{3}$

$\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -0{,}5 - (-1) = 0{,}5$

$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 x^{-0,5}dx = [2\sqrt{x}]_1^4 = 4 - 2 = 2$

Aufgabe 7

$f(x) = x + \frac{1}{2}$



$A = \int_{-0,5}^{1}\left(x + \frac{1}{2}\right) dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_{-0,5}^{1}$

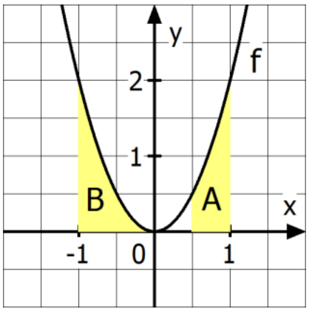
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}$

$B = \int_{-1,5}^{-0,5}\left(x + \frac{1}{2}\right) dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_{-1,5}^{-0,5}$

$= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \left(\frac{9}{8} - \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

$f(x) = 2x^2$



$A = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2x^2\, dx$

$= \left[\frac{2}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$

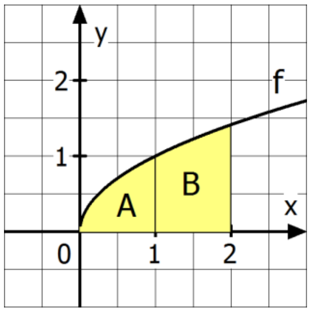
$= \frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$

$B = \int_{-1}^{0} 2x^2\, dx$

$= \left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{0}$

$= 0 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

$f(x) = \sqrt{x}$



$A = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx$

$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

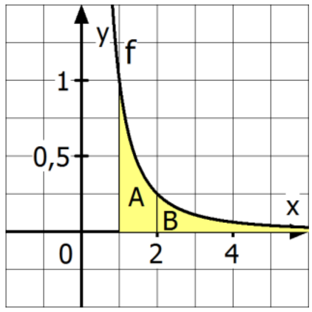
$= \frac{2}{3}$

$B = \int_1^2 \sqrt{x}\, dx$

$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$

$= \frac{2}{3}\sqrt{8} - \frac{2}{3}$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$



$A = \int_0^1 x^{-2}\, dx$

$= \left[-x^{-1}\right]_1^2$

$= -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$

$B = \int_2^R x^{-2}\, dx$

$= \left[-x^{-1}\right]_2^R$

$= -\frac{1}{R} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{R}$

$\xrightarrow[R \to +\infty]{} \frac{1}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \int_2^{+\infty} x^{-2}\, dx$

Exkurs: Numerische Berechnung von Flächen

a) Der gesuchte Flächeninhalt kann durch Rechtecke von oben und von unten angenähert werden. Dazu unterteilt man das Intervall [0; 1] in vier gleichgroße Intervall der Länge 0,25. Der tatsächliche Flächeninhalt liegt zwischen dem Flächeninhalt für die Rechtecke der Unter- und Obersumme. Ober- und Untersumme unterscheiden sich um das letzte Rechteck der Obersumme.

b) $U_8 = \frac{1}{8} \cdot 0^2 + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{6}{8}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{1}{8} \cdot \sum_{k=1}^{8} \left(\frac{k-1}{8}\right)^2 = \frac{35}{128} = 0{,}2734375$

$O_8 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdot 1^2 = \frac{1}{8} \cdot \sum_{k=1}^{8} \left(\frac{k}{8}\right)^2 = \frac{51}{128} = 0{,}3984375$

Daher gilt für den tatsächlichen Wert I: $\frac{35}{128} \leq I \leq \frac{51}{128}$.

c) Das erste Gleichheitszeichen stellt eine Verallgemeinerung der Terme für n = 4 und n = 8 dar. Das zweite Gleichheitszeichen beinhaltet das Faktorisieren der Intervalllänge $\frac{1}{n}$. Das dritte Gleichheitszeichen ist als Definition zu sehen.

d) **Anzahl n der Teilintervalle**	**4**	**8**	**10**	**100**	**1000**
Rechteckuntersumme U_n	0,2188	0,2734375	0,285	0,32835	0,3328335
Rechteckobersumme O_n	0,4688	0,3984375	0,385	0,33835	0,3338335

e) (1) Obersumme und Untersumme unterscheiden sich um das letzte Rechteck der Obersumme, das die Breite $\frac{1}{n}$ und Länge 1 hat.

(2) $O_n = \frac{1}{n} \cdot \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + 1\right] = \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2}{n^2}\right] = \frac{1}{n^3} \cdot [1^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2]$

(3) Beim ersten Gleichheitszeichen wendet man die Formel für die ersten n Quadratzahlen an. Beim zweiten Gleichheitszeichen wurde gekürzt. Beim dritten = wurde Ausmultipliziert. Beim vierten = wurde das Distributivgesetzt angewendet. Beim letzten = wurde gekürzt.

(4) Für große n streben $\frac{1}{2n}$ und $\frac{1}{6n^2}$ gegen Null, so dass O_n gegen $\frac{1}{3}$ strebt.

3.3 Fläche zwischen Kurven und weitere interessante Anwendungen

a) Nullstellen: 0; 1; 3.

$$A = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx + \left|\int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx\right| = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_1^3\right|$$

$$= \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{4}{3} + \tfrac{3}{2}\right) + \left|\tfrac{1}{4}3^4 - \tfrac{4}{3}3^3 + \tfrac{3}{2}3^2 - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{4}{3} + \tfrac{3}{2}\right)\right| = \frac{5}{12} + \left|-2{,}25 - \frac{5}{12}\right| = \frac{5}{12} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}$$

b) $f(x) - g(x) = -x^3 + x$; Schnittstellen: -1; 0; 1.

$$A = \left|\int_{-1}^0 (-x^3 + x)\,dx\right| + \left|\int_0^1 (-x^3 + x)\,dx\right| = \left|\left[-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0\right| + \left|\left[-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1\right|$$

$$= \left|-\left(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\right)\right| + \left|-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\right| = 0{,}5$$

c) Berechnung der Nullstellen von f durch $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$.

$$A = \int_1^5 (-0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5)\,dx = \left[-\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 2{,}5x\right]_1^5 = -\tfrac{1}{6}5^3 + \tfrac{3}{2}5^2 - 12{,}25 - \left(-\tfrac{1}{6} + \tfrac{3}{2} - 2{,}5\right)$$

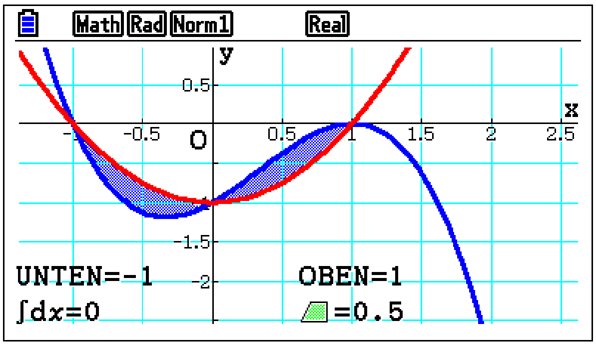
$$= \frac{25}{6} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{32}{6} = 5\,\frac{1}{3}$$

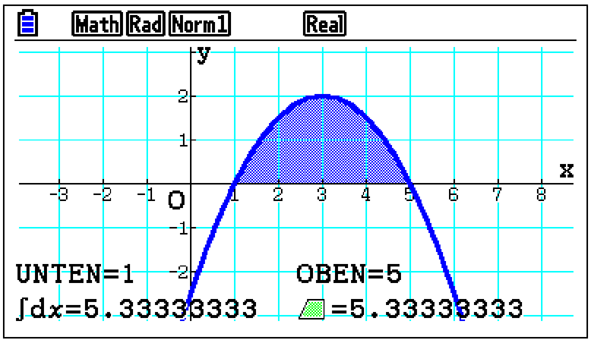
d) Differenzfunktion $d(x) = f(x) - g(x) = -0{,}25x^2 + 0{,}5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$

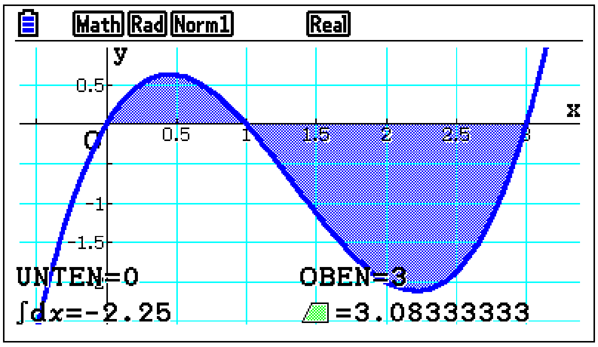
$$A = \int_{-2}^4 (-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 2)\,dx = \left[-\tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2 + 2x\right]_{-2}^4$$

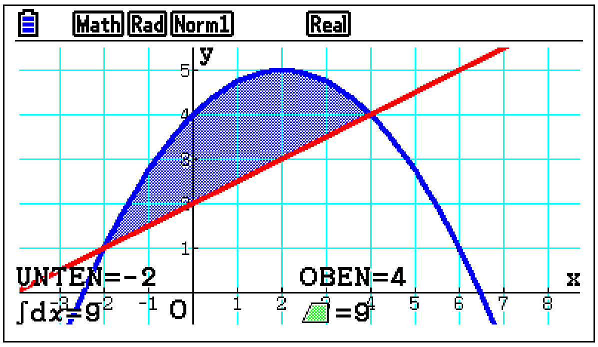
$$= -\tfrac{1}{12}4^3 + \tfrac{1}{4}4^2 + 8 - \left(-\tfrac{1}{12}(-2)^3 + \tfrac{1}{4}(-2)^2 - 4\right) = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{27}{3} = 9$$

Der GTR gibt sowohl den Integralwert als auch den Wert für die eingeschlossene Fläche an:



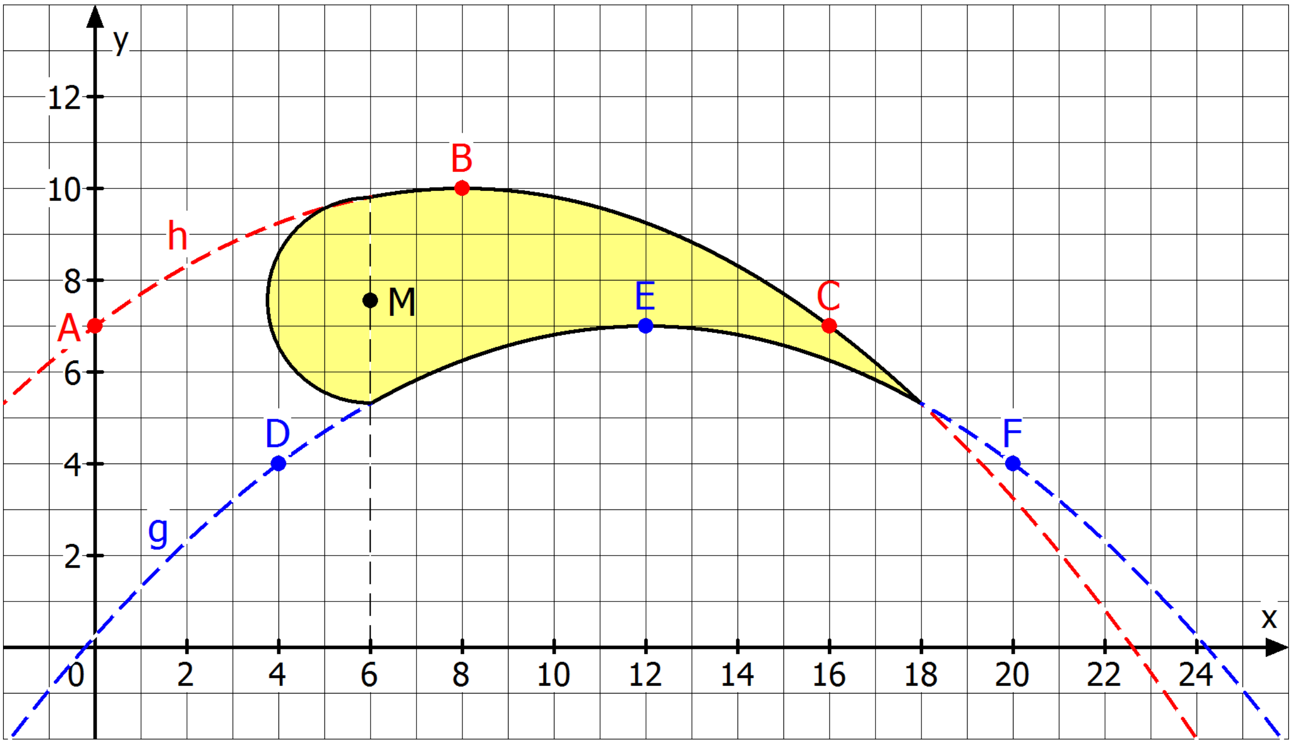






Aufgabe 2

a) Folgende Zeichnung kann erstellt werden:



b) Für die Parabel zu h erhält man folgenden Bedingungen: $h(0) = 7,\ h(8) = 10\ und\ h(16) = 7$. Damit ergibt sich mit dem Ansatz $h(x) = ax^2 + bx + c$ das folgende LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 7 \\ 8^2 & 8 & 1 & 10 \\ 16^2 & 16 & 1 & 7 \end{array}\right) \underset{GTR}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{64} \\ \frac{3}{4} \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}046875 \\ 0{,}75 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow h(x) = -\frac{3}{64}x^2 + \frac{3}{4}x + 7$$

Analog ergibt sich für g(x) = $ax^2 + bx + c$ mit $g(4) = 4,\ g(12) = 7\ und\ g(20) = 4$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4^2 & 4 & 1 & 4 \\ 12^2 & 12 & 1 & 7 \\ 20^2 & 20 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{GTR}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2944} \\ \frac{9}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}046875 \\ 1{,}125 \\ 0{,}25 \end{pmatrix} \Rightarrow g(x) = -\frac{3}{64}x^2 + \frac{9}{8}x + \frac{1}{4}$$

Die Scheitelpunkte der Parabeln sind offenbar E und B. Da beide Funktionsgleichungen den gleichen Streckfaktor haben, wurde der Graf von g durch Verschiebung um 4 nach links und 3 nach oben in den Grafen zu h überführt.

c) Berechnung des Inhalts der Fläche A, die durch die beiden Parabeln und die Gerade x = 6 eingeschlossen wird: (1) Berechne die Schnittstelle von g und h bzw. die Nullstelle von d = h – g:

$h(x) - g(x) = -\frac{3}{64}x^2 + \frac{3}{4}x + 7 - \left(-\frac{3}{64}x^2 + \frac{9}{8}x + \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8}x + \frac{27}{4} = 0 \Leftrightarrow x = 18.$

(2) $A = \int_6^{18} \left(-\frac{3}{8}x + \frac{27}{4}\right) dx = \left[-\frac{3}{16}x^2 + \frac{27}{4}x\right]_6^{18} = 27$

Berechnung der Halbkreisfläche B: (1) Ermittle den Radius des Halbkreises:

$r = \frac{h(6)-g(6)}{2} = \frac{d(6)}{2} = -\frac{9}{8} + \frac{27}{8} = \frac{9}{4} = 2{,}25$ *(2)* $B = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 2{,}25^2 \approx 7{,}95$

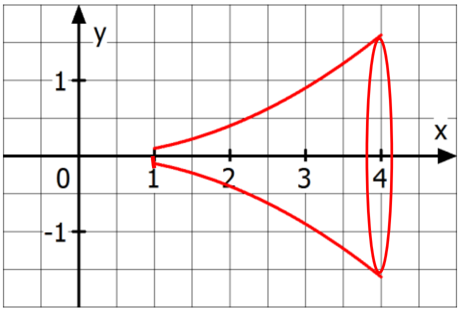
Damit hat der Flügel einen Flächeninhalt von ca. 34,95 cm^2.

d) Es gilt für das Volumen: $V = 34{,}95 \cdot 40 = 1398\ [cm^3]$. Für die Masse des Flügels multipliziert man das Volumen mit der Dichte: $m = Volumen \cdot Dichte = 1398\ cm^3 \cdot 1{,}8\ \frac{g}{cm^3} = 2156{,}4\ g = 2{,}1564\ kg$.

Aufgabe 3

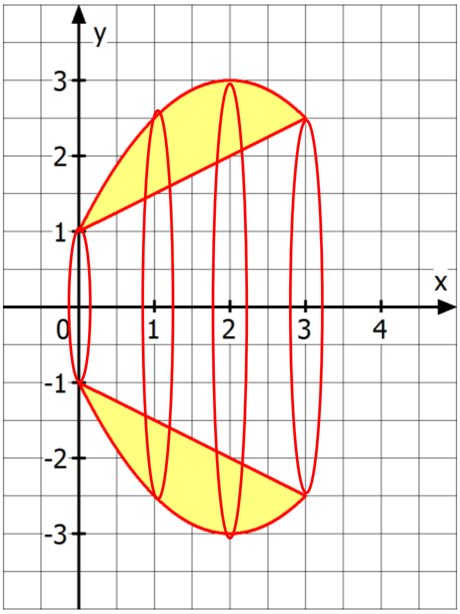
a) $V = \pi \cdot \int_1^{10} \left(\sqrt{x-1}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_1^{10} (x-1)\, dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^{10} = 40{,}5\pi \approx 127{,}23$

b)

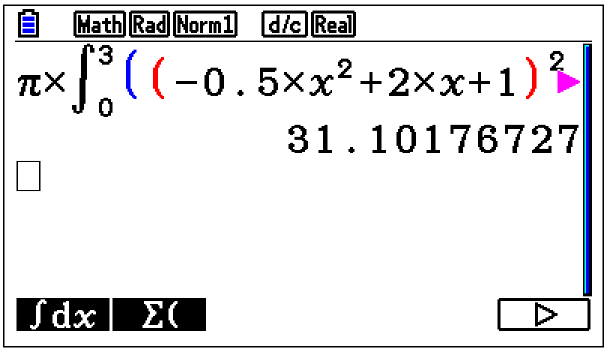


$$V = \pi \cdot \int_1^{10} (0{,}1x^2)^2\, dx$$
$$= \pi \cdot \int_1^4 0{,}01x^4\, dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{500}x^5\right]_1^4$$
$$= \left(\frac{1}{500}4^5 - \frac{1}{500}\right)\pi$$
$$= 2{,}046\pi$$
$$\approx 6{,}43$$

c)



$$V = \pi \cdot \int_0^3 [g(x)]^2\, dx - \pi \cdot \int_0^3 [f(x)]^2\, dx$$
$$= \pi \cdot \int_0^3 \left([g(x)]^2 - [f(x)]^2\right) dx$$
$$= \pi \cdot \int_0^3 [(-0{,}5x^2 + 2x + 1)^2 - (0{,}5x + 1)^2]\, dx$$
$$= 9{,}9\pi$$
$$\approx 31{,}10$$



d) Während bei der Flächenberechnung Rechtecke mit der gleichen Intervallbreite Δx und der Höhe $g(x_k)$ aufsummiert werden, erfolgt bei der Volumenberechnung eine Aufsummierung von Zylindervolumina mit dem Radius $f(x_k)$ und der Höhe Δx. In folgender Tabelle wird die Analogie deutlich gemacht:

Flächenberechnung in Ebenen	**Volumenberechnung im Raum**
Flächeninhalt eines Rechtecks $= a \cdot b = g(x) \cdot \Delta x$	Volumen eines Zylinders $= \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot [f(x_1)]^2 \cdot \Delta x$
$U_n = g(x_1) \cdot \Delta x + g(x_2) \cdot \Delta x + \dots + g(x_n) \cdot \Delta x$	$U_n = \pi \cdot [f(x_1)]^2 \cdot \Delta x + \dots + \pi \cdot [f(x_n)]^2 \cdot \Delta x$ $= \pi \cdot \left([f(x_1)]^2 \cdot \Delta x + \dots + [f(x_n)]^2 \cdot \Delta x\right)$
$U_n = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \cdot \Delta x \xrightarrow[\Delta x \to 0]{n \to \infty} \int_a^b g(x)\, dx$	$U_n = \pi \cdot \sum_{k=1}^{n} [f(x_k)]^2 \cdot \Delta x \xrightarrow[\Delta x \to 0]{n \to \infty} \int_a^b [f(x)]^2\, dx$

Aufgabe 4

a) Der Flächeninhalt beschreibt die Entfernung vom Startpunkt. Das Gefährt bewegt sich in den ersten 40 Sekunden vorwärts (v positiv), zwischen der 40. und 60. Sekunde rückwärts (v negativ) und dann wieder vorwärts (v positiv). Die lokal größten Geschwindigkeiten werden bei t = 15 und t = 70 Sekunden erreicht. Die kleinste Geschwindigkeit erreicht die Draisine bei t = 50 Sekunden.

b) Die Nullstellen liegen bei 0, 40 und 60 s, denn $v(t) = t \cdot \left(\frac{1}{3000} \cdot t^2 - \frac{1}{30} \cdot t + \frac{4}{5}\right) = 0$ genau dann, wenn t = 0 oder $\frac{1}{3000} \cdot t^2 - \frac{1}{30} \cdot t + \frac{4}{5} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 100 \cdot t + 2400 = 0$ (p-q-Formel). Sie beschreiben den Zeitpunkt eines Richtungswechsels.

c) Die Integrale beschreiben die Entfernung des Objekts vom Startpunkt. Eine Stammfunktion von v lautet $F(t) = \frac{1}{12000} \cdot t^4 - \frac{1}{90} \cdot t^3 + \frac{2}{5} \cdot t^2$. Damit gilt für $\int_0^b v(t)dt = F(b) - F(0) = F(b)$. Durch Einsetzen erhält man: $F(10) = 29{,}722, F(50) = 131{,}94, F(60) = 120, F(70) = 149{,}72$ [m].

d) $s(40) = \int_0^{40} v(t)dt = F(40) - F(0) = F(40) = 142{,}22$ [m].

e) $\bar{v}[0;40] = \frac{s(40)}{40} = \frac{142{,}22}{40} \approx 3{,}56;\ \bar{v}[0;60] = \frac{s(60)}{60} = \frac{120}{60} = 2;\ \bar{v}[0;70] = \frac{s(70)}{70} = \frac{179{,}72}{70} \approx 2{,}57\ [\frac{m}{s}]$.

f) Bei den Nullstellen von v müssen die Extremstellen von s liegen. Das lokale Maximum beträgt $s(40) = 142{,}44$, das lokale Minimum ist $s(60) = 120$. Die beiden Randwerte sind $s(0) = 0$ sowie s(70) = 179,72. Der Grad der Weg-Zeit-Funktion beträgt 4, so dass der Graph von links oben nach rechts oben verläuft.

g) Die von beiden Graphen eingeschlossene Fläche beschreibt den Abstand beider Draisinen.

h) Gleichsetzen der beiden Funktionsgleichungen liefert die Schnittstellen t = 0 und t = 30, denn:
$\frac{1}{3000} \cdot t^3 - \frac{1}{30} \cdot t^2 + \frac{4}{5} \cdot t = -\frac{1}{40} \cdot t^2 + \frac{51}{60} \cdot t \Leftrightarrow \frac{1}{3000} \cdot t^3 - \frac{1}{120} \cdot t^2 - \frac{1}{20} \cdot t = 0 \Leftrightarrow t^3 - 25 \cdot t^2 - 150 \cdot t = 0$
$\Leftrightarrow t \cdot (t^2 - 25 \cdot t - 150) = 0$ ($t_1 = 0$ und p-q-Formel liefert $t_2 = -5$ und $t_3 = 30$)
$\int_0^{30} [v_{Motor}(t) - v(t)]dt = \int_0^{30} (-\frac{1}{3000} \cdot t^3 + \frac{1}{120} \cdot t^2 + \frac{1}{20} \cdot t)dt = 30$ [m].

i) $\int_0^{40} [v_{Motor}(t) - v(t)]dt = \int_0^{40} (-\frac{1}{3000} \cdot t^3 + \frac{1}{120} \cdot t^2 + \frac{1}{20} \cdot t)dt \approx 4{,}44$ [m]

3.4 Kontrollaufgaben

Aufgabe 1 (Heißluftballon)

a) Der Flächeninhalt entspricht der Entfernung vom Startpunkt in m.

b) Der Ballon bewegt sich in den ersten 43 Sekunden nach oben, dann bis zum Ende nach unten. Kurz vor den Stellen mit v = 0 wurde Heißluft hinzugefügt bzw. entnommen, so dass der Ballon seine Geschwindigkeit und Richtung abrupt ändert. Die größte und kleinste Geschwindigkeit werden zu den Zeitpunkten t = 40 und t = 58 erreicht.

c) Die mittlere Geschwindigkeit für die ersten 30 Sekunde beträgt etwa 10 m pro s. Daher ergibt sich eine Höhe von etwa 300 m.

d) Die maximale Steighöhe wird nach ca. 42 Sekunden erreicht und beträgt etwa 460 m.

e) Der Flächeninhalt unter der t-Achse ist kleiner als über der t-Achse, so dass der Ballon auf einer Anhöhe landet. Der Flächeninhalt unter der Kurve beträgt etwa - 240 m, so dass der Höhenunterschied ca. 220 m beträgt.

f) Der Graf der Wirkungsfunktion steigt bis zur Nullstelle der Geschwindigkeitsfunktion bei t = 43 an und hat seinen maximalen Anstieg bei t = 40. Anschließend fällt der Graf der Wirkungsfunktion und hat bei t = 58 seinen lokal geringsten Anstieg.

Aufgabe 2 (Funktion, Stammfunktion, Wirkungsfunktion – Graphen zuordnen)

Die Funktionen g und h sind beides Stammfunktionen zu f, da die Nullstellen von f lokale Extremstellen von g und i sind. Allerdings ist h die Wirkungsfunktion zu f, da im Bereich -1,5 bis 1,25 mehr Wasser ins Becken gepumpt als abgepumpt wurde und die Gesamtbilanz damit positiv ist, so dass der Graph komplett oberhalb der x-Achse liegen muss.

Aufgabe 3 (Flächenberechnung)

a) A: Nullstellen von f berechnen: $f(x) = -x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \xLeftrightarrow[\substack{D=4;p=-2\\ x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}}]{} x = -1 \pm 2$

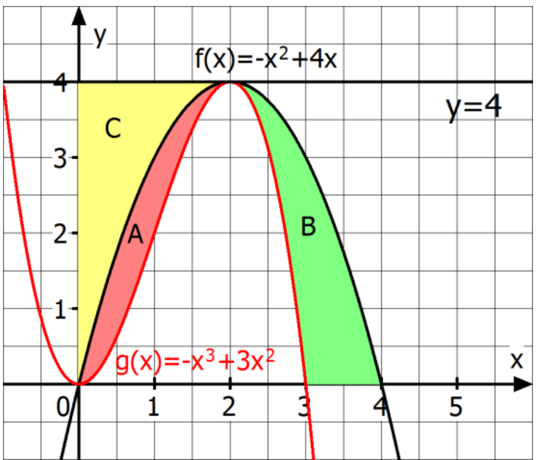
$A = \int_{-1}^{3}(-x^2 + 2x + 3)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} = -9 + 9 + 9 - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = 10\frac{2}{3}$

$B = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^1 [-x^3 + 3x + 2 - (2 - x)]\,dx = \int_0^1 \left(-x^3 + 4x\right)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2\right]_0^1 = \frac{7}{4}$

C: Schnittstellen von g und h: $x^{10} + 10 = x + 10 \Leftrightarrow x^{10} - x = 0 \Leftrightarrow x(x^9 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = 1$

$C = \int_0^1 [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^1 \left(x - x^{10}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{11}x^{11}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{11} = \frac{9}{22}$

b)



$A = \int_0 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0 \left(x^3 - 4x^2 + 4x\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = 4 - \frac{32}{3} + 8 = \frac{4}{3}$

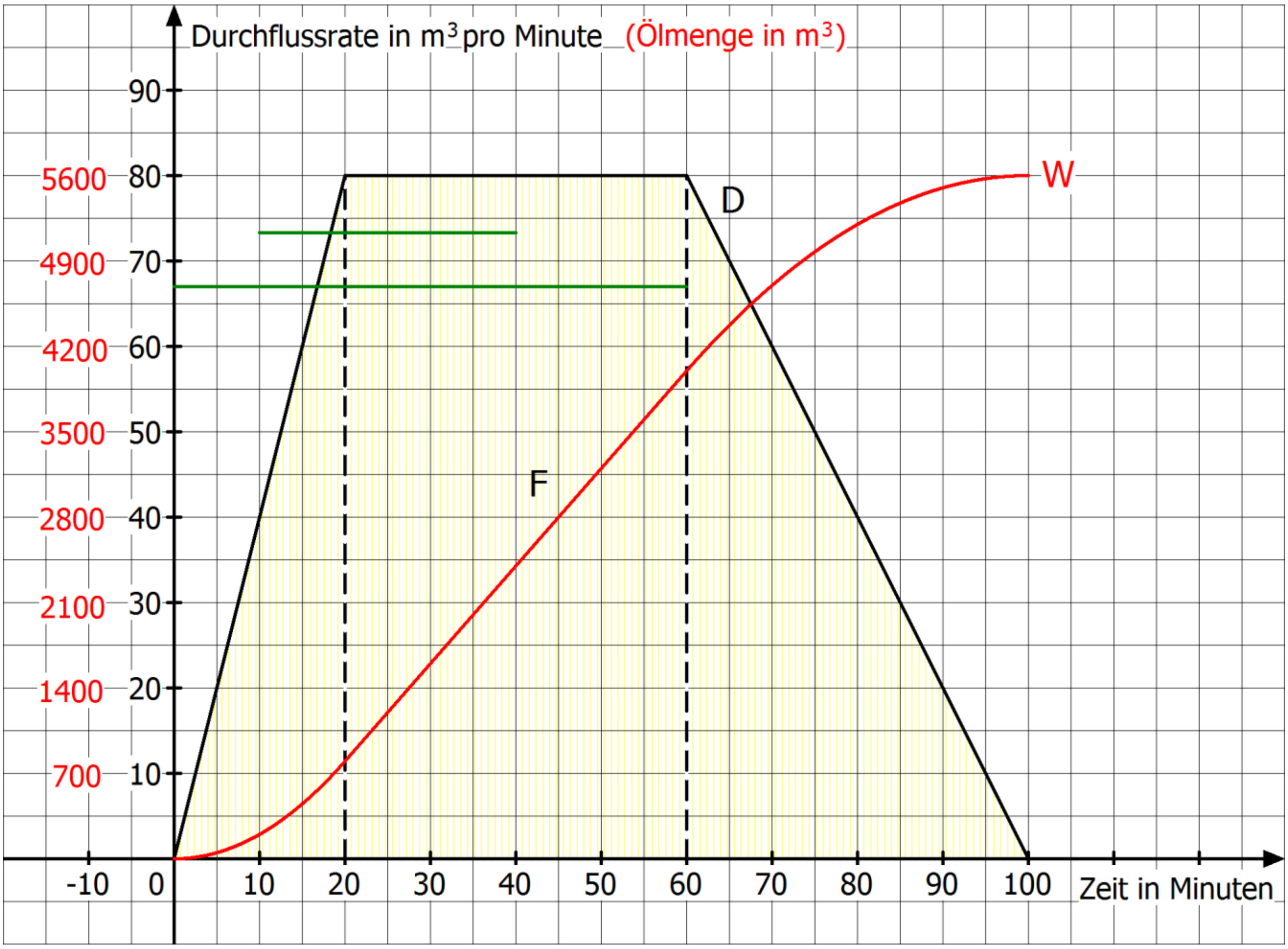
$B = \int_2^4 f(x)\,dx - \int_2^3 g(x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_2^4 - \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3\right]_2^3 = 5\frac{1}{3} - 2\frac{3}{4} = 2\frac{7}{12}$

$C = 8 - \int_0^2 f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = 8 - 5\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$

Aufgabe 4 (Steckbriefaufgabe)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f(0) = 0\ (d = 0),\ f'(0) = 0\ (c = 0), f(-2) = 1\ (-8a + 4b = 1), f'(-2) = 0\ (-12a - 4b = 0)$
$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2$

Aufgabe 5 (Durchfluss in einer Ölpipeline)



a) Der Flächeninhalt F zwischen Kurve und Zeitachse beschreibt die Menge Öl in m³, die in den ersten 100 Minuten durch die Pipeline fließt $[\frac{m^3}{min} \cdot min = m^3]$.

b) Der Flächeninhalt des ersten Dreiecks beträgt $20\ min \cdot 80\ \frac{m^3}{min} : 2 = 800\ m^3$. Der Flächeninhalt des folgenden Rechtecks beträgt $40\ min \cdot 80\ \frac{m^3}{min} = 3200\ m^3$. Daher ist $W(60) = W(20) + 3200 = 800 + 3200 = 4000\ [m^3]$.

c) Der mittlere Durchfluss $\overline{m}$ für die ersten 60 Minuten beträgt 4000:60 ≈ 67 $\frac{m^3}{min}$. Zeichne eine Parallele zur Zeitachse im Abstand von 67 ein über den ersten 60 Minuten. Von der 10. bis zur 40. Minute beträgt der mittlere Durchfluss 2200:30 = $73\frac{1}{3}\frac{m^3}{min}$.

d) a ist die Steigung des ersten Abschnittes und beträgt 80:20 = 4. b = 80, da die Strecke parallel zur Zeitachse im Abstand von 80 ist. Für die Berechnung von c setzt man die Koordinaten des Punkte (60/80) in die Gleichung D(t) = -2t + c ein, d.h. 80 = -2 · 60 + c, d.h. c = 200.

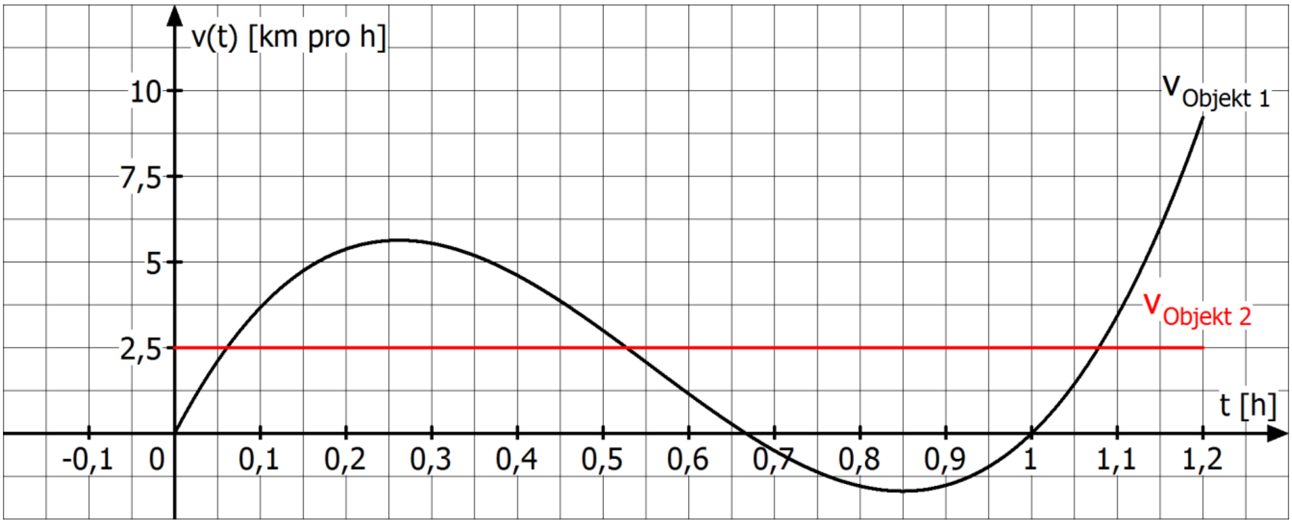
e) Die Wirkungsfunktion ist eine Stammfunktion. Daher gilt für die Wirkungsfunktionen der drei Abschnitte $W(t) = 2t^2 + c_1$, $W(t) = 80t + c_2$, $W(t) = -t^2 + 200t + c_3$. Nun berechnet man die Konstanten c_1, c_2 und c_3 durch die Bedingungen $W(0) = 0$, $W(20) = 800$ und $W(60) = 4000$.

f) Da 90 im dritten Intervall liegt, wählt man $W(t) = -t^2 + 200t - 4400$. Nun gilt für die durchgeflossene Wassermenge nach 90 min $W(90) = -90^2 + 200 \cdot 90 - 4400 = 5500$ [m³].

g) Da nach 20 Minuten 800 m³ Öl durch die Pipeline geflossen sind, muss der Zeitpunkt für 500 m³ zwischen 0 und 20 liegen. Daher verwendet man die Wirkungsfunktion für den ersten Abschnitt. Hier gilt $W(t) = 2t^2 = 500 \Leftrightarrow t = \sqrt{250}$ Minuten [$80t - 800 = 1000 \Leftrightarrow t = 22{,}5$; $-t^2 + 200 \cdot t - 4400 = 4500 \Leftrightarrow -t^2 + 200 \cdot t - 8900 = 0 \Leftrightarrow t \approx 66{,}83$ (und $t \approx 133{,}16 > 100$)]

h) Die Durchflussgeschwindigkeit oder der Durchfluss wirkt sich auf die Ölmenge aus, d. h. je schneller Öl pro Zeiteinheit durch die Pipeline gepumpt wird, desto höher ist die durchgepumpte Ölmenge. Die Fläche unter dem Graphen beschreibt die Ölmenge, wird durch die Wirkungsfunktion der Durchflussfunktion bestimmt und ist eine spezielle Stammfunktion der Durchflussfunktion.

Aufgabe 6 (Geschwindigkeitsverlauf zweier Objekte)



a) $v(t) = 72t^3 - 120t^2 + 48t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{2}{3} \vee t = 1$. Die Nullstellen sind die Zeitpunkte der Richtungsänderung. Daher ändert das Objekt nach 40 und 60 Minuten seine Richtung.

b) $\int_0^{\frac{2}{3}} v(t)dt = \left[18t^4 - 40t^3 + 24t^2\right]_0^{\frac{2}{3}} = \frac{64}{27}$: Entfernung vom Startpunkt nach 40 Minuten

$\int_{\frac{2}{3}}^{1} v(t)dt = \left[18t^4 - 40t^3 + 24t^2\right]_{\frac{2}{3}}^{1} = -\frac{10}{27}$: In Richtung Startpunkt zurückgelegter Weg von der 40. bis zur 60. Minute beträgt $\frac{10}{27}$.

$\int_0^{1,2} v(t)dt = \left[18t^4 - 40t^3 + 24t^2\right]_0^{1,2} = \frac{1728}{625}$: Entfernung vom Startpunkt nach 72 Minuten.

c) $v(1{,}2) = 9{,}216\ \frac{km}{h}$. $\bar{v}_{[0;1,2]} = \frac{1}{1{,}2-0}\int_0^{1,2} v(t)dt = \frac{1}{1{,}2} \cdot \frac{1728}{625} \approx 2{,}304\,\frac{km}{h}$

d) $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b v(t)dt$: Mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall [a; b].

e) (1) $s(t) = \int_0^t v(x)dx$: Entfernung vom Startpunkt nach t Minuten.

(2) $\int_0^t v(x)dx = \left[18x^4 - 40x^3 + 24x^2\right]_0^t = 18t^4 - 40t^3 + 24t^2$

(3) Die Nullstellen von v sind die wegen des VZW von v Extremstellen von s. Bei $t = \frac{2}{3}$ wechselt v das VZ von + nach –. Daher liegt dort eine lokale Maximumstelle vor. Bei t = 1 findet ein VZW von v von – nach + statt. Daher liegt dort eine lokale Minimumstelle vor. Die Randwerte betragen s(0) =

0 und $s(1{,}2) = \frac{1728}{625} \approx 2{,}7648$. Wegen $s(\frac{2}{3}) = 2{,}37 < 2{,}7648$ und $s(1) = 2 > 0$ sind die Extremstellen ausschließlich lokaler Art.

f) (2) $1{,}2\,\mathrm{h} \cdot 2{,}5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 3\,\mathrm{km}$.

(3) $\left|\int_0^t [v(x) - 2{,}5]dx\right|$

(4) $\int_0^t [v(x) - 2{,}5]dx = 0 \Leftrightarrow \left[18x^4 - 40x^3 + 24x^2 - 2{,}5x\right]_0^t = 0 \Leftrightarrow 18t^4 - 40t^3 + 24t^2 - 2{,}5t = 0$
$\underset{\mathrm{GTR}}{\Longleftrightarrow} t = 0 \vee \mathbf{t \approx 0{,}13} \vee t \approx 0{,}86 \vee t \approx 1{,}23$. Nach ca. 8 Minuten überholt Objekt 1 das Objekt 2 zum ersten Mal.

Aufgabe 7 (Torbogen)

a) Legt man den Ursprung des Koordinatensystems in die Mitte der Toreinfahrt, hat das parabelförmige Tor die Gleichung $f(x) = ax^2 + 3{,}5$ und die Funktion h die Form $g(x) = bx^4 + cx^2 + 7$. Zur Berechnung von a verwendet man den Ansatz $f(1{,}5) = 0 \Leftrightarrow 2{,}25a + 3{,}5 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{14}{9}$. Um b und c zu ermitteln, helfen die beide folgenden Bedingungsgleichungen weiter: $g(5) = 4$ und $g'(5) = 0$. Dann gilt: 625b + 25c = -3 und 500b + 10c = 0. Der GTR liefert die Lösung: $b = \frac{3}{625}$ und $c = -\frac{6}{25}$. Insgesamt ergeben sich folgende Gleichungen: $f(x) = -\frac{14}{9}x^2 + 3{,}5$ und $g(x) = \frac{3}{625}x^4 - \frac{6}{25}x^2 + 7$.

b) Zur Berechnung der Querschnittsfläche A hilft folgender Ansatz weiter (hier muss die Stammfunktion nicht explizit angegeben werden): $A = \int_{-5}^{5} g(x)\,dx - \int_{-1{,}5}^{1{,}5} f(x)\,dx = 56 - 7 = 49\ [\mathrm{m}^2]$

c) $V = A \cdot 6 = 294\ [\mathrm{m}^3]$ $m = V \cdot \rho = 294\,000\,000\ \mathrm{cm}^3 \cdot 2{,}7\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 793800000\ \mathrm{g} = 793800\ \mathrm{kg} = 793{,}8\ \mathrm{t}$

d) Materialkosten = $m \cdot 760 \cdot 1{,}19 = 717912{,}72$ €

Aufgabe 8 (Flächenberechnung bewusst unter Nutzung des GTR)

$a)$ (1) $A = 2 \cdot \int_{-\sqrt{2}}^{0} f(x)\,dx = 2$ (f ist ungerade)

(2) $A = \left|\int_1^{\sqrt{2}} f(x)\,dx\right| + \int_{\sqrt{2}}^{3} f(x)\,dx = 12{,}5$

b) (1) $A = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \left|\int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx\right| = 3\frac{1}{12}$

(2) $A = \int_1^3 [f(x) - g(x)]\,dx = 20\frac{2}{3}$ (Darstellungsbereich anpassen)

c) $A = \int_0^2 [h(x) - f(x)]\,dx - \int_0^1 [g(x) - f(x)]\,dx = 4 - \frac{5}{12} = 3\frac{7}{12}$

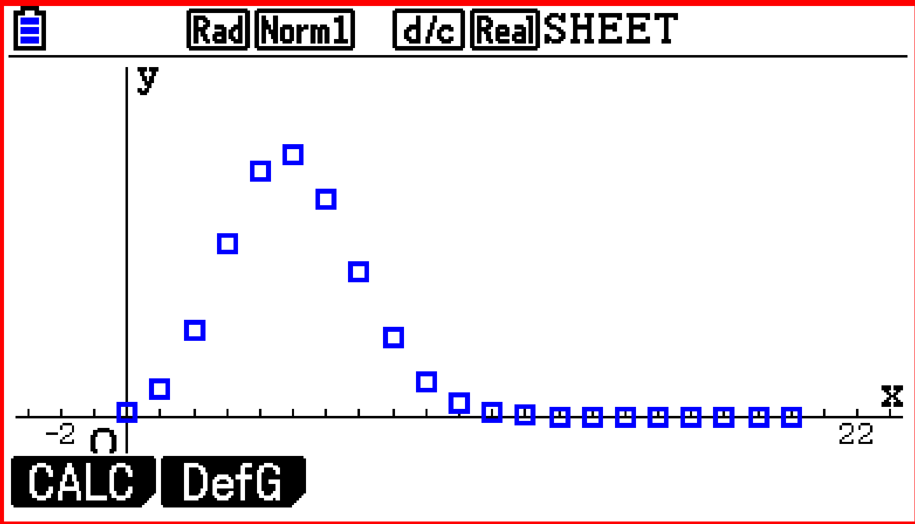
Aufgabe 9 (Trapezmethode)

a) Mithilfe der Trapezformel lassen sich die Flächeninhalte für die vier Trapeze berechnen, indem man den Mittelwert der Funktionswerte zweier benachbarter Zerlegungsstellen mit der Höhe $\frac{1}{4}$ multipliziert: $S_4 = \frac{\left(\frac{0}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{4}{4}\right)^2}{2} \cdot \frac{1}{4}$. Nach Faktorisieren von $\frac{1}{4}$ erhält man die gesuchte Formel.

b) $S_{100} = \sum_{k=1}^{100} \left[\frac{\left(\frac{k-1}{100}\right)^2 + \left(\frac{k}{100}\right)^2}{2}\right] \cdot \frac{1}{100} = 0{,}3334$ beschreibt die Summe der 100 Trapeze.

c) $S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n^2}$ strebt für $n \to \infty$ gegen den tatsächlichen Flächeninhalt $\frac{1}{3}$, da $\frac{1}{6n^2}$ für großes n gegen Null strebt. Die Abweichung vom tatsächlichen Flächenwert $\frac{1}{3}$ beträgt $\frac{1}{6n^2}$, die prozentuale Abweichung vom tatsächlichen Wert beträgt daher $\frac{\frac{1}{6n^2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2n^2}$.

Lektion 4: Binomialverteilung



Lektion 4: Binomialverteilung

4.1 Noch fit? – Stochastisches Grundwissen aus der E-Phase

Aufgabe 1: Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert

Definitionen: Den Ergebnissen eines Zufallsversuchs kann man **Wahrscheinlichkeiten** zuordnen. Die Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt, wenn sie die relativen Häufigkeiten bei großer Versuchszahl gut vorhersagen. Die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse addieren sich zu 100 %. Sie bilden eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung**.

Beispiel: Im Zufallsversuch eines Wurfes von zwei Hexaeder-Würfeln erhält man folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße X: *Anzahl 6er-Würfen*:

Ereignis	Zweimal 6	Einmal 6	Keine 6
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$	$1-\frac{11}{36}=\frac{25}{36}$

Definition: Wenn bei einer Datenerhebung die Ergebnisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ auftreten, heißt der Wert $\mu = x_1\cdot p_1 + x_2\cdot p_2 + \cdots + x_n\cdot p_n$ der **Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsverteilung**. Er gibt an, welchen Mittelwert man bei ausreichend großer Versuchszahl auf lange Sicht erwarten kann. Er ist eine **Prognose für den Mittelwert**.

Beispiel: Wird beim obigen Zufallsversuch pro Wurf mit zwei Würfeln 1 € eingesetzt, stellt sich die Frage, wie die Auszahlung erfolgen muss, damit das Spiel fair ist. Betrachtet wird die folgende Auszahlungsvariante:

Ereignis	Zweimal 6	Einmal 6	Keine 6
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$	$1-\frac{11}{36}=\frac{25}{36}$
Auszahlung	8 €	1 €	0 €
Gewinn	7 €	0 €	- 1 €
Auszahlungserwartung	$\mu_A = 8\,€\cdot\frac{1}{36}+1\,€\cdot\frac{5}{18}+0\,€\cdot\frac{25}{36}=\frac{18}{36}€=0{,}50\,€$		
Gewinnerwartung	$\mu_G = 7\,€\cdot\frac{1}{36}+0\,€\cdot\frac{5}{18}+(-1\,€)\cdot\frac{25}{36}=-\frac{18}{36}€=-0{,}50\,€$		

Antwort: Das obige Spiel ist unfair, weil die Auszahlung auf Dauer nur 0,50 € pro Spiel ist, was zum einem dauerhaften Verlust von 50 Cent pro Spiel führen würde.

Begründe, für welchen Auszahlungsbetrag für einen 6er-Pasch, das Spiel fair wird.

Erst wenn z. B. die mittlere Auszahlung μ_A 1 € beträgt, kann das Spiel fair sein. Dafür verändert man zum Beispiel die Auszahlung für „Zweimal 6" auf a €. Es muss gelten:

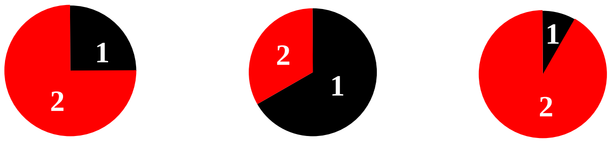
$$a\cdot\frac{1}{36}+1\cdot\frac{5}{18}+0\cdot\frac{25}{36}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{36}a = 1-\frac{5}{18} \Leftrightarrow \frac{1}{36}a=\frac{13}{18} \Leftrightarrow a=26$$

Werden für einen 6er-Pasch 26 € ausgezahlt, handelt es sich um ein faires Spiel.

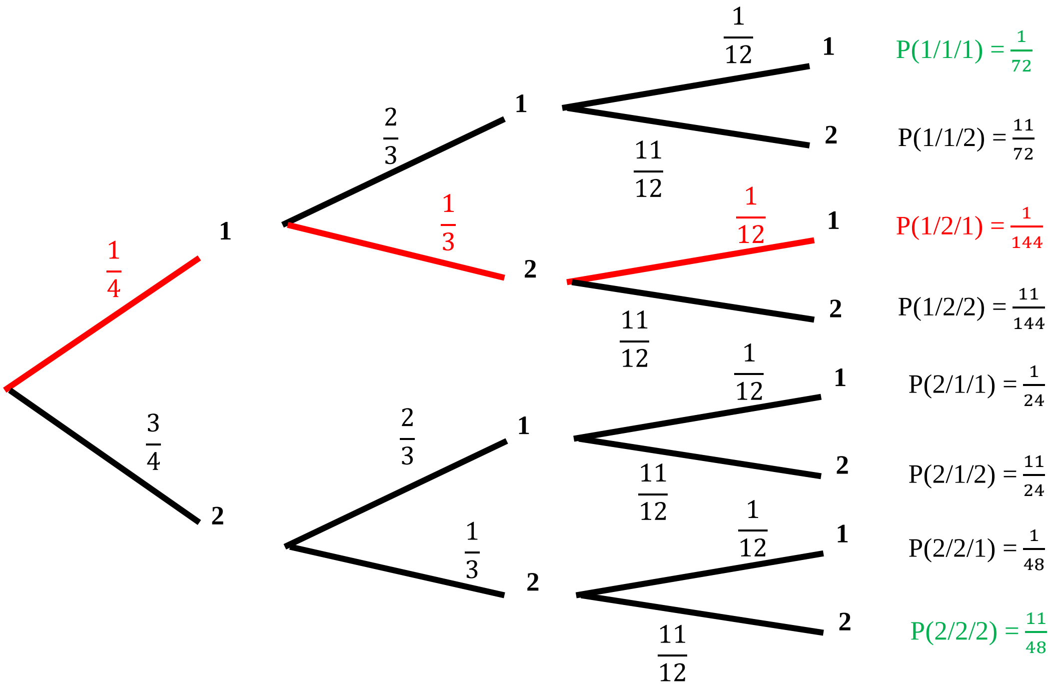
Aufgabe 2: Pfadregeln

Auf einem Jahrmarkt wird ein Glücksspiel angeboten. Für 1 € Einsatz werden nacheinander die folgenden 3 Glücksräder gedreht. Die Auszahlung erfolgt nach folgender Regelung:

Anzahl der 1er	0	1	2	3
Auszahlung in €	1	0	2	10



Man kann zu dem Zufallsversuch folgendes Baumdiagramm erstellen:



Will man die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis (1/2/1) bestimmen, lässt sich diese mithilfe der **Pfadmultiplikationsregel** errechnen: $P(1/2/1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{144}$.

Will man die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Zahlendreierpasch" bestimmen, muss man mithilfe der **Pfadadditionsregel** P(1/1/1) und P(2/2/2) addieren:

$P(\text{Zahlendreierpasch}) = P(1/1/1) + P(2/2/2) = \frac{1}{72} + \frac{11}{48} = \frac{35}{144}$

Für das obige Spiel ergibt sich folgende **Wahrscheinlichkeitsverteilung**:

Anzahl der Räder mit einer 1	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	$\frac{11}{48}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{29}{144}$	$\frac{1}{72}$

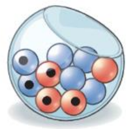
a) **Zeige**, dass das Spiel unfair ist. $\mu_A = 1 \cdot \frac{11}{48} + 0 \cdot \frac{5}{9} + 3 \cdot \frac{29}{144} + 11 \cdot \frac{1}{72} = \frac{71}{72} < 1$

b) **Ermittle** eine Auszahlungsverteilung, die ein faires Spiel ermöglicht.

Das Spiel wird fair, wenn der Einsatz entweder $\frac{71}{72}$ € pro Spiel beträgt oder z. B. 12 € ausgezahlt werden, wenn 3 1er gedreht werden. Denn: $1 \cdot \frac{11}{48} + 0 \cdot \frac{5}{9} + 3 \cdot \frac{29}{144} + 12 \cdot \frac{1}{72} = 1$.

Aufgabe 3: Bedingte Wahrscheinlichkeit und Vierfeldertafel

> Wenn man bei einer statistischen Erhebung zwei Merkmale wie z. B. Geschlecht und Körpergröße gleichzeitig untersucht, kann das Vorwissen über ein Merkmal die Wahrscheinlichkeit des anderen Merkmals beeinflussen. Man spricht von **bedingten Wahrscheinlichkeiten**.



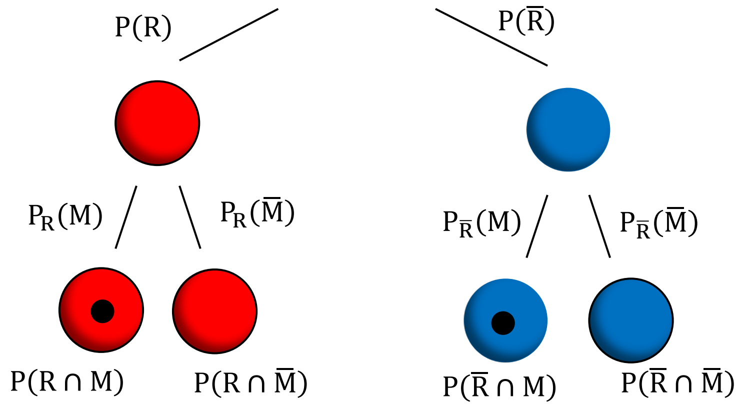
Beispiel: Dies wollen wir am **Urnenmodell** verdeutlichen. Anhand der Abbildung rechts erkennt man, dass es vier unterschiedliche Kugelsorten gibt, dessen Anzahlen mithilfe einer **Vierfeldertafel** dargestellt werden können:

	Mit Punkt (M)	Ohne Punkt ($\overline{M}$)	Summe
Rot (R)	3	1	4
Nicht Rot ($\overline{R}$)	2	4	6
Summe	5	5	10

Dann beschreibt $\mathbf{P_R(M) = \frac{3}{4} = 75\ \%}$ die Wahrscheinlichkeit eine markierte Kugel (M) zu ziehen, wenn mann weiß, dass sie rot (R) ist. Von allen markierten Kugeln werden als Grundgesamtheit nur die roten Kugeln betrachtet. $\mathbf{P(R \cap M) = \frac{3}{10} = 30\ \%}$ beschreibt dagegen die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel zu ziehen, die rot (R) und markiert ist (M). Von allen Kugeln werden solche betrachtet, die rot und markiert sind.

a) **Berechne** folgende Wahrscheinlichkeiten: $P_R(\overline{M}), P_{\overline{R}}(M), P_{\overline{R}}(\overline{M}), P_M(R), P_M(\overline{R}), P_{\overline{M}}(R), P_{\overline{M}}(\overline{R})$, die Wahrscheinlichkeiten $P(R \cap \overline{M}), P(\overline{R} \cap M)$ und $P(\overline{R} \cap \overline{M})$ sowie $P(R)$, $P(M)$ und $P(\overline{R})$ und $P(\overline{M})$. **Fasse** die Wahrscheinlichkeiten jeweils in **Worte**.

Die Vierfeldertafel kann zum Beispiel durch folgendes Baumdiagramme dargestellt werden:



Daraus lässt sich aufgrund der Pfadmultiplikationsregel folgender wichtiger Merksatz ableiten:

> **Merksatz:** $\mathbf{P_A(B)}$ sei die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B, wenn man weiß, dass A eingetreten ist bzw. $\mathbf{P_B(A)}$ die entsprechende bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Bedingung B. Dann gelten wegen der Pfadmultiplikationsregel folgende wichtige Formeln:
>
> $$\mathbf{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \qquad \mathbf{P_B(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

b) **Erstelle** ein Baumdiagramm, das als erste Pfade danach unterscheidet, ob eine Kugel markiert ist oder nicht. **Beschrifte** alle Pfade mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

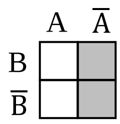
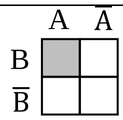
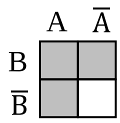
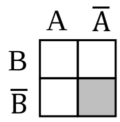
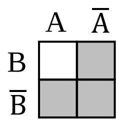
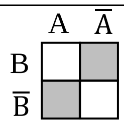
Wird etwa mit einem **Test** untersucht, ob jemand an einem Virus infiziert ist oder nicht, werden zwei Begriffe für bestimmte bedingte Wahrscheinlichkeiten verwendet:

Die **Sensitivität** entspricht der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_{\text{infiziert}}(+)$ und bedeutet die Wahrscheinlichkeit, dass eine infizierte Person positiv getestet wird. Die **Spezifität** wird durch die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\text{nicht infiziert}}(-)$ beschrieben und meint die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht infizierte Person einen negativen Test hat.

c) **Bestimme** die Sensitivität und Spezifität für folgenden Vierfeldertafel.

Wahrscheinlichkeiten	Infiziert (I)	Nicht infiziert ($\bar{I}$)	Gesamt
Positiver Test (+)	0,000999	0,001998	0,002997
Negativer Test (−)	0,000001	0,997002	0,997003
Gesamt	0,001 = 0,1 %	0,999	100 %

Aufgabe 4: Verknüpfungsmöglichkeiten von zwei Ereignissen

Sprechweise	**Term im mathematisches Modell**	**Veranschaulichung**
Gegenereignis zu A, Nicht das Ereignis A	$\bar{A}$	
Ereignis A und Ereignis B; Beide Ereignisse; Sowohl A als auch B	$A \cap B$	
Ereignis A oder Ereignis B; Mindestens eines der Ereignisse	$A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$	
Keines der Ereignisse; Weder A noch B	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	
Höchstens eines der Ereignisse; Nicht beide Ereignisse	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	
Genau eines der Ereignisse; Entweder A oder B	$(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$	

In der Saison 2014/2015 fielen in der Fußball-Bundesliga in 306 Spielen 843 Tore. 20 davon waren Eigentore. Aufgrund langfristiger Beobachtungen ist festgestellt worden, dass im Schnitt 55 % der Tore von **Stürmern** erzielt werden. 80 % aller Tore werden von Spielern erzielt, die in der **Startelf** stehen. Wenn ein **Einwechselspieler** ein Tor erzielt, ist dies zu 25 % **kein Stürmer**.

a) **Erstelle** zur dargestellten Situation eine geeignete Vierfelder-Tafel und **bestimme** dort die Anteile. **Markiere** die Anteile, die sich ohne Rechnung aus den obigen Angaben ergeben.

b) **Gib** Wahrscheinlichkeit und Ereignisterm für folgende Ereignisse an. Der Torschütze ist …

(1) Stürmer der Startelf.
(2) weder Stürmer noch Einwechselspieler.
(3) Stürmer oder Einwechselspieler.
(4) kein Stürmer.
(5) entweder Stürmer oder Einwechselspieler.
(6) nicht gleichzeitig Einwechselspieler und Nichtstürmer.

c) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, dass …

(1) unter den Stürmern ein Einwechselspieler getroffen hat.
(2) unter den Einwechselspielern ein Nichtstürmer getroffen hat.
(3) unter den Startspielern ein Stürmer getroffen hat.
(4) unter den Nichtstürmern ein Startspieler getroffen hat.

Aufgabe 5: Stochastische Unabhängigkeit

Definition: Zwei Ereignisse E und F heißen **stochastisch unabhängig**, wenn gilt: $\mathbf{P_E(F) = P(F)}$.

Satz: Zwei Ereignisse E und F sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn die folgende Gleichung gilt: $\mathbf{P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)}$.

Man wirft zwei Würfel. **Untersuche** die Ereignisse A und B auf Unabhängigkeit.

a) A = „Die Augensumme ist 6." und B = „Die Differenz der Augenzahlen beträgt 0."

b) A = „Der erste Würfel zeigt eine 3." und B = „Die Augensumme ist größer als 5."

c) A = „Der erste Würfel zeigt eine Augenzahl unter 3." und B = „Der zweite Würfel zeigt eine Augenzahl über 3."

4.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung und Histogramme

Aufgabe 1: Differenz gewinnt

Spielanleitung:

- Jeder Spieler markiert 18 Striche in einer Farbe auf dem Spielfeld „Differenz", indem er sie auf die sechs Felder verteilt.
- Es wird im Uhrzeigersinn mit zwei Würfeln gewürfelt und die Differenz der Augenzahlen beider Würfel ermittelt.
- Vom Feld der gewürfelten Differenz darf jeder Spieler einen Strich seiner Farbe streichen.
- Gewonnen hat der Spieler, der zuerst alle seine Striche durchgestrichen hat.

a) Welche Strategie wählst Du? **Begründe** Deine Entscheidung? **Spiele** das Spiel und **überprüfe** Deine Ausgangsstrategie.

b) **Überlege**, welche Strategie am günstigsten ist und **fülle** die nachfolgende Tabelle Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße X: *„Differenz der Augensumme beim Wurf zweier Hexaeder"* **aus** und **zeichne** ein Histogramm. Hierfür führen wir einige wichtige **Definitionen** ein:

Zufallsgröße X: Eine **Zufallsgröße** oder **Zufallsvariable** X ist eine Funktion, die jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments genau eine reelle Zahl x_i zuordnet. Im obigen Beispiel ordnet X jedem der 36 Möglichkeiten für einen zweifachen Hexaeder-Wurf genau eine der 6 möglichen Differenzen zu. Diese Differenzwerte werden mit $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ …, $x_6 = 5$ bezeichnet.

Ereignis X = xi: Mit **X = xi** wird das **Ereignis** bezeichnet, dessen Ergebnisse alle dazu führen, dass die Zufallsgröße X den Wert x_i annimmt. Im obigen Beispiel sind dies X = 0 bis X = 5.

Wahrscheinlichkeitsverteilung und Histogramm: Ordnet man jedem Wert x_i, den die Zufallsgröße X annehmen kann, die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ zu, erhält man eine Zuordnungstabelle, die man als **Wahrscheinlichkeitsverteilung** bezeichnet. Ihre grafische Darstellung heißt **Histogramm** oder Verteilungsdiagramm.

x_i	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 3$	$x_5 = 4$	$x_6 = 5$
$X = x_i$	(1/1), (2/2) (3/3), (4/4) (5/5), (6/6)					
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \frac{3}{18}$					
Histogramm $\frac{1}{18}$						

Zur Erinnerung: Der **Erwartungswert μ der Zufallsgröße X** mit der Wertemenge $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ entspricht in unserem Beispiel der mittleren Differenz, die man pro Hexaeder-2fach-Wurf erwarten kann. Es gilt: $\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \cdots + x_m \cdot P(X = x_m)$. Er ist also eine Prognose für den Mittelwert.

c) **Berechne** den Erwartungswert E(X) für die obige Zufallsgröße X.

Spielfeld zu *„Differenz gewinnt“* 

0	1
2	3
4	5

Arbeitsblatt 2: Augensummen

a) **Bestimme** die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: *„Augensumme beim 2-fachen Wurf eines Tetraeders“* und zeichne das zugehörige Histogramm.

x_i	$X = x_i$: zugehörige Ergebnisse	$P(X = x_i)$	Histogramm
2	(1/1)	$\frac{1}{16}$	
3			
4			
5			
6			
7			
8			

$\frac{1}{16}$

b) **Bestimme** die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: *„Augensumme beim Werfen eines Tetraeders und Hexaeders“* und zeichne das zugehörige Histogramm.

x_i	$X = x_i$: zugehörige Ergebnisse	$P(X = x_i)$	Histogramm
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

$\frac{1}{24}$

c) Sowohl beim Werfen eines Oktaeder zusammen mit einem Tetraeder als auch beim Werfen von zwei Hexaedern sind die Augensummen 2, 3, ... , 12 möglich. **Bestimme** die dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Woran könnte man bemerken, ob Oktaeder und Tetraeder bzw. zwei Hexaeder geworfen wurden?

x_i	**Oktaeder und Tetraeder**		**Zwei Hexaeder**	
	$X = x_i$	**$P(X = x_i)$**	**$X = x_i$**	**$P(X = x_i)$**
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

d) Zur Erinnerung: Der **Erwartungswert μ** beschreibt, welcher Wert durchschnittlich bei einer großen Zahl von Würfen zu erwarten ist. Er ist eine Prognose für den Mittelwert.

Berechne für die vier Zufallsexperimente von Arbeitsblatt 2 jeweils den Erwartungswert.

Versuch	**Erwartungswert μ**
2-facher Wurf eines Tetraeders	
Wurf eines Tetraeders und Hexaeders	
Wurf eines Oktaeders und Tetraeders	
Wurf zweier Hexaeder	

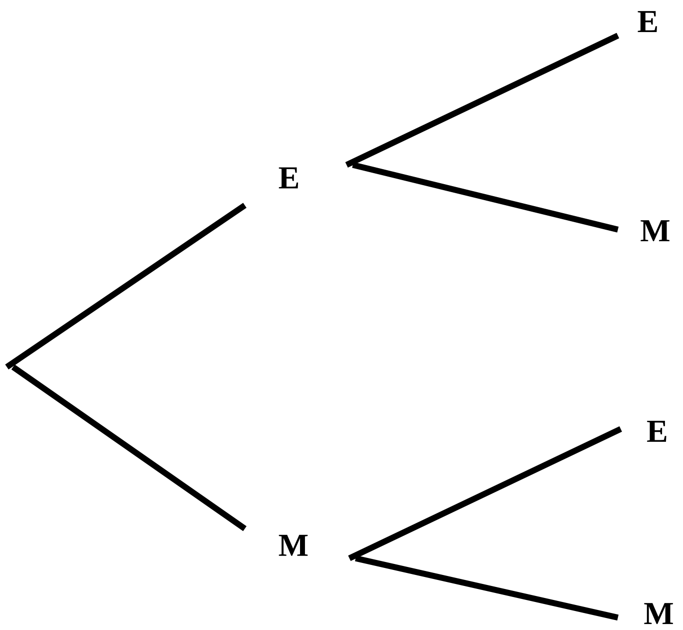
4.3 Binomialverteilung[53]

Aufgabe 1 (Überraschungs-Schokokugeln)

Ein Hersteller von Überraschungs-Schokokugeln wirbt damit, dass in jeder siebten Kugel eine Figur enthalten ist, die unter Sammlern als besonders wertvoll gilt. Daher ist die Freude groß, wenn man in seiner Kugel eine solche Figur entdeckt. Ein solcher Kugelinhalt werde also als Erfolg (Treffer) gewertet (E), alle anderen Kugelfüllungen als Misserfolg (M).

Man betrachte zunächst den Kauf von zwei Überraschungskugeln und untersuche die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: *„Anzahl der Erfolge“* (d. h. Anzahl der Überraschungskugeln mit besonderem Inhalt).

a) **Trage** in folgendem Baumdiagramm die Pfadwahrscheinlichkeiten **ein**.



b) **Ermittle** die möglichen Ergebnisse und Wahrscheinlichkeiten für 0, 1, 2 Erfolge beim Kauf von zwei Schokokugeln und trage sie in die Tabelle ein.

Erfolgsanzahl k	X = k: mögliche Ergebnisse mit k Treffern	Wahrscheinlichkeit P(X = k)
0		
1		
2		

53 Konzeption des Kapitels in Anlehnung an eine Lehrer-Fortbildung der Bezirksregierung Düsseldorf durch die Moderatorinnen G. Ditzen und G. Jösch

c) **Ergänze** das obige Baumdiagramm für den Kauf von frei Schokokugeln, **ermittle** die möglichen Ergebnisse und Wahrscheinlichkeiten für 0, 1, 2, 3 Erfolge und **trage** sie in die Tabelle **ein**.

K	**X = k**	**P(X = k)**
0		
1		
2		
3		

d) **Fülle** die Wahrscheinlichkeitsverteilung für vier Schokokugeln aus.

K	**X = k**	**P(X = k)**
0		
1		
2		
3		
4		

e) **Untersuche**, wie sich die Wahrscheinlichkeit P(X = k) für das Ereignis „k Erfolge“ bei einer beliebigen Anzahl n gekauften Überraschungsschokokugeln berechnet.

f) Berechne den **Erwartungswert μ** für die Zufallsgröße X: „Anzahl k der Erfolge beim Kauf von n Überraschungsschokokugeln“ für n = 1, 2, 3, 4 Schokokugeln.

N	**Erwartungswert μ**
1	$0 \cdot \frac{6}{7} + 1 \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$
2	
3	
4	
n	

Aufgabe 2: Iterative Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Bernoulli-Ketten

Definition: Bei jedem Zug einer Schokokugel sind genau zwei Ausgänge möglich, nämlich Erfolg (E) und Misserfolg (M). Solche Zufallsversuche (Experimente) nennt man **Bernoulli-Experimente**.

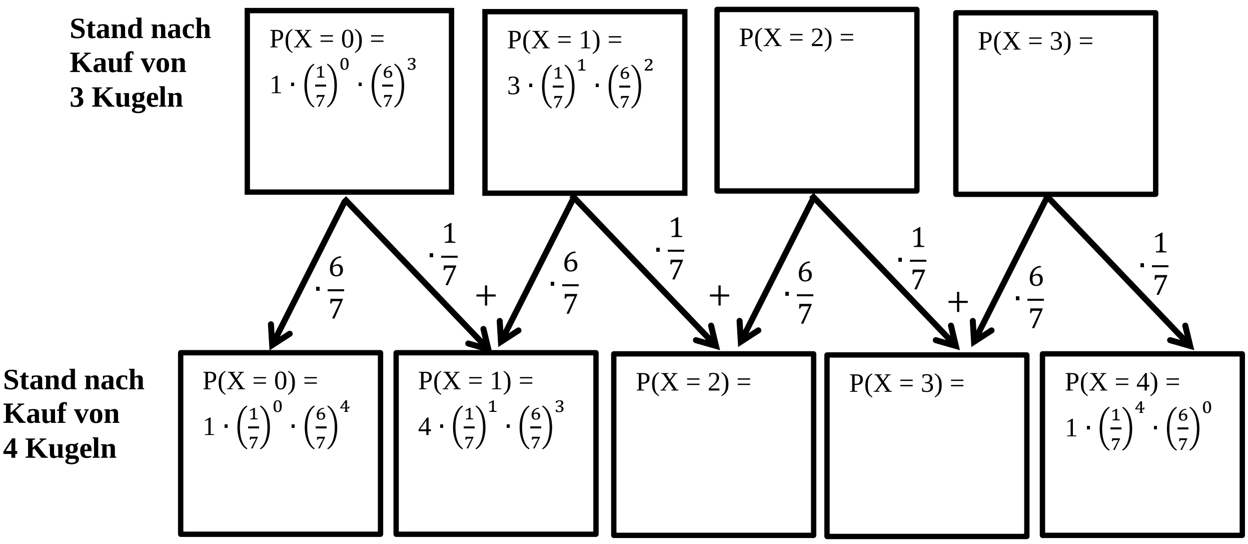
a) Nenne weitere Bernoulli-Versuche.

Definition: Ändert sich die Erfolgswahrscheinlichkeit bei jedem der n Züge eines Bernoulli-Versuches nicht, spricht man von einer **Bernoulli-Kette der Länge n** (n-stufige Bernoulli-Kette).

b) **Gib** Beispiele für Bernoulli-Versuche an, bei denen sich die Erfolgswahrscheinlichkeit im Laufe eines n-stufigen Experimentes **ändert**.

c) Nach dem Kauf von Überraschungsschokokugeln kann man die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse auch anders aufschreiben. Für den Kauf von drei Kugeln liegt also eine **3-stufige Bernoulli-Kette mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{7}$** vor.

Notiere in den Kästchen in der Zeile „Stand nach 3 Käufen“ Terme für die fehlenden Wahrscheinlichkeiten. **Erläutere** die Bedeutung der beschrifteten Pfeile und **gib** Terme für die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der Zeile „Stand nach 4 Kugeln“ **an**.



d) **Erläutere**, wie man von den Wahrscheinlichkeiten der ersten zu denen der zweiten Zeile gelangt.

e) **Erweitere** das Diagramm für n = 5, indem Du Terme für Wahrscheinlichkeiten in die nachfolgenden Kästchen einträgst.

$P(X = 0) = 1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^0 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^5$	$P(X = 1) =$	$P(X = 2) =$	$P(X = 3) =$	$P(X = 4) =$	$P(X = 5) =$

f) **Erläutere**, wie man überprüfen kann, dass nichts übersehen wurde.

Berechnung der Pfadanzahl mit k Erfolgen führt zum Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$

Will man z. B. wissen, wie viele Pfade bei 5 Schokokugeln zu 3 Erfolgen führen, überlegt man sich ein passendes Bild. Man könnte sich fragen, wie viele Möglichkeiten 3 Personen haben sich auf 5 Stühle zu setzen. Dabei darf die Reihenfolge (Individualität) der sitzenden Personen allerdings keine Rolle spielen. Denn bei einem Ergebnis (Erfolg, Erfolg, Erfolg, Misserfolg, Misserfolg) spielt die Reihenfolge (Individualität einer Schokokugel mit Erfolg) keine Rolle.

3 Personen haben offenbar $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten sich auf 5 Stühle zu setzen. Denn: Die erste Person hat 5 Möglichkeiten sich zu setzen, die zweite zu jeder dieser Möglichkeiten 4 Möglichkeiten, so dass insgesamt $5 \cdot 4 = 20$ Möglichkeiten entstehen. Zu jeder dieser $5 \cdot 4 = 20$ Möglichkeiten hat eine dritte Person 3 Möglichkeiten, also insgesamt $20 \cdot 3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten.

Da die Reihenfolge der Stuhlbelegungen keine Rolle spielen soll, haben wir zu viele Möglichkeiten. Zu jeder der $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten (**Permutationen**) führen jeweils $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten zur gleichen **Kombination**. Im Bild gesprochen: Bei jeder Sitzkombination können sich die drei Personen mit $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten auf die besetzten drei Stühle verteilen, ohne dass eine „neue“ Kombination entsteht.

Insgesamt haben 3 Personen **ohne Beachtung der Reihenfolge** (Individualität) $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{60}{6} = 10$ Möglichkeiten, sich auf 5 Stühle zu setzen. **Beachtet** man die **Reihenfolge** (Individualität), erhält man $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten.

Man schreibt im ersten Fall $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}$ und nennt diesen Ausdruck **Binomialkoeffizient 5 über 3**. Im zweiten Fall gilt $5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{5!}{(5-3)!}$.

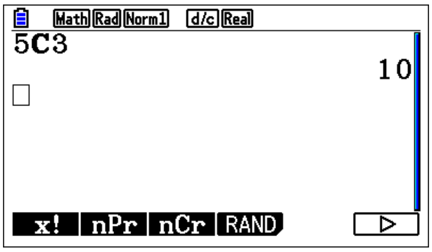
Verallgemeinert man die obige Überlegung auf n Stühle und k Personen, die sich ohne Beachtung der Individualität darauf verteilen, erhält man für den **Binomialkoeffizient n über k**:

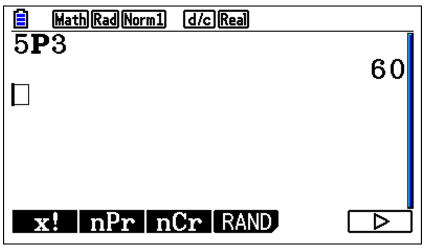
$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k\cdot(k-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n\,(n-1)\ldots[n-(k-1)]\cdot(n-k)\cdots 2\cdot 1}{k\cdot(k-1)\cdots 2\cdot 1\cdot(n-k)\cdots 2\cdot 1} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{k!\cdot(n-k)!}}$$

Beachtet man die Reihenfolge der k Personen, sich auf n Stühle zu setzen, erhält man folgende Anzahl an Möglichkeiten:

$$n\cdot(n-1)\ldots[n-(k-1)] = \frac{n\cdot(n-1)\ldots[n-(k-1)]\cdot(n-k)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)\cdots 2\cdot 1} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(n-k)!}}$$

Mit der GTR kann der Binomialkoeffizient berechnet werden im $\boxed{\text{MENU 1}}$ über $\boxed{\text{OPTN}}$, $\boxed{\text{F6}}$, $\boxed{\text{F3}}$ und den Menüpunkt $\boxed{\text{nCr}}$ (*combination* = Kombination) sowie die Anzahl der Kombinationen unter Beachtung der Reihenfolge im Menüpunkt $\boxed{\text{nPr}}$ (*permutation* = Permutation):





g) **Berechne** folgende Ausdrücke händisch und mit dem GTR: $\binom{10}{5}$; $\binom{6}{4}$; $\binom{10}{10}$; $\binom{10}{1}$; $\binom{100}{99}$; $\frac{100!}{99!}$

h) **Erläutere** am Beispiel von k = 3 Frauen und n – k = 5 – 3 = 2 Männern, die auf n = 5 Stühle verteilt werden sollen, den Binomialkoeffizienten $\binom{5}{3}$.

i) Allgemein hängt die Art der iterativen Berechnung mit dem **Pascalschen Dreieck** zusammen. **Erläutere** das Schema und **beweise** die Umformungen im unteren Kasten.

k - 1 Erfolge bei n - 1 Versuchen:	k Erfolge bei n - 1 Versuchen:
$P_{n-1}(X = k - 1)$	$P_{n-1}(X = k - 1)$
$= \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k}$	$= \binom{n-1}{k} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{n-1-k}$

ein Erfolg im n-ten Versuch, d. h. $\cdot\, \mathbf{p}$

$+$

ein Misserfolg im n-ten Versuch, d. h. $\cdot\, \mathbf{1-p}$

k Erfolge bei n Versuchen:
$\mathbf{P_n(X = k)}$
$= \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \;=\; \boldsymbol{\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0}\\
\binom{1}{0}\quad\binom{1}{1}\\
\binom{2}{0}\quad\binom{2}{1}\quad\binom{2}{2}\\
\binom{3}{0}\quad\binom{3}{1}\quad\binom{3}{2}\quad\binom{3}{3}\\
\binom{4}{0}\quad\binom{4}{1}\quad\binom{4}{2}\quad\binom{4}{3}\quad\binom{4}{4}\\
\binom{5}{0}\quad\binom{5}{1}\quad\binom{5}{2}\quad\binom{5}{3}\quad\binom{5}{4}\quad\binom{5}{5}\\
\binom{6}{0}\quad\binom{6}{1}\quad\binom{6}{2}\quad\binom{6}{3}\quad\binom{6}{4}\quad\binom{6}{5}\quad\binom{6}{6}\\
\binom{7}{0}\quad\binom{7}{1}\quad\binom{7}{2}\quad\binom{7}{3}\quad\binom{7}{4}\quad\binom{7}{5}\quad\binom{7}{6}\quad\binom{7}{7}\\
\ldots
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\
1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1\\
\ldots
\end{array}$$

Aufgabe 3: Modelle der Stochastik untersuchen

a) **Phase 1 (Gruppenarbeit): Bearbeitet** gruppenweise eines der folgenden Arbeitsblätter:

→ **Auslastungsmodell,**
→ **Kugel-Fächer-Modell,**
→ **Geburtstagsparadoxon,**
→ **Warten auf Erfolg.**

b) **Phase 2 (Partnerarbeit): Bearbeite** zusammen mit einem Partner einer anderen Gruppe Deine Aufgabe und die Deines Partners. Wechsele dann zweimal den Partner, so dass Du jede andere Aufgabe kennengelernt hast.

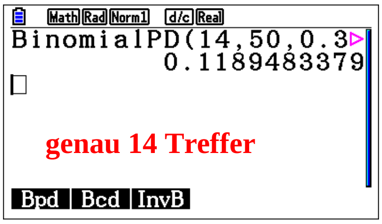
c) **Phase 3 (Gruppenarbeit): Bereitet** in der ursprünglichen Gruppe eine Präsentation Euer Aufgabe vor.

Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeiten mit dem GTR berechnen

Betrachten wir nun die binomialverteilte Zufallsgröße X: „*Anzahl der Treffer bei 50 Versuchen jeweils mit der Trefferwahrscheinlichkeit p*“. **Berechne** in dieser 50-stufigen Bernoulli-Kette mit der Trefferwahrscheinlichkeit p die nachfolgenden Wahrscheinlichkeiten, und **gib** ihre Bedeutung **an**.

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten nutzen wir den GTR. Im Folgenden werden vier Beispiele für Grundfunktionen mit dem GTR gegeben. Dabei ist die Versuchszahl immer n = 50, die Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,3.

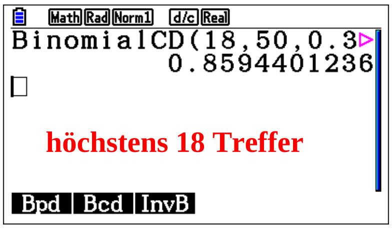
Singuläre Wahrscheinlichkeit P(X = k): P(X = 14) = $\binom{50}{14} \cdot 0{,}3^{14} \cdot 0{,}4^{36}$



Menu 1: OPTN F5 F3 F5 F1 1 4 , 5 0 , 0 . 3) EXE

Erst die Anzahl der Treffer k, dann die Anzahl n der Versuche und zuletzt die Trefferwahrscheinlichkeit p eingeben (immer durch ein Komma getrennt).

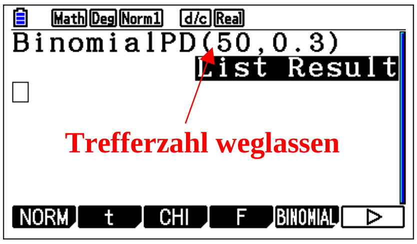
Kumulierte Wahrscheinlichkeit P(X ≤ k): P(X ≤ 18) = P(X = 0)+ …+P(X = 18)

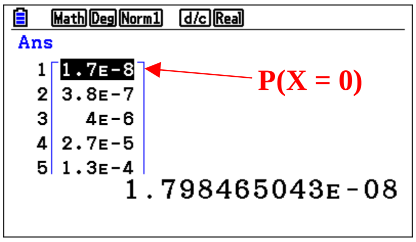


Menu 1: F5 F3 F5 F2 1 8 , 5 0 , 0 . 3) EXE

Erst die Anzahl der (Höchst-)Trefferzahl k, dann die Anzahl n der Versuche und zuletzt die Trefferwahrscheinlichkeit p eingeben (immer durch ein Komma getrennt).

Liste von Wahrscheinlichkeiten P(X = 0), P(X = 1), …, P(X = k) [Gilt durch Ersetzen der Funktion BinomialPD durch BinomialCD analog für eine Liste kumulierter Wahrscheinlichkeit beginnend bei k = 0: P(X ≤ 0), P(X ≤ 1), …, P(X ≤ 50)]

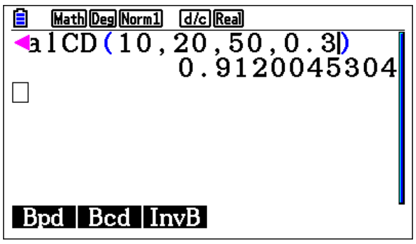




Menu1: OPTN F5 F3 F5 F1 5 0 , 0 . 3) EXE

Trefferzahl weglassen!

Kumulierte Wahrscheinlichkeit P(a ≤ X ≤ b): P(10 ≤ X ≤ 20) = P(X = 10)+ … +P(X = 20)



Menu 1: OPTN F5 F3 F5 F2 1 0 , 2 0 , 5 0 , 0 . 3) EXE

Zuerst untere Grenze, dann obere Grenze der Kumulation, dann die Versuchszahl n und die Trefferwahrscheinlichkeit p angeben.

(1) Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,3

Wahrscheinlichkeit	**Wahrscheinlichkeit bei 50 Versuchen …**
$P(X = 14) =$ **0,1189483379**	**… genau 14** Treffer zu erzielen.
$P(X \leq 18) =$ **0,8594401236**	**… höchstens 18** Treffer zu erzielen.
$P(X < 13) =$	
$P(X \geq 17) =$	
$P(X > 21) =$	
$P(10 \leq X \leq 18) =$	

(2) Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,6

Wahrscheinlichkeit	**Wahrscheinlichkeit bei 50 Versuchen …**
$P(X = 31) =$	
$P(X \leq 33) =$	
$P(X < 26) =$	
$P(X \geq 27) =$	
$P(X > 31) =$	
$P(23 \leq X \leq 33) =$	

(3) „Komplementäre" Zufallsgröße Y

Drücke die Wahrscheinlichkeiten in Tabelle (2) zur Zufallsgröße X: *„Anzahl der Treffer mit $p = 0{,}6$"* mithilfe der „komplementären" Zufallsgröße Y: *„Anzahl der Treffer mit $p = 0{,}4$"* aus und bestätige die Ergebnisse in Tabelle (2).

Aufgabe 5: Grundaufgaben zur Binomialverteilung

Sei X eine binomialverteilte Zufallsgröße. **Grundaufgaben zur Binomialverteilung** werden durch folgende Tabelle festgelegt, wobei „☑“ eine gegebene Größe und „☒“ die gesuchte Größe repräsentieren:

Grundaufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**
Stichprobenumfang n	☑	☑	☑	☒
Trefferwahrscheinlichkeit p	☑	☑	☒	☑
Trefferzahl k	☑	☒	☑	☑
Gesamtwahrscheinlichkeit P	☒	☑	☑	☑

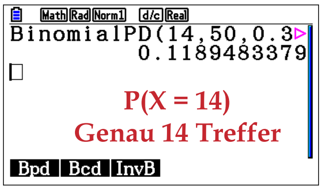
Bevor einige Übungsaufgaben bearbeitet werden sollen, wird zu jeder Grundaufgabe ein Beispiel vorgestellt und dargestellt, wie es mit dem GTR gelöst werden kann. Arbeite die Beispiele durch und löse dann die Anwendungsaufgaben.

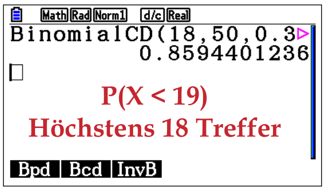
Grundaufgabe 1: Gesamtwahrscheinlichkeit P gesucht

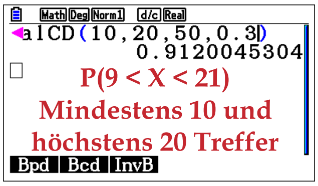
Gegeben: X ist binomialverteilt mit n = 50; p = 0,30 sowie einer bestimmten Trefferzahl k.

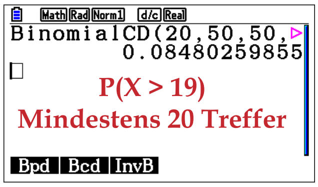
Gesucht: P.

Möchte man z. B. **P(X = 14), P(X < 19), P(9 < X < 21), P(X > 19)** bestimmen, erfolgt dies im MENU 1 (Run – Matrix). Über OPTN und STAT und DIST und BINOMIAL können die obigen Wahrscheinlichkeiten mit den Befehlen BinomialPD und BinomialCD berechnet werden. Diese Befehle kann man auch schneller über SHIFT und 4 (CATALOG) und die Eingabe des Buchstabens B bekommen.







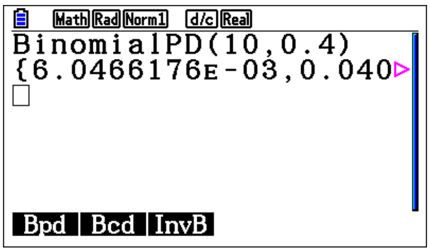


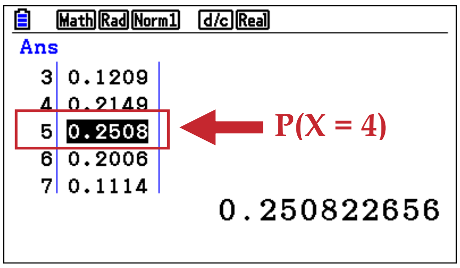
Grundaufgabe 2: Trefferzahl k gesucht

Singuläre Wahrscheinlichkeit

Gegeben: n = 10; p = 0,40 **Gesucht:** Trefferzahl k mit maximaler P(X = k)

Hier kann in **MENU 1** mithilfe der **Listenfunktion** zur singulären Wahrscheinlichkeit gearbeitet werden, indem man nur den Stichprobenumfang n = 10 und die Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,4 angibt, aber darauf achten muss, dass die Liste bei 1 startet, was 0 Treffern entspricht.



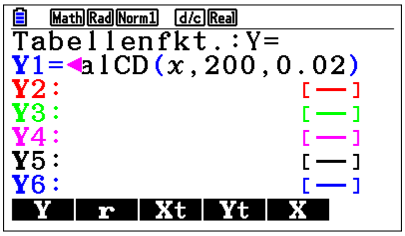


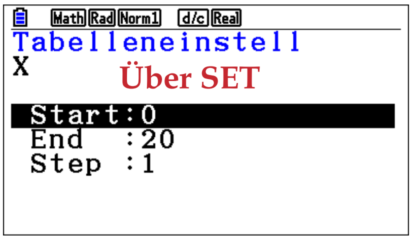
Die größte singuläre Wahrscheinlichkeit beträgt P(X = 4) ≈ 0,2508.

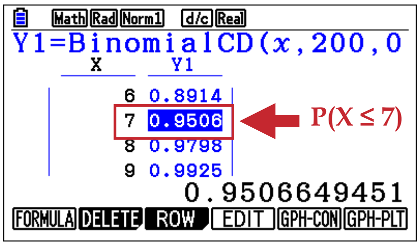
Kumulierte Wahrscheinlichkeit

Gegeben: n = 200, p = 2 %, $P_{n=200;\,p=0{,}02}(X \leq k) \geq 0{,}95$ **Gesucht:** (Mindest-)Trefferzahl k

Die Aufgabe kann über die **Tabellenfunktion (MENU 7)** gelöst werden. Dafür wird eine Funktion f definiert mit f(x) = P(X ≤ x), wobei die Zahl x variiert und die obere Grenze der kumulierten Wahrscheinlichkeit P(X ≤ x) beschreibt. Für x = 7 ist P(X ≤ x) das erste Mal größer als 95 %. Daher gilt: P(X ≤ x) ≥ 0,95 für k ≥ 7.



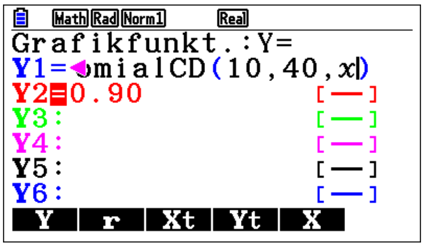


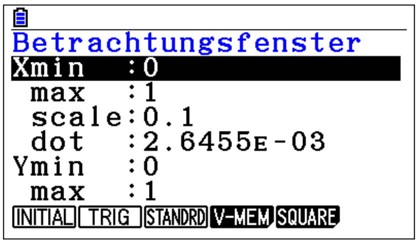


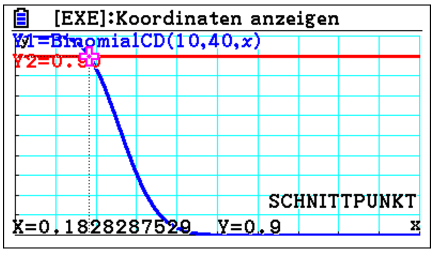
Grundaufgabe 3: Trefferwahrscheinlichkeit p gesucht

Gegeben: n = 40, k = 10; $P_{n=40;\,p}(X \leq k) = 0{,}90$ **Gesucht:** Trefferwahrscheinlichkeit p

Hier kann das **MENU 5 (Graph)** verwendet werden. Es wird dort (unter Y1) eine Funktion f mit $f(x) = P_{n=40;\,x}(X \leq 10)$ definiert sowie (unter Y2) die konstante Funktion g mit der Gleichung g(x) = 0,90, wobei x die variable Trefferwahrscheinlichkeit beschreibt. Die **Schnittstelle** beider Funktionen f und g (erreichbar durch G-Solv und INTSECT) liefert die gesuchte Trefferwahrscheinlichkeit p, denn dort ist $P_{n=40;\,x}(X \leq 10) = 0{,}90$.





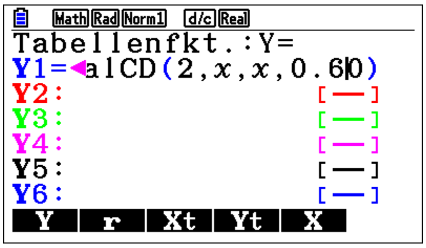


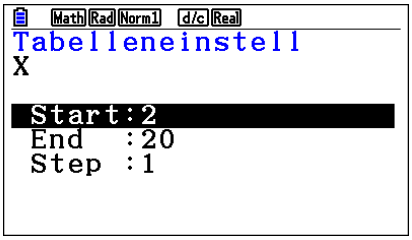
Ist die Trefferwahrscheinlichkeit p ca. 18,28 %, dann ist $P_{n=40;\,p}(X \leq 10) = 0{,}90$.

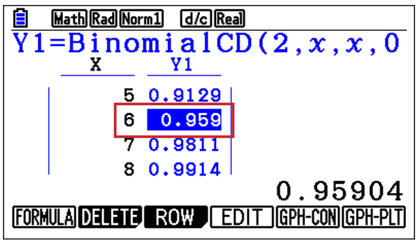
Grundaufgabe 4: Stichprobenumfang n gesucht

Gegeben: k = 2; p = 0,60; $P_{n;p=0{,}80}(X \geq k) \geq 0{,}95$ **Gesucht:** Stichprobenumfang n

Man definiert in MENU 7 (Tabelle) (unter Y1) die Funktion f mit $f(x)=P_{x;p=0{,}80}(X \geq 2)$ und dem variablen Stichprobenumfang x und stellt der Anzeigebereich x über SET entsprechend ein:







Für n ≥ 6 gilt $P_{n;p=0{,}60}(X \geq 2) \geq 0{,}95$.

Nun aber ran an die **Anwendungsaufgaben**:

Grundaufgabe 1: Wahrscheinlichkeit P berechnen (Gegeben: n, k, p)

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei einer Bernoulli-Kette der Länge 20 und der Trefferwahrscheinlichkeit von 30 % genau 5 Treffer?

Wahrscheinlichkeitsgröße X: „*Anzahl der Treffer*", $n = 20$, $k = 5$, $p = 0{,}3 \rightarrow P$

b) Ein Tierarzt behandelt 10 kranke Tiere mit einem Medikament, das nach Aussagen des Herstellers in 80% der Anwendungen zur Heilung führt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 9 von 10 Tieren [mindestens 5 und höchstens 8] geheilt?

Wahrscheinlichkeitsgröße X: „*Anzahl geheilter Tiere*", $n = 10$, $p = 80\%$, $k \geq 9$ $[5 \leq k \leq 8] \rightarrow P$

Grundaufgabe 2: Trefferzahl k berechnen (Gegeben: n, p, P)

a) Ein Großhändler versorgt 10 Geschäfte, von denen jede Bestellung mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% aufgibt. Wie viele Bestellungen laufen mit größter Wahrscheinlichkeit ein?

Wahrscheinlichkeitsgröße X: „*Anzahl der Bestellungen*", $n = 10$, $p = 0{,}4$, P als Höchstwert $\rightarrow$ k

b) Ein Hersteller von Schrauben behauptet, dass mindestens 98% der Schrauben normgerechte Längen haben. Ein Händler kontrolliert eine Schraubenlieferung mit einer Stichprobe vom Umfang 200 und findet k Schrauben mit nicht normgerechter Länge. Die Rückgabe erfolgt, wenn die Wahrscheinlichkeit für weniger als k nicht normgerechte Schrauben der Stichprobe mindestens 95 % beträgt. Ab welcher Anzahl k sollte er die Lieferung zurückweisen?

X: „*Anzahl nicht normgerechter Schrauben*", $n = 200$, $p = 2\ \%$, $P(X < k) \geq 0{,}95 \rightarrow k$

Grundaufgabe 3: Trefferwahrscheinlichkeit p berechnen (Gegeben: n, k, P)

a) Ein Gerät besteht aus 5 Bauteilen, die unabhängig voneinander mit gleicher Funktionswahrscheinlichkeit arbeiten. Fällt ein Bauteil aus, so arbeitet das Gerät nicht mehr. Welche Funktionswahrscheinlichkeit müssen die Bauteile haben, wenn das Gerät mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% funktionieren soll?

Wahrscheinlichkeitsgröße X: „*Anzahl funktionstüchtiger Teile*", $n = 5$, $P \geq 0{,}95$, $k = 5 \rightarrow p$

b) Eine Glühlampe, die zufällig der Produktion entnommen wird, leuchtet einwandfrei mit der unbekannten Wahrscheinlichkeit p. Jemand entnimmt zufällig 40 Glühlampen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von **mindestens** 90% sollen **mindestens** 38 Glühlampen dieser Stichprobe einwandfrei sein. Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit p **mindestens** sein?

Wahrscheinlichkeitsgröße X: „*Anzahl einwandfreier Glühlampen*", $n = 40$, $k = 38$, $P \geq 0{,}9 \rightarrow p$

Grundaufgabe 4: Länge n der Bernoulli-Kette berechnen (Gegeben: k, p, P)

a) Auf einer bestimmten Buslinie rechnet man mit 5% Schwarzfahrern. Wie viele Fahrgäste muss ein Kontrolleur mindestens nach ihrem Fahrschein fragen, bis er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens einen Schwarzfahrer ertappt hat?

X: „*Anzahl von Schwarzfahrern*", $p = 5\%$, $P \geq 0{,}9$, $k \geq 1 \rightarrow n$

b) Ein Schütze trifft das Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 35%. Wie oft muss er auf das Ziel schießen, damit die Wahrscheinlichkeit, das Ziel wenigstens einmal zu treffen, wenigstens 90% beträgt? X: „*Anzahl der Treffer*", $p = 0.35$, $k \geq 1$, $P \geq 0.9 \rightarrow n$

c) Ein Zahnarzt weiß, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Patienten Karies zu diagnostizieren, etwa bei 80% liegt. Wie viele Karteikarten muss man der Patientenkartei zufällig entnehmen, wenn dabei mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% drei oder mehr Patienten mit Kariesbefund sein sollen? X: „*Anzahl von Karies-Patienten*", $p = 80\ \%$, $k \geq 3$, $P \geq 0{,}95 \rightarrow n$

Aufgabe 6: Eigenschaften der Binomialverteilung

Ein Kasinobesucher beschwert sich: Die verwendeten sechsseitigen Spielwürfel würden in einem Viertel der Fälle die „1“ zeigen. Die Würfel seien anscheinend gezinkt. Als Test wird einer der Würfel unter gleichen Bedingungen 100-mal geworfen.

Erwartungswert einer Binomialverteilung

a) Wie viele Einser sind zu erwarten? Wie würdest Du den Würfel beurteilen, wenn er 6 Einser zeigt? **Begründe** Deine Antworten.

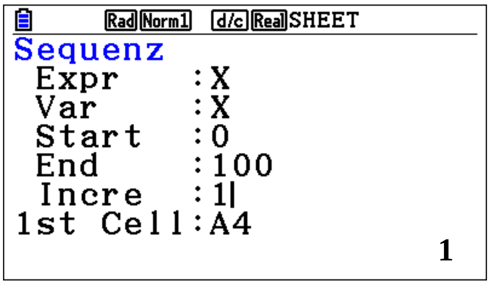
b) **Erläutere**, wie man man allgemein den Erwartungswert $\mu = E(X)$ einer Binomialverteilung (Prognoswert für den Mittelwert der Binomialverteilung) berechnet, wenn X die Anzahl der Treffer in einer n-stufigen Bernoulli-Kette mit der Trefferwahrscheinlichkeit p eschreibt.

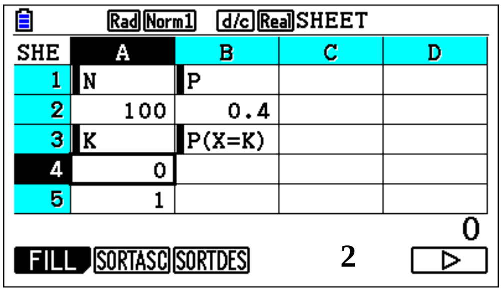
Binomialverteilung in Abhängigkeit von n und p

c) **Verschaffe** Dir einen Überblick über mögliche Testergebnisse, indem Du Histogramme [Streudiagramme] für verschiedene n- und p-Werte zeichnest. Bestimme jeweils den Erwartungswert. **Beschreibe**, was Dir auffällt.

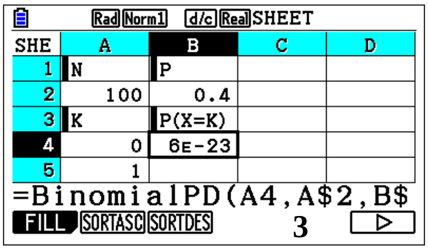
Exemplarisch wird dies für n = 100 und p = 0,4 im MENU 4 (Tabellenkalkulation) demonstriert.

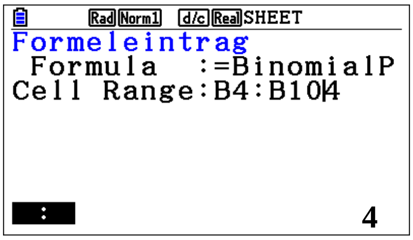
- Nach Eingabe der Spaltenüberschriften (Zum Eintragen von Texten für die Überschriften muss vor dem ersten Buchstaben über ALPHA und EXP ein ″ stehen) werden Werte für den Stichprobenumfang n und die Trefferwahrscheinlichkeit p eingegeben.
- Man geht auf Feld A4. Über EDIT und SEQ kann man die Trefferzahlen 0, 1, …, 60 in die Zellen A4 bis A64 eintragen lassen (Bilder 1 und 2).

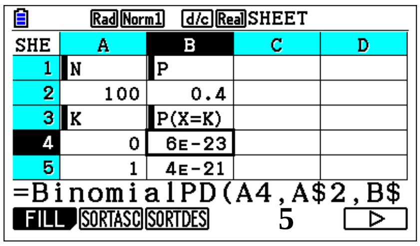




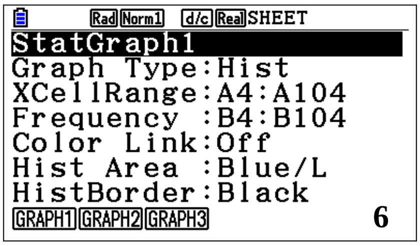
- Nun wird in B4 die Formel für P(X = k) über = BinomialPD(A2,A$2,B$2) eigegeben (Bild 3).
- Über FILL (vorher EDIT) wird diese Formel in die Zellen B4 bis B104 kopiert (Bilder 4 und 5).

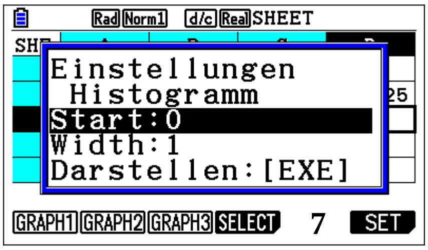


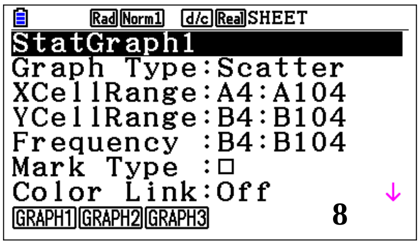




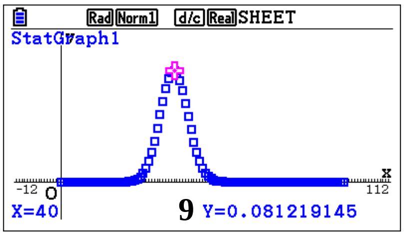
- Nun kann über GRAPH und SET mit folgenden Einstellungen ein **Histogramm** (**Hist,** Bild 6) oder ein Streudiagramm (**Scatter,** Bild 8) erstellt werden (beim Histogramm noch den Startwert 0 und die Schrittweite 1 einstellen, vgl. Bild 7):

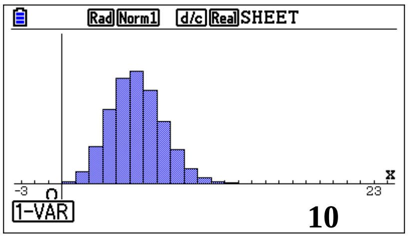


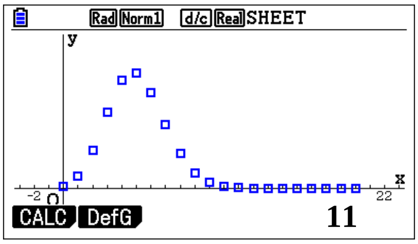




- Über GRAPH1 erhält man das Streudiagramm von Bild 9. Nun lassen sich die Parameter n und p beliebig variieren, wobei n maximal 100 sein kann und p zwischen 0 und 1 liegen muss Ebenso muss über SET der entsprechende Zielbereich (Range) beachtet. Für die Fälle n = 20 und p = 0,25 erhält man als Histogramm Bild 10 und als Streudiagramm Bild 11.

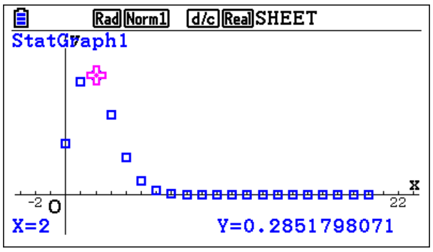


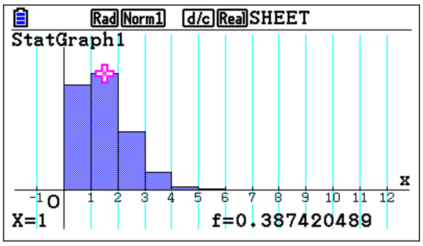


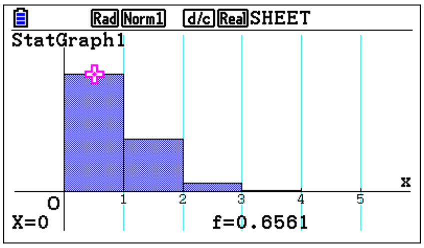


Nachfolgend sind einige Fälle (n = 20, n = 10 und n = 4) dargestellt (denke bei einem anderen n an ein neues SET), wobei der Fall n = 20 mithilfe der **Scatter-Funktion** als Streudiagramm dargestellt wird. Die Wahrscheinlichkeitswerte kann man sich mit der **Trace-Funktion** anzeigen lassen.

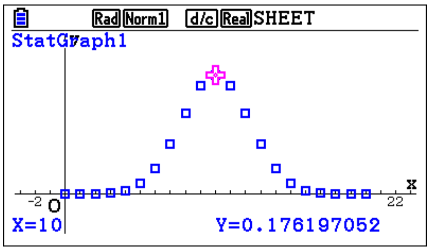
p = 0,1

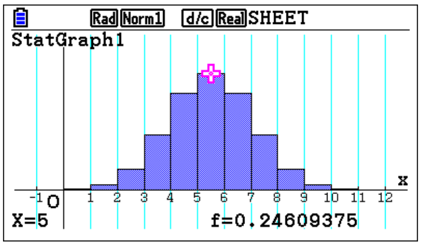


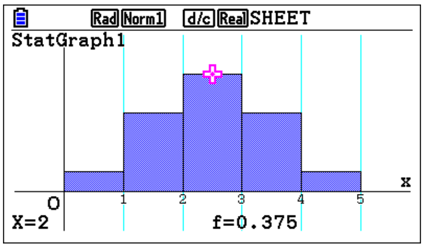




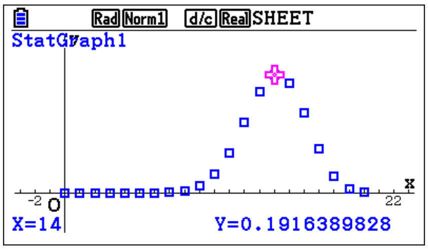
p = 0,5

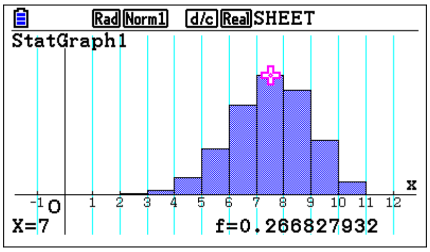


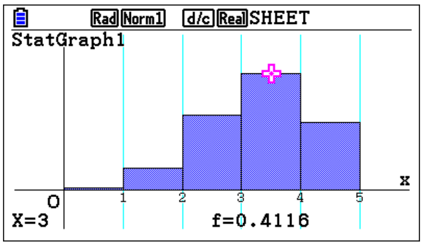




p = 0,7







d) Wichtige Eigenschaften der Binomialverteilung werden in folgendem Text festgehalten. **Übertrage** die Beobachtungen mit passenden Histgrammen in Deinem Heft.

Beobachtungen zur Bionomialverteilung

Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der Treffer einer n-stufigen Bernoullikette mit der Trefferwahrscheinlichkeit p.

1) Der Erwartungswert μ der Binomialverteilung berechnet sich durch **$\mu = E(X) = p \cdot n$.**

2) Das Maximum der Binomialverteilung liegt in der Nähe des **Erwartungswertes μ.**

3) Für **$p = 0{,}5$** ist die Verteilung symmetrisch.

4) Das Maximum liegt umso weiter rechts, je **größer p ist**.

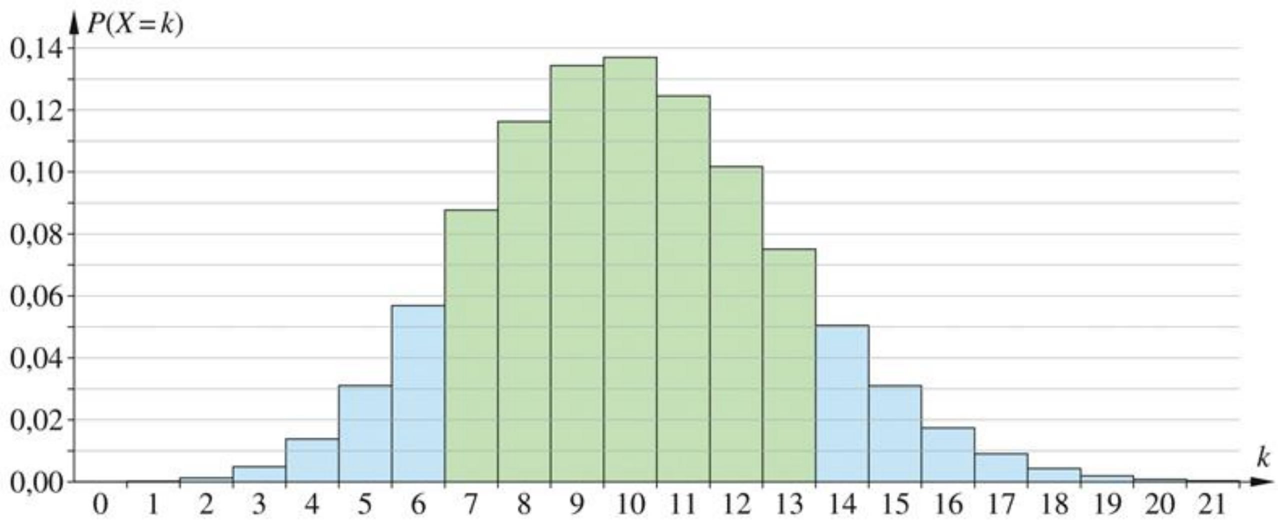
5) Die Binomialverteilung läuft umso flacher, je **größer n ist**.

6) Wird n größer, werden die Histogramme immer symmetrischer zum **Erwartungswert**.

Aufgabe 7: Streuungsmaße der Binomialverteilung

Bei großem n ist das Histogramm sehr flach. Die maximal erreichbare Wahrscheinlichkeit wird mit wachsendem n immer kleiner. Daher ist es recht unwahrscheinlich, dass genau der Erwartungswert eintritt. Vielmehr wird der Ausgang in einem Intervall um den Erwartungswert liegen.

Das folgende Histogramm für den Ausgangstest mit $n = 60$ und $p = \frac{1}{6}$ zeigt, wie die Versuchsausgänge um den Erwartungswert „streuen" werden.



a) **Bestimme** den Erwartungswert und die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 7 und 13 Einsern gewürfelt werden.

Nun interessiert uns die Breite eines Bereichs um den Erwartungswert (den „Radius der Umgebung um den Erwartungswert"). Wir suchen ein Maß für die Streuung der Zufallsgröße X. Dafür stellen wir folgende Überlegungen an:

- Man berechnet alle Abweichungen der Werte 0, 1, 2, …, n vom Erwartungswert μ:

$$\mathbf{0-\mu, 1-\mu, 2-\mu, \ldots, n-\mu}$$

- Jede Abweichung $k-\mu$ wird mit der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens $P(X = k)$ gewichtet:

  $$\mathbf{(0-\mu)\cdot P(X=0), (1-\mu)\cdot P(X=1), (2-\mu)\cdot P(X=2), \ldots, (n-\mu)\cdot P(X=n)}$$

- Damit positive und negative Abweichungen sich beim folgenden Aufsummieren nicht gegeneinander aufheben, werden die Abweichungen gleichzeitig noch quadriert:

  $$\mathbf{(0-\mu)^2\cdot P(X=0) + (1-\mu)^2\cdot P(X=1) + (2-\mu)^2\cdot P(X=2) + \ldots + (n-\mu)^2\cdot P(X=n)}$$

- Beim Quadrieren wird leider auch die physikalische Einheit der Zufallsgröße X quadriert. Um diesen Effekt rückgängig zu machen, wird aus der Summe anschließend die Quadratwurzel gezogen. Das so entwickelte Streuungsmaß heißt Standardabweichung von X. Das Symbol ist σ („Sigma"):

  $$\boldsymbol{\sigma(X)} = \sqrt{\mathbf{(0-\mu)^2\cdot P(X=0) + (1-\mu)^2\cdot P(X=1) + \cdots + (n-\mu)^2\cdot P(X=n)}}$$

  Das Quadrat der Standardabweichung σ(X) nennt man auch Varianz V(X):

  $$\mathbf{V(X)} = \boldsymbol{\sigma^2(X)} = \mathbf{(0-\mu)^2\cdot P(X=0) + (1-\mu)^2\cdot P(X=1) + \cdots + (n-\mu)^2\cdot P(X=n)}$$

Bei einem Stichprobenumfang von n sind zur Berechnung der Varianz n Summanden zu addieren. Für großes n ist dies sehr aufwendig. Zum Glück ist das bei der Binomialverteilung nicht notwendig, wie der folgende Satz zeigt (in Aufgabenteil g) wird der Satz mithilfe der Tabellenkalkulation für verschiedene Werte für n und p nachgewiesen).

Satz zu den Streuungsmaßen einer Binomialverteilung

X sei die Anzahl der Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p. Ferner sei $q = 1 - p$ die Nichttrefferwahrscheinlichkeit und $\mu = \mathbf{p\cdot n}$ der Erwartungswert von X. Dann gilt für Varianz V(X) und Standardabweichung σ(X):

$$\mathbf{V(X)} = \sigma^2(X) = \mathbf{n\cdot p\cdot q = \mu\cdot q}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(X)} = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\mathbf{n\cdot p\cdot q}} = \sqrt{\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{q}}$$

b) **Berechne** nun Standardabweichung σ(X) und Varianz V(X) der 60-stufigen [4-stufige, 20-stufige, 100-stufige] Bernoulli-Kette mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$ [0,1, 0,25, 0,5, 0,7].

c) **Ergänze** in der Tabellenkalkulation aus Aufgabenteil c) weitere Spalten für $k\cdot P(X=k)$ und $(k-\mu)^2\cdot P(X=k)$. **Programmiere** darüber hinaus weitere Zellen für die Summe der beiden obigen Produkte von k = 0 bis k = n (Erwartungswert μ, Varianz V), die Quadratwurzel der Varianz (Standardabweichung σ) und die „Nichttrefferwahrscheinlichkeit" q = 1 – p. Variiere p und n und entdecke einen Zusammenhang von den dargestellten Größen.

4.4 Sigma-Regeln[54]

Was bedeutet nun die Aussage:

Bei einer Binomialverteilung mit p = 0,4 und n = 125 ist $\sigma = \sqrt{30} \approx 5,48$?

Man kann bei Binomialverteilungen angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Versuchsausgang in einer Umgebung des Erwartungswertes liegen sollte, dessen Radius durch ein Vielfaches von σ gegeben ist. Dabei führen wir zunächst den Begriff der **k·σ-Umgebung** ein:

Definition: Eine Umgebung mit dem Radius des k-fachen (k > 0) der Standardabweichung σ um den Erwartungswert μ heißt **k·σ-Umgebung (k·σ-Intervall)** und wird durch $[\mu - k\cdot\sigma;\ \mu + k\cdot\sigma]$ gekennzeichnet.

Für Binomialverteilungen gelten die wichtigen Sigma-Regeln. Diese Regeln ermöglichen eine Rechenvereinfachung, da nicht mit kumulierten Wahrscheinlichkeiten gearbeitet werden muss:

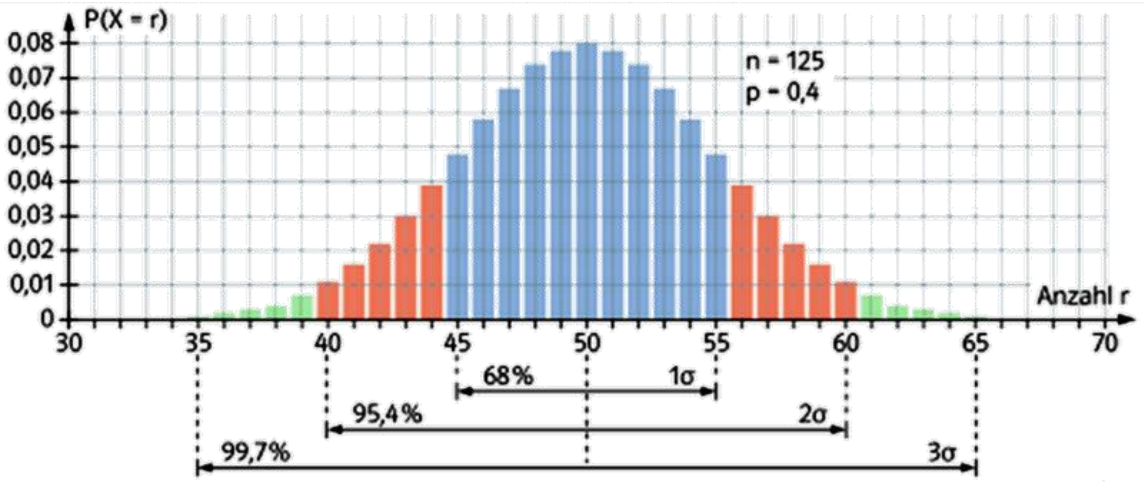
Sigma-Regeln

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern n und p, dem dazugehörigen Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und der entsprechenden Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ erhält man folgende Näherungen, falls **σ > 3 (Laplace-Bedingung)** gilt:

1σ-Regel: $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) \approx 68{,}3\ \%$
2σ-Regel: $P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 95{,}4\ \%$
3σ-Regel: $P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\ \%$

Für „glatte“ Wahrscheinlichkeiten gelten die folgenden Sigma-Regeln:

$P(\mu - 0{,}67\sigma \le X \le \mu + 0{,}67\sigma) \approx 50\ \%$
$P(\mu - 0{,}84\sigma \le X \le \mu + 0{,}84\sigma) \approx 60\ \%$
$P(\mu - 1{,}04\sigma \le X \le \mu + 1{,}04\sigma) \approx 70\ \%$
$P(\mu - 1{,}15\sigma \le X \le \mu + 1{,}15\sigma) \approx 75\ \%$
$P(\mu - 1{,}28\sigma \le X \le \mu + 1{,}28\sigma) \approx 80\ \%$
$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 90\ \%$
$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 95\ \%$
$P(\mu - 2{,}33\sigma \le X \le \mu + 2{,}33\sigma) \approx 98\ \%$
$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 99\ \%$
$P(\mu - 3{,}29\sigma \le X \le \mu + 3{,}29\sigma) \approx 99{,}9\ \%$



[54] Fakultativ im GK

Mithilfe der Standardabweichung σ können Intervalle um den Erwartungswert $\mu = E(X)$ eines Zufallsexperiments gelegt werden, in denen Trefferzahlen mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten liegen. Dabei gilt folgender **Merksatz**:

> Liegt die Trefferwahrscheinlichkeit bei einem Bernoulli-Experiment **außerhalb der 2σ-Umgebung (2σ-Intervall)**[55], spricht man von einer **signifikanten Abweichung** vom Erwartungswert. Das bedeutet: der Ausgang ist so ungewöhnlich, dass vermutlich ein anderes p als das angenommene zugrunde lag.

Beispiel: Würde man bei 125 Versuchen im obigen Beispiel weniger als 40 ($50 - 2\sigma \approx 39{,}04$) oder mehr als 60 Treffer ($50 + 2\sigma \approx 60{,}96$) erhalten, müsste man von einer anderen Trefferwahrscheinlichkeit ausgehen. Es gilt $P(40 \leq X \leq 60) \approx 94{,}5$ % (runde zur „sicheren" Seite nach innen ab), so dass in 5,5 % der Fälle weniger als 40 und mehr als 60 Treffer eintreten.

Übungsaufgaben zu den Sigma-Regeln

a) Ein angenommener nicht „gezinkter" Hexaeder-Würfel wird 100 Mal gewürfelt. Es kommt 10 [bzw. 25] Mal die „1".

   Untersuche, ob eine signifikante Abweichung vorlag und wie hoch die Trefferzahl höchstens [bzw. mindestens] sein darf, dass sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % in einer geeigneten Umgebung um den Erwartungswert liegt.

b) Auf der Kirmes wirbt eine Losbude mit dem Versprechen: Jedes dritte Los gewinnt! Johannes ist misstrauisch und kauft 60 Lose, um die Aussage zu testen. Darunter sind nur 12 Gewinnlose.

   Beurteile die Werbung mithilfe der 2σ-Regel.

c) Johanna plant, eine Münze 100 Mal zu werfen. Sie möchte das Intervall wissen, in das die Zahl X ihrer Kopfwürfe fällt, mit mindestens 95 % Sicherheit voraussagen.

   Untersuche, welches Intervall sie angeben sollte.

d) Der Wochenspiegel ist eine kostenlose Werbezeitung mit einer Auflage von 5000 Exemplaren. In 80 % der Haushalte wandert sie ungeöffnet in die Mülltonne.

   Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 980 bzw. mindestens 1100 Exemplare gelesen werden. **Schätze** mit der 2σ-Regel, in welchem Intervall die Anzahl gelesener Exemplare mit ca. 95,4 %-iger Wahrscheinlichkeit liegt.

e) **Bearbeite** die Aufgaben a) bis d) ohne Sigma-Regeln nur mit kumulierten Wahrscheinlichkeiten.

[55] Außerhalb der 3σ-Umgebung (3σ-Intervall) spricht man von einer hoch signifikanten Abweichung vom Erwartungswert.

4.5 Testen von Hypothesen mithilfe der Binomialverteilung

Aufgabe 1: Rotes oder grünes Gummibärchen?

Wählt in Eurer Tischgruppe eine Person aus, die mit verbundenen Augen sagen soll, ob es sich um ein rotes oder ein grünes Gummibärchen handelt. Dieser Versuch wird 40-mal wiederholt.

a) **Notiert** das Ergebnis.

b) **Vermutet**, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Person die Gummibärchen richtig erkennt. Könnte die Person die Erfolgsquote auch durch reines Raten erreicht haben? Unter welchen Bedingungen handelt es sich bei dem Versuch um ein Bernoulli-Experiment?

c) **Bestimme** Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung.

Aufgabe 2: Hypothesenbildung beim Geschmackstest[56]

Wir nehmen an, dass die beiden obigen Experimente eine Bernoulli-Kette der Länge 40 beschreiben. Im Folgenden betrachten wir den Geschmackstest der Gummibärchen.

a) **Berechne** näherungsweise, wie wahrscheinlich es ist, mindestens 23, 27 bzw. 30 der 40 Gummibärchen richtig einer Farbe zuzuordnen.

b) **Entscheide** begründet: Kann man ab einer bestimmten Anzahl k richtig zugeordneter Farben das Raten ausschließen? Wenn ja, ab wann?

Was ist im obigen Kontext eine Hypothese?

Das Vorgehen soll nun verallgemeinert werden und der Begriff der **Hypothese** eingeführt werden. Wir wissen nicht, wie hoch die Wahrscheinlichkeit wirklich ist, die Gummibärchen richtig einer Farbe zuzuordnen. Daher können wir nur sagen, wie wahrscheinlich es ist, die beobachtete Anzahl x_{beob} an richtig zugeordneten Gummibärchen oder mehr („mindestens x_{beob}“) zu erreichen, wenn der Schüler nur rät. Man stellt daher folgende **Hypothesen** auf:

Nullhypothese H_0	**Alternativhypothese H_A**
Die Person rät nur.	Die Person ist besser als Raten.

Welche mathematische Testarchitektur erhält man bzw. wie erfolgt die Modellbildung?

Wandelt man diese Hypothesen in **statistische** Formulierungen um, erhält man in der obigen Situation des Geschmackstests folgende mathematische Beschreibungen:

[56] Die Beispielaufgabe „Gummibärchen“ ist angelehnt an die Fortbildungsreihe des DZLM: „STOCHASTIK konkret 2014“ von Rolf Biehler und Janina Oesterhaus

Nullhypothese H_0: $p = 0{,}5$	**Alternativhypothese H_A:** $p > 0{,}5$
Die Person ordnet alle Gummibärchen mit einer konstanten Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ der richtigen Farbe zu und die einzelnen Versuche sind stochastisch unabhängig voneinander. Dadurch sind die Bedingungen zur Anwendung der Binomialverteilung erfüllt und in dem Modell kann für die Zufallsgröße X „Anzahl der richtig zugeordneten Gummibärchen“ die Versuchsanzahl $n = 40$ verwendet werden.	Dem Prozess der Farbzuordnung eines Gummibärchens könnte eine Wahrscheinlichkeit zugrunde liegen, die $p > 0{,}5$ beträgt. Eine genauere Festlegung ist im Zusammenhang schwierig (da z. B. Erfahrung, Übung, etc. eine konstante Wahrscheinlichkeit nicht sicher erscheinen lässt). Deshalb wird die Alternativhypothese erstmal nicht weiter festgelegt, sondern bei „besser als raten“ belassen.

Wann wird eine Hypothese angenommen, wann wird sie abgelehnt?

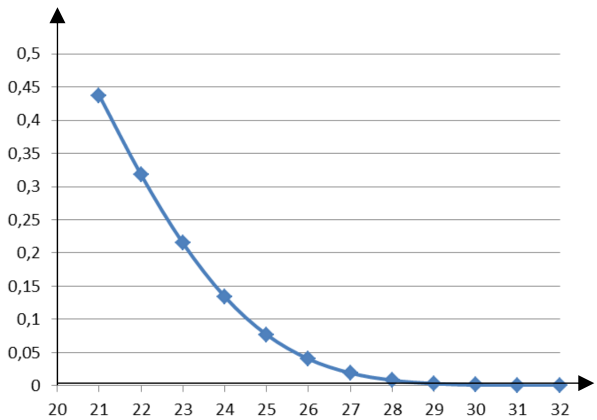
Wenn die Anzahl an richtig zugeordneten Gummibärchenfarben vom Erwartungswert 20 nach „links“ abweicht (also geringer als „raten“ ausfällt), kann davon ausgegangen werden, dass die Person nur rät (und das noch nicht mal mit besonders viel Glück!). Daher ist in unserem Fall nur der Bereich rechts vom Erwartungswert 20 interessant. Nun muss ein **Annahme**- und der **Verwerfungsbereich** der Nullhypothese bestimmt werden. Ein gängiger Annahmebereich liegt bei 5%. Wir sagen dann, dass das **Signifikanzniveau α bei 5%** liegt.[57] Die Wahrscheinlichkeit, die Hypothese zu verwerfen, obwohl sie zutrifft, nennt man **Irrtumswahrscheinlichkeit**. Sie ist die Wahrscheinlichkeit des Ablehnungsbereichs und beträgt daher höchsten 5 %. Man sagt, dass die **Abweichung** (von H_0) **statistisch signifikant auf dem 5%-Niveau** ist. Die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit entspricht daher dem Signifikanzniveau α.

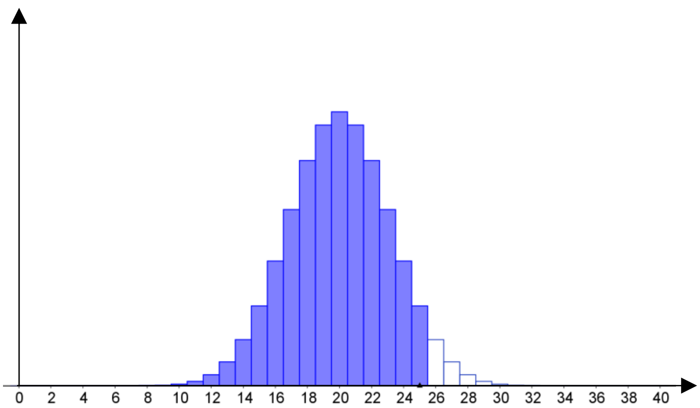
c) **Bestimme** die Wahrscheinlichkeiten in der Tabelle für $p = 0{,}5$ und $n = 40$ und gib den Annahme- und Verwerfungsbereich der Nullhypothese an.

k	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
$P(x = k)$											
$P(X \leq k)$											
$P(X \geq k)$											

Beurteile aufgrund der obigen Tabelle, für welche der drei Ergebnisse $x_{beob} = 23, 27, 30$ die Nullhypothese angenommen werden kann und wann sie verworfen werden muss.

d) **Ergänze** in den beiden Diagrammen die Achsenbeschriftung bzw. -markierung und interpretiere sie im obigen Kontext.





[57] Hier liegt die (willkürlich festgelegte, aber übliche) Annahme zugrunde, dass der Verwerfungsbereich insgesamt 5% betragen soll. Für einseitige Tests bedeutet das ein 5%-Intervall, für zweiseitige Tests 2,5%-Intervall an jeder Seite.

e) **Entscheide** begründend, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind.

Für die Aussagen (1) bis (5) wird angenommen, dass ein Testergebnis im Verwerfungsbereich auf einem Signifikanzniveau von 5 % liegt.

Aussage	Wahr	Falsch	Begründung
1. Es ist eindeutig bewiesen, dass die Nullhypothese falsch ist.	☐	☐	
2. Die Wahrscheinlichkeit des Zutreffens der Nullhypothese ist gefunden worden.	☐	☐	
3. Es ist eindeutig bewiesen, mit der die Alternativhypothese wahr ist.	☐	☐	
4. Man kann nun die Wahrscheinlichkeit ableiten, dass die Alternativhypothese richtig ist.	☐	☐	
5. Man geht nun davon aus, dass die Nullhypothese falsch ist, ist sich aber bewusst, dass man bei diesem Verfahren eine wahre Nullhypothese mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 5% fälschlich verwirft.	☐	☐	

Für die Aussagen (6) bis (10) wird angenommen, dass ein Testergebnis im Annahmebereich auf einem Signifikanzniveau von 5 % liegt.

Aussage	Wahr	Falsch	Begründung
6. Es ist eindeutig bewiesen, dass die Nullhypothese richtig ist	☐	☐	
7. Man kann nun die Wahrscheinlichkeit ableiten, dass die Nullhypothese richtig ist.	☐	☐	
8. Es ist eindeutig bewiesen, dass die Alternativhypothese falsch ist.	☐	☐	
9. Die Wahrscheinlichkeit des Zutreffens der Alternativhypothese ist gefunden worden.	☐	☐	
10. Man geht nun davon aus, dass die Nullhypothese richtig ist, ist sich aber bewusst, dass man bei diesem Verfahren in dem Fall, in dem die Nullhypothese falsch ist, diese mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% dennoch fälschlich annimmt	☐	☐	

Aus den bisherigen Überlegungen lässt sich folgende Reihung für einen **rechtsseitigen Signifikanztest** einer **Nullhypothese** H_0: $p = p_0$ und seiner **Alternative** H_A: $p > p_0$ ableiten:

1. Man legt den Stichprobenumfang n und das Signifikanzniveau α (z. B. $\alpha = 5\%$) fest.
2. Als Testgröße X verwendet man die Trefferzahl für die Parameter n und p_0.
3. Man bestimmt den Annahmebereich der Nullhypothese. Dazu sucht man aus der Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten von X die kleinste Zahl b heraus, bei der $1 - \alpha = 95\%$ überschritten wird. Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt dann höchstens bei $\alpha = 5\%$.
4. Man führt die Stichprobe vom Umfang n durch. H_0 wird angenommen, wenn das Stichprobenergebnis im Annahmebereich liegt, sonst wird H_0 verworfen und H_A angenommen.

Was versteht man unter einem Fehler 1. und 2. Art?

Beim Testen mit Binomialverteilungen wird die Nullhypothese akzeptiert oder verworfen. Dabei können Fehlentscheidungen vorkommen. Wenn die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie richtig ist, spricht man von einem **Fehler 1. Art (α-Fehler)**. Wenn sie akzeptiert wird, obwohl sie falsch ist, spricht man von einem **Fehler 2. Art (β-Fehler)**. Folgende Tabelle stellt dies dar.

		Zustand der Wirklichkeit	
		H_0 ist **wahr**	H_0 ist **falsch**
H_0-Hypothese wird …	**abgelehnt**	**Fehler 1. Art / α-Fehler**	**richtige Entscheidung**
	beibehalten	**richtige Entscheidung**	**Fehler 2. Art / β-Fehler**

Beispiele:

- Im obigen Fall der Gummibärchen tritt ein **Fehler erster Art** auf, wenn aufgrund eines außergewöhnlich guten Ratens (z.B. 28 Treffer) fälschlicherweise angenommen wird, dass die Person die Farbe der Gummibärchen mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 % schmecken kann.
- Ein **Fehler zweiter Art** tritt auf, wenn der Proband z. B. 21 Treffer erreicht (was im Annahmebereich von H_0 liegt), aber in Wirklichkeit doch besser als Raten ist.

Wie berechnet man α- und β-Fehler?

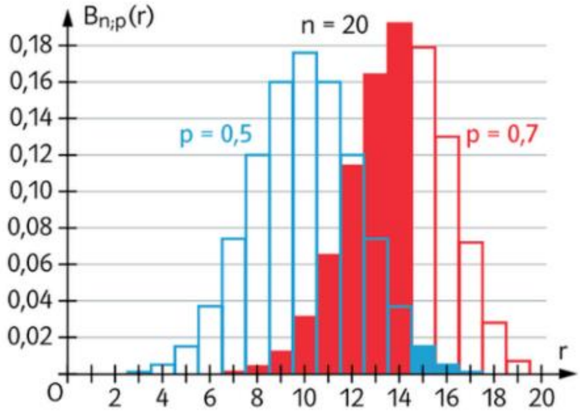
Der **Fehler erster Art** ist inhaltlich das gleiche wie die Irrtumswahrscheinlichkeit und somit durch das Signifikanzniveau festgelegt. Er beträgt $1 - P(X \leq 25) = \mathbf{P(X \geq 26) \approx 0,0403}$ (was natürlich kleiner als 0,05 sein muss).

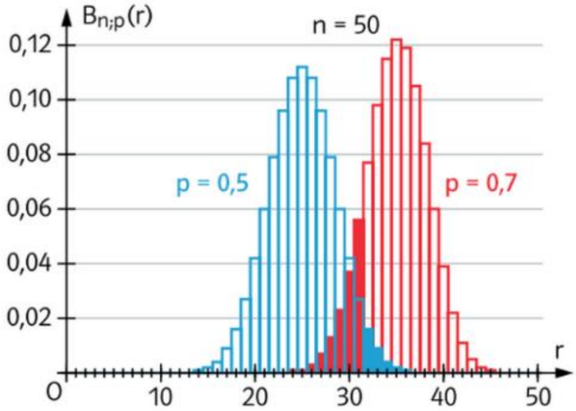
f) **Ermittle** den Fehler der ersten Art für einen höheren bzw. niedrigeren Stichprobenumfang n. **Beschreibe** Deine Beobachtungen.

Der **Fehler zweiter Art** hängt von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit p ab, mit der die Versuchsperson die Gummibärchenfarbe erkennen würde. Diese ist in aller Regel unbekannt. Deshalb muss man sich einen Überblick verschaffen und in Abhängigkeit einer angenommenen (hier: besseren) Trefferquote den Fehler bestimmen. Sei X_p die Anzahl der Treffer bei einer angenommenen variablen Trefferquote p und einem festem Stichprobenumfang n. Es gilt für den β-Fehler $P(X_p \leq 25)$. Für $p = 0,6$ gilt: $\mathbf{P(X_{0,6} \leq 25) \approx 0,6825}$.

g) **Bestimme** für n = 40 [n = 20; n = 100] den Fehler der 2. Art für unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten p > 0,5. **Beschreibe** Deine Beobachtungen.

h) **Beschreibe**, wie sich der Fehler 1. Art und 2. Art verändern, wenn der Annahmebereich vergrößert wird. zusammenhängen. **Erläutere**, wie sich die beiden Fehler verändern, wenn der Stichprobenumfang vergrößert wird. Nutze dafür die folgenden Abbildungen von Binomialverteilungen.





Wie und wann helfen die Sigmaregeln?

i) Die **Sigmaregeln** geben die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Trefferzahl bei einer Bernoullikette der Länge n bestimmte symmetrische Abweichungen (der Größe $a \cdot \sigma$)[58] vom Erwartungswert μ nicht überschreitet. Im Falle, dass die Standardabweichung $\sigma > 3$ ist, gilt:

a	**P_a („zweiseitig“)** **$= P(\mu - a \cdot \sigma < X < \mu + a \cdot \sigma)$**	**P_a („einseitig“)** **$= 1 - P(X < \mu - a \cdot \sigma) = P(X \geq \mu - a \cdot \sigma)$ („links“)** **$= 1 - P(X > \mu + a \cdot \sigma) = P(X \leq \mu + a \cdot \sigma)$ („rechts“)**
3,29	99,9%	99,95%
3	99,7%	99,85%
2,58	99%	99,5%
2,33	98%	99%
2	95,4%	97,7%
1,96	95%	97,5%
1,64	90%	95%
1,28	80%	90%
1,15	75%	87,5%
1,04	70%	85%
1	68,3%	84,2%
0,84	60%	80%
0,67	50%	75%

Ermittle mithilfe der Sigmaregeln den Annahme- und Verwerfungsbereich eines rechtsseitigen Tests auf einem Signifikanzniveau von 5% [10%; 20%; 1%] für n = 40 und p = 0,5.

[58] Die Wahrscheinlichkeiten sind für $\sigma > 3$ praktisch unabhängig von der Versuchslänge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p. Für die Normalverteilungen sind die Gleichungen exakt.

Aufgabe 3: Tombola

Für eine Tombola auf dem Schulfest wird eine große Menge an Losen gekauft. Die Herstellerfirma teilt mit, dass der Anteil der Nieten 65% beträgt. Durch eine Stichprobe von 80 Losen will sich der Mathe-Leistungskurs nun von der Richtigkeit der Angaben überzeugen. Gesucht ist eine Entscheidungsregel für eine Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau von 1%.

a) **Beschreibe** die **Testarchitektur** der obigen Situation.

b) **Gib** die **Nullhypothese H_0** für den obigen Sachkontext **an**.

c) Die **Gegenhypothese H_A** ist keine Festlegung auf einen bestimmten Anteil der Nieten. Sie wird nur angenommen, wenn das Ergebnis der Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% darauf schließen lässt, dass die Nullhypothese nicht zutrifft. **Formuliere** H_A mathematisch.

d) Die Aufgabe ist so konstruiert, dass der Mathematik-LK herausfinden will, ob die Nieten tatsächlich mit einem Anteil von 65% in den Losen erhalten sind. Das bedeutet, dass es von Interesse ist, ob nicht doch *mehr oder weniger* Nieten vorhanden sind. Somit befinden wir uns bei einem **zweiseitigen Signifikanztest**.

   (1) **Bestimme** die Werte für die Zufallsgröße X, den Umfang der Stichprobe und den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ. **Notiere** dazu nochmals die Wahrscheinlichkeit p sowie das vorgegebene Signifikanzniveau α.
   (2) **Bestimme** mit dem GTR für die singulären und kumulierten Wahrscheinlichkeiten der folgenden Tabelle. [Zur Erinnerung: „BinomialPD(80, 0,65)“ bzw. „BinomialCD(80, 0,65)“ zeigen die Liste der singulären bzw. kumulierten Wahrscheinlichkeiten an.]

	…	39	40	41	42	43	…	62	63	64	65	…
$P(x = k)$	…						…					…
$P(X \leq k)$	…						…					…
$P(X \geq k)$	…						…					…

e) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass (bei angenommener H_0) das Ergebnis im Verwerfungsbereich landet, soll der Aufgabe zufolge höchstens 1% betragen. Daraus ergeben sich für die linke und rechte Seite höchstens 0,5%.

   (1) **Gib** in der Liste der kumulierten Wahrscheinlichkeiten die kleinste Zahl a **an**, bei der 0,005 überschritten wird.
   (2) **Bestimme** in dieser Liste die kleinste Zahl b, bei der 0,995 überschritten wird.
   (3) **Formuliere** den Annahme- sowie den Verwerfungsbereich der Nullhypothese sowie eine Entscheidungsregel (im ganzen Satz).

f) **Für Experten: Untersuche**, was es bedeutet hätte, wenn der Mathe-LK das Signifikanzniveau auf 10% festgelegt hätte. Begründe, welche Reaktion gegenüber der Herstellerfirma möglich wäre, wenn das Ergebnis bei einem 1% Signifikanzniveau im Vergleich zu einem 10% Signifikanzniveau im Verwerfungsbereich landen würde.

g) **Für Experten:** Der Mathe-LK führt zunächst die Stichprobenüberprüfung aus und wählt dann das Signifikanzniveau. **Bewerte** das Vorgehen.

Was sind Fehler 1. Art und 2. Art beim beidseitigen Testen?

h) Der **Fehler erster Art (α-Fehler)**, also die **„Irrtumswahrscheinlichkeit"**, ergibt sich aus dem Signifikanzniveau und gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass H_0 verworfen wird, obwohl es wahr ist.

(1) **Formuliere** den Fehler erster Art im Anwendungszusammenhang.
(2) **Berechne** den Fehler erster Art.

i) Der **Fehler zweiter Art** gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass H_0 akzeptiert wird, obwohl es falsch ist.

(1) **Begründe**, dass der Fehler zweiter Art nicht berechnet werden kann und **formuliere** die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang.
(2) Nimm an, dass tatsächlich 70% Nieten im Lossatz vorhanden sind und **bestimme** den Fehler zweiter Art.
(3) **Erläutere** ohne Rechnung, wie sich im Vergleich zu b) der Fehler zweiter Art verändert, wenn tatsächlich 80% Nieten im Lossatz vorhanden sind.

Wie bestimmt man die Entscheidungsregel mit den Sigmaregeln?

j) Alternativ zu c) und d) kann der Annahme- und Verwerfungsbereich auch mit den **Sigmaregeln** bestimmt werden.

(1) **Berechne** die Standardabweichung σ.
(2) **Bestimme** aus der in Aufgabe 3 i) von Kapitel 1 angegebenen Tabelle das zum 1%-Signifikanzniveau zugehörige a.
(3) **Berechne** damit den Annahme- und den Verwerfungsbereich.

Aufgabe 4: Verspätungen im Nahverkehr[59]

Die Bürgerinitiative „NRW für ÖPNV" behauptet, dass die Verkehrsmittel im Nahverkehr in mindestens 40% der Fahrten eine merkliche Verspätung (von mehr als 5 Minuten) hätten. Der VRR bestreitet das. Es soll eine Untersuchung von 100 zufällig ausgewählten Fahrten erfolgen und der Test soll auf einem Signifikanzniveau von 5% erfolgen.

a) **Beschreibe** die „**Testarchitektur**" und formuliere **Nullhypothese** H_0 und **Alternativhypothese** H_A mathematisch.

b) **Bestimme** die Werte für die Zufallsgröße X, den Umfang der Stichprobe und den Erwartungswert μ sowie die Standardabweichung σ.

c) **Bestimme** mit dem GTR die **kumulierte Binomialverteilung** für alle $k \in \{0, \ldots, 100\}$.

d) **Formuliere** den **Annahme**- sowie den **Verwerfungsbereich** der Nullhypothese sowie eine **Entscheidungsregel** (im ganzen Satz).

e) **Formuliere** und berechne den **Fehler erster Art** im Anwendungszusammenhang (unter der Voraussetzung, dass H_0 fälschlicherweise verworfen wurde).

[59] Die Beispielaufgabe „Verspätungen" ist an das Skript der Kompetenzteams-NRW-Federführungsgruppe der Bezirksregierung Köln (2011) angelehnt.

f) **Formuliere** und **berechne** den **Fehler zweiter Art** unter der Annahme, dass die tatsächliche Wahrscheinlichkeit für Verspätungen 30% beträgt (und H_0 fälschlicherweise angenommen wurde). **Bewerte** den Fehler zweiter Art aus der Perspektive der Bürgerbewegung und des VRR.

g) **Berechne** mit Hilfe der Sigma-Regeln den Annahme- und den Verwerfungsbereich.

h) **Für Experten:** Die Bürgerbewegung behauptet, dass es in *mindestens* 40% aller Fahrten zu einer Verspätung kommt. Die Bahn hingegen behauptet, dass dies in *höchstens* 40% der Fahrten der Fall ist. Ein (rechtsseitiger) Signifikanztest auf 5%-Signifikanzniveau ergibt einen Annahmebereich von A = [0;48] mit einem Fehler erster Art von ca. 4% und einem Fehler zweiter Art von 10%. **Bewerte** diesen Testansatz aus der Perspektive der Bürgerbewegung.

Aufgabe 5: Münzwurf (Grundlagen)

Es werden fünfzigmal zwei Münzen gleichzeitig geworfen. Die Zufallsvariable X zählt, wie oft beide Münzen „Zahl" zeigen.

a) **Begründe**, warum dies eine Bernoulli-Kette ist und geben Sie die Parameter an.

b) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, dass
(1) genau zwölfmal beide Münzen „Zahl" zeigen,
(2) höchstens zwölfmal beide Münzen „Zahl" zeigen,
(3) mindestens zwölfmal beide Münzen „Zahl" zeigen
(4) mindestens fünfzehnmal und höchstens dreißigmal beide Münzen „Zahl" zeigen.

c) **Berechne** den Erwartungswert von X. Wie kann man diesen Wert interpretieren?

d) **Berechne** die Standardabweichung von X.

e) **Gib** ein Intervall **an**, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95% die Anzahl der Würfe liegt, bei denen beide Münzen „Zahl" zeigen.

Aufgabe 6: Kirschkerne (Grundlagen)

In einem Unternehmen werden Sauerkirschen maschinell entsteint und dann in Gläser abgefüllt. 2% der fertigen Kirschen haben trotzdem noch ihren Kern.

a) Herr Becker backt einen Kirschkuchen. Dafür nimmt er 100 dieser Kirschen. **Untersuche**, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass sich in dem Kuchen mindestens ein Kirschkern befindet.

b) **Bestimme**, wie viele Kirschkerne (im Mittel auf lange Sicht) in einem solchen Kuchen zu erwarten sind.

c) **Untersuche**, wie viele Kirschen Herr Becker für seinen Kuchen höchstens nehmen dürfte, damit er mit mindestens 80% Wahrscheinlichkeit keinen Kern darin hat.

d) **Ermittle**, wie groß die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kirsche noch ihren Kern hat, sein darf, damit sich mit mindestens 80% Wahrscheinlichkeit in einem Kirschkuchen mit 100 Kirschen kein Kirschkern befindet.

Aufgabe 7: Brot auf die Marmeladenseite

Katja möchte testen, ob ein Marmeladenbrot mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf die unbestrichene oder die mit Marmelade bestrichene Seite fällt. Dazu hat sie 25 Toastbrote auf einer Seite mit jeweils gleich viel Marmelade bestrichen und möchte einen zweiseitigen Signifikanztest mit dem Signifikanzniveau 5% durchführen.

a) **Gib** die Nullhypothese und die Alternative **an**.

b) **Untersuche**, bei welchen Stichprobenergebnissen Katja davon ausgeht, dass beide Seiten gleich wahrscheinlich sind.

c) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art.

d) **Ermittle** die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, wenn das Brot tatsächlich mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 auf die Marmeladenseite fällt.

Aufgabe 8: Umfrage zur Stadthalle

Der Oberbürgermeister einer Stadt behauptet, dass 75% der Bürger für den Bau einer neuen Stadthalle sind. Die Redaktion der Lokalzeitung glaubt, dass es weniger sind. Sie möchte dazu einen Signifikanztest in Form einer Umfrage unter 100 Bürgern der Stadt durchführen. Das Signifikanzniveau soll 5% betragen.

a) **Begründe**, ob ein linksseitiger, ein rechtsseitiger oder ein zweiseitiger Test durchgeführt werden soll und **gib** die Nullhypothese, die Alternative und den Annahmebereich des Tests **an**.

b) **Beurteile**, bei welchen Ergebnissen die Redaktion die Schlagzeile „Weniger Befürworter als OB behauptet“ drucken kann.

c) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art.

d) **Bestimme** die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, falls nur 60% der Bürger für den Bau sind.

Überblicksraster für Signifikanztests

Aufgabe: Erstelle in Deinem Heft jeweils Musterbeispiele für einen rechts- und linksseitigen Signifikanztest wie im folgenden Beispiel zum zweiseitigen Signifikanztest geschehen.

Musterbeispiel für zweiseitigen Signifikanztest auf binomialverteilten Zufallsgrößen

Betrachtet wird eine beliebige Beispielaufgabe zu einem zweiseitigen Signifikanztest

1. Aufstellen der Hypothesen:

Nullhypothese im Zusammenhang: H_0: p = 0,3

Gegenhypothese im Zusammenhang: H_A: p ≠ 0,3

2. Aufstellen der Variablen:

n = 50 p = 0,3 α = 0,05 ⇒ $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$

Die Prüfvariable *X* ist binomialverteilt mit n = 50 und p = 0,3.

3. Bestimmung von Annahme und Verwerfungsbereich:

Stellt man mit dem GTR die kumulierte Verteilung dar, so ergibt sich:

	…	6	7	8	**9**	10	…	21	**22**	23	24	…
P(X ≤ k)	**…**	0,0024	0,0073	0,0183	**0,0402**	0,0789	…	0,9749	**0,9877**	0,9944	0,9976	**…**

Als erstes ist das **kleinste a** gesucht mit **P(X ≤ a) ≥** $\frac{\alpha}{2} = \mathbf{0,025}$. Dies ist für **a = 9** der Fall.
Dann sucht man das **kleinste b** mit $\mathbf{P(X \leq b) \geq 0,975}$. Dies ist für **b = 22** der Fall.

Dann ist der **Verwerfungsbereich** $V = \{0,1,2,\ldots,8\} \cup \{23,24,25,\ldots,50\}$ und der **Annahmebereich** $A = \{10,11,12,\ldots,19,20,21,22\}$.

4. Bewertung des Tests

- Da das Testergebnis 9 im Annahmebereich liegt, wird man die Nullhypothese annehmen.
- Da das Testergebnis 6 im Verwerfungsbereich liegt, wird man die Nullhypothese ablehnen.

5. Fehlerberechnung

Fehler 1. Art:
$\alpha = P(X \leq 8) + P(X \geq 23) = P(X \leq 8) + 1 - P(X \leq 22) = 0{,}0183 + 1 - 0{,}9877 = 0{,}0306$

Fehler 2. Art: p_{neu} sei die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit. Dann gilt:

$\beta = P_{p_{neu}}(9 \leq X \leq 22) = P_{p_{neu}}(X \leq 22) - P_{p_{neu}}(X \leq 8)$

4.6 Kontrollaufgaben

Kompetenzraster zur Vorbereitung auf die Klausur

Hilfsmittelfrei

Ich kann …	Aufgabe	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
Kenngrößen von Häufigkeitsverteilungen berechnen.	1				
Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen berechnen.	1				
Wahrscheinlichkeiten bei Urnenversuchen mit Zurücklegen berechnen.	2				
bedingte Wahrscheinlichkeiten mittels Vierfeldertafel berechnen.	3				
Bernoulli-Terme bestimmten Ereignissen zuordnen.	4				
Histogramme einer bestimmten Binomialverteilung zuordnen.	5				
Wahrscheinlichkeiten anhand von Histogrammen bestimmen.	5				
Zusammenhänge von komplementären Zufallsgrößen herstellen.	5				
Kenngrößen von Binomialverteilungen (n und p gegeben) berechnen.	6				
Kenngrößen von Binomialverteilungen (n und V gegeben) berechnen.	6				
Kenngrößen an einem Histogramm zur Binomialverteilung ablesen.	6				

Unter Nutzung des GTR

Ich kann …	Aufgabe	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
erläutern, ob das Modell der Binomialverteilung anwendbar ist.	9a,10b				
Grundaufgabe 1 einer Binomialverteilung lösen (Gesucht: P).	9b,c,10b,c				
Grundaufgabe 2 einer Binomialverteilung lösen (Gesucht: k).	9e,h,10c				
Grundaufgabe 2 einer Binomialverteilung lösen (Gesucht: p).	9d				
Grundaufgabe 2 einer Binomialverteilung lösen (Gesucht: n).	9f				
Erwartungswert berechnen.	9b,10b				
Baumdiagramme zu einem Sachverhalt darstellen.	10a				
Wahrscheinlichkeiten mittels Baumdiagramm bestimmen.	10a				
bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnen.	9g, 10a				
Sigma-Regeln auf binomialverteilte Zufallsgröße anwenden.	9i				
Fehler 1. Art und 2. Art im Sachkontext beschreiben.	10c				
Fehler 1. Art mittels Entscheidungsregel berechnen	10c				
Kenngrößen einer Häufigkeitsverteilung berechnen.	10d				
Rückschlüsse aus Kenngrößen einer Häufigkeitsverteilung ziehen.	10d				
kombinatorische Aufgaben zum Lotto 6 aus 49 lösen.	11				

Aufgaben ohne Zuhilfenahme von Hilfsmitteln

Aufgabe 1: Kenngrößen von Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

a) In den Schulaufgaben in Mathematik und Englisch hat sich in einer Klasse die folgende Notenverteilung ergeben:

Note	1	2	3	4	5	6
Mathematik	6	4	2	3	4	6
Englisch	2	4	6	6	4	2

Welche Antworten sind richtig? **Begründe**.

(1) Das arithmetische Mittel von M und E ist gleich.
(2) Die Standardabweichung von M und E ist gleich.
(3) Die Standardabweichung von M ist größer als die von E.

b) Eine Zufallsgröße X habe die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,32	0,36	0,32

(1) **Begründe**, warum es sich um keine Binomialverteilung handelt.

(2) **Bestimme** den Erwartungswert μ, die Varianz $V(X)$ und die Standardabweichung $\sigma(X)$ der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

Aufgabe 2: Urnenversuche

In einer Urne befinden sich 6 rote und 4 blaue Kugeln.

a) Es wird dreimal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.

Bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1 „Unter den gezogenen Kugeln ist höchstens eine blaue Kugel“.

b) Es wird zehnmal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Als Ereignis werde betrachtet E_2: „Unter den gezogenen Kugeln sind genau k blaue Kugeln ($0 \leq k \leq 4$).

Gib eine Formel für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_2 **an**.

Aufgabe 3: Wahrscheinlichkeiten

In einer Reisegruppe sind 37,5 % männliche Reisende (M), von diesen sind 80 % im Alter von 60 und mehr (60+). Insgesamt sind 70 % der Reisende im Alter 60+.

a) **Bestimme** den Anteil der weiblichen Reisenden im Alter 60+ in der gesamten Reisegruppe.

[Tipp: Vierfeldertafel]

b) Insgesamt gibt es 10 mehr weibliche als männliche Reisende in der Gruppe.

Ermittle die Personenzahl der gesamten Reisegruppe.

Aufgabe 4: Bernoulli-Formel

a) **Entscheide begründend**, welche der folgenden Terme zu dem angegebenen Ereignis passen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass von 20 zufällig ausgewählten Personen genau drei Männer sind beträgt (wir nehmen an, dass es genauso viele Männer wie Frauen gibt) …

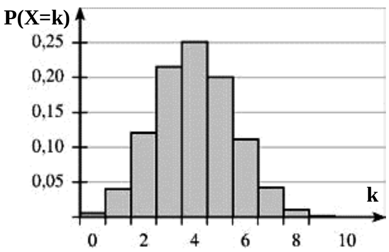
(1) $\binom{20}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^{17}$ (2) $0{,}5^3 \cdot 0{,}5^{17}$ (3) $\binom{20}{17} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^{17}$ (4) $\binom{20}{3} \cdot 0{,}5^{20}$ (5) $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^{17}$

b) Ein Schnellrestaurant veranstaltet ein Gewinnspiel und schenkt jedem Kunden ein Los. Die Wahrscheinlichkeit für einen Sofortgewinn liegt bei $\frac{1}{5}$. Ordne den folgenden Ereignissen den richtigen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit zu: A: Unter 10 Losen sind keine Sofortgewinne; B: Unter 10 Losen sind genau 4 Sofortgewinne; C: Unter 10 Losen ist mindestens ein Sofortgewinn.

$T_1 = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6$ $T_2 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$ $T_3 = \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$ $T_4 = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$ $T_5 = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$ $T_6 = \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$

Aufgabe 5: Binomialverteilung

Die Zufallsvariablen X und Y sind binomialverteilt. Für die Variable X ist n = 10 und p = 0,4. Für die zweite Variable Y ist n = 10 und p = 0,6. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer der beiden Variablen ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



a) **Begründe,** dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X abgebildet ist, und **gib** einen Wert für P(X ≠ 5) **an**.

b) **Begründe**, warum P(X = k) = P(Y = 10 – k) für alle natürlichen Zahlen 0 ≤ k ≤ n gilt, und **bestimme** P(Y = 6).

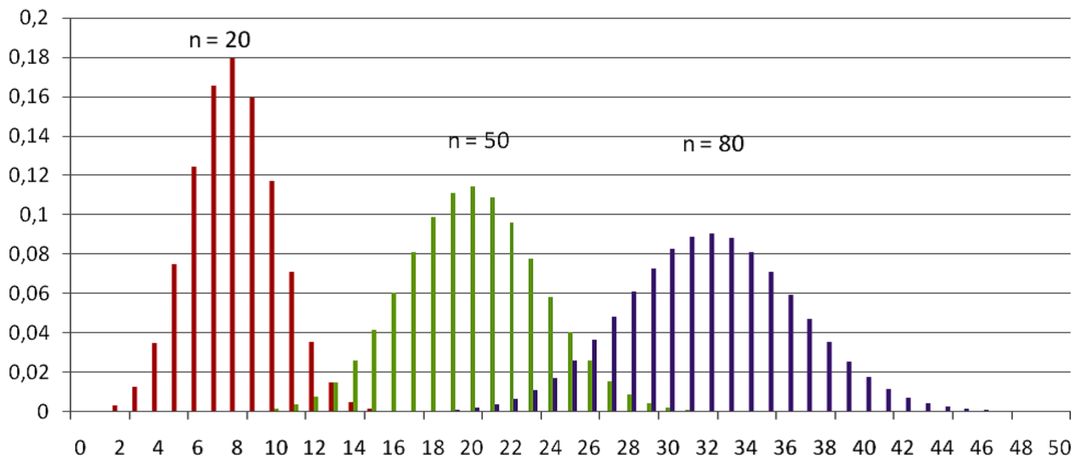
Aufgabe 6: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung (Binomialverteilung)

a) **Bestimme** für eine binomialverteilte Zufallsvariable X mit n = 100 und p = 0,2 den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ.

b) Die Zufallsgröße Y sei binomialverteilt mit dem Parameter n = 100. Y habe die Varianz V(Y) = 9.

Berechne die Trefferwahrscheinlichkeit p und mögliche Erwartungswerte μ.

c) Die Grafik zeigt die Säulendiagramme dreier Binomialverteilungen. Bei allen ist p = 0,4. Welche Verteilung hat die größte, welche die kleinste Standardabweichung? **Begründe** Deine Antwort.



Aufgaben unter Berücksichtigung von Hilfsmitteln

Aufgabe 7: Multiple-Choice-Test

Bei einem Multiple-Choice-Test werden n Aufgaben mit jeweils vier Antworten zur Auswahl gestellt. Von den vier Antworten ist genau eine Antwort richtig. Die Fragen befassen sich mit einem begrenzten Stoffgebiet.

a) Der Bewerber A hat bezüglich des Stoffgebietes einen Kenntnisstand von 70 %.

   Erkläre, unter welche Annahmen man den Test als n-stufige Bernoulli-Kette behandeln kann.

b) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, dass …

   (1) er mindestens 60 % der Fragen richtig beantwortet, wenn der Test aus 20 Fragen besteht.
   (2) sich sein Testergebnis um höchstens 5 Antworten vom erwarteten unterscheidet.

c) **Bestimme** die Wahrscheinlichkeit, dass ein gut trainierter Bewerber B (Kenntnisstand 80 %) …

   (1) von 10 Fragen, die ersten 8 richtig beantwortet und die letzten beiden falsch.
   (2) von 10 Fragen 8 richtig beantwortet.

d) Ein dritter Bewerber C beantwortet mit einer Wahrscheinlichkeit von **mindestens** 90 % von 20 Fragen **mindestens** 15 richtig.

   Ermittle, welchen Kenntnisstand der Bewerbers C **mindestens** besitzt.

e) **Untersuche**, wie viele der 20 Fragen ein vierter Bewerber D mit einem Kenntnisstand von 90 % mit größter Wahrscheinlichkeit beantwortet.

f) **Bestimme** die Zahl der Fragen, die ein Bewerber E mit einem Wissensstand von 75 % gestellt bekommen muss, damit er mindestens 10 Fragen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % beantwortet.

g) Es stellt sich heraus, dass 80 % der Bewerber den Test bestehen. Die Bewerber wurden danach alle noch weiter beobachtet. Von den Bewerbern, die den Test bestanden haben, bewährten sich auch 80 % weiterhin. Von denen, die den Test nicht bestanden haben, bewährten sich immerhin noch 20 % in der Folgezeit.

   Berechne den Anteil der Bewerber, die sich bewährt haben. [Tipp: Vierfeldertafel]

h) Unser anfangs genannter Bewerber A kommt in die nähere Auswahl. Er hat dabei noch einen weiteren Test mit nun 60 Fragen zu beantworten, wobei jede Frage von der bewertenden Personalchefin mit einem Schwierigkeitsgrad von 0,6 eingestuft wird. Leider kann sie nur 75 % der verbleibenden Bewerber einstellen, und zwar die mit den besten Testergebnissen bei diesem letzten Test.

   Untersuche, wie viele richtige Antworten sie verlangen muss. (LK)

i) Die Daten des dritten Tests werden ausgewertet. Die Personalchefin möchte nun wissen, wie groß die Abweichung vom durchschnittlich zu erwartenden Ergebnis maximal sein darf, damit keine signifikante Abweichung vom Erwartungswert vorliegt und der angenommene Schwierigkeitsgrad bestätigt wird.

   Beantworte die Fragestellung der Personalchefin mithilfe der 2σ-Regel. (LK)

ABITUR 2017 Aufgabe 8: Glutenunverträglichkeit[60]

In Deutschland liegt bei 1 % der Bevölkerung eine Glutenunverträglichkeit vor. Die betroffenen Personen reagieren auf den Verzehr von bestimmten Getreidesorten mit körperlichen Beschwerden. Ob eine Glutenunverträglichkeit vorliegt oder nicht, kann mithilfe eines Schnelltests diagnostiziert werden. Zeigt das Ergebnis dieses Tests die Glutenunverträglichkeit an, so bezeichnet man es als positiv.

a) Liegt bei einer Person eine Glutenunverträglichkeit vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % positiv. Liegt bei einer Person keine Glutenunverträglichkeit vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis dennoch positiv ist, 4 %. Bei einer Person, die aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählt wurde, wird der Test durchgeführt.

(1) *Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm.*

(2) *Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:*

A: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor und das Testergebnis ist positiv.“
B: „Das Testergebnis ist negativ.“

(3) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, wenn das Testergebnis positiv ist.*

b) Im Rahmen einer Studie sollen aus der Bevölkerung Deutschlands 20000 Personen zufällig ausgewählt werden. Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt ($p = 0{,}01$) und gibt die Anzahl der ausgewählten Personen an, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt.

(1) *Erläutern Sie, warum das Modell der binomialverteilten Zufallsgröße zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten hier geeignet ist.* (LK)

(2) *Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:*

E_1: Bei genau 190 Personen liegt eine Glutenunverträglichkeit vor.
E_2: Bei mehr als 19800 Personen liegt **keine** Glutenunverträglichkeit vor.
E_3: Mindestens 240, aber höchstens 2400 Personen besitzen eine Glutenunverträglichkeit.

(3) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Personen, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, um mehr als 10 % vom Erwartungswert von X abweicht.*

c) Der Test wird mithilfe eines Teststreifens durchgeführt, auf dem eine Substanz als Indikator aufgebracht ist. Ist die Indikatormenge auf einem Teststreifen zu gering, so ist dieser unbrauchbar. Der Hersteller der Teststreifen verfolgt das Ziel, dass höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, und führt deshalb regelmäßig eine Qualitätskontrolle durch. Dazu wird der laufenden Produktion eine Stichprobe von 100 Teststreifen entnommen. Nur wenn sich darunter mindestens 16 unbrauchbare Teststreifen befinden, entscheidet man sich dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.

(1) *Beschreiben Sie, welche Fehlentscheidungen bei dieser Qualitätskontrolle auftreten können.* (LK)

(2) *Bestimmen Sie, wie hoch die Fehlerwahrscheinlichkeit höchstens ist, dass der Hersteller sich aufgrund seiner Entscheidungsregel irrtümlich um eine Verbesserung des Herstellungsverfahrens bemüht.* [Kontrolllösung: 3,99 %]

(3) Der Hersteller entschließt sich, die Kontrolle künftig mit einer größeren Stichprobe von 200 Teststreifen durchzuführen. Die Wahrscheinlichkeit für eine unnötige Verbesserung des

[60] Modifiziert nach GK und LK HT B5 Zentralabitur NRW 2017

Herstellungsverfahrens soll durch diese Änderung nur noch ein Drittel der ursprünglichen Wahrscheinlichkeit für eine unnötige Verbesserung des Verfahrens betragen.

Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen, ab der man sich dafür entscheidet, das Herstellungsverfahren zu verbessern, nun mindestens sein muss. (LK)

(4) Durch einen Maschinendefekt sind statt 10 % nun 18 % der Teststreifen unbrauchbar.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Defekt bei Beibehaltung der Entscheidungsregel fälschlicherweise nicht bemerkt wird.

d) Im Rahmen der Qualitätskontrolle wird u. a. die Indikatormenge auf den einzelnen Teststreifen gemessen. Tabelle 1 zeigt die absoluten Häufigkeiten der aufgetretenen Mengen bei einer Stichprobe von 100 Teststreifen.

Indikatormenge in mg	15	16	17	18	19	20
Anzahl der Teststreifen	4	9	10	48	18	11

(1) *Bestimmen Sie für diese Häufigkeitsverteilung das arithmetische Mittel und die Standardabweichung.*

(2) Bei einer früheren Qualitätskontrolle lag das arithmetische Mittel bei 18 mg und die Standardabweichung befand sich bei 4,3 mg.

Erläutern Sie unter Berücksichtigung Ihrer Ergebnisse aus (1), welche Rückschlüsse sich aus diesen Kenngrößen auf die Qualitätsentwicklung des Produktionsverfahrens ziehen lassen.

Aufgabe 9: Lotto 6 aus 49

Berechne die Wahrscheinlichkeit im Lotto „6 aus 49“, …

a) 6 Richtige,

b) 4 Richtige (LK),

c) keine richtige Zahl zu tippen (LK).

4.7 Lösungen

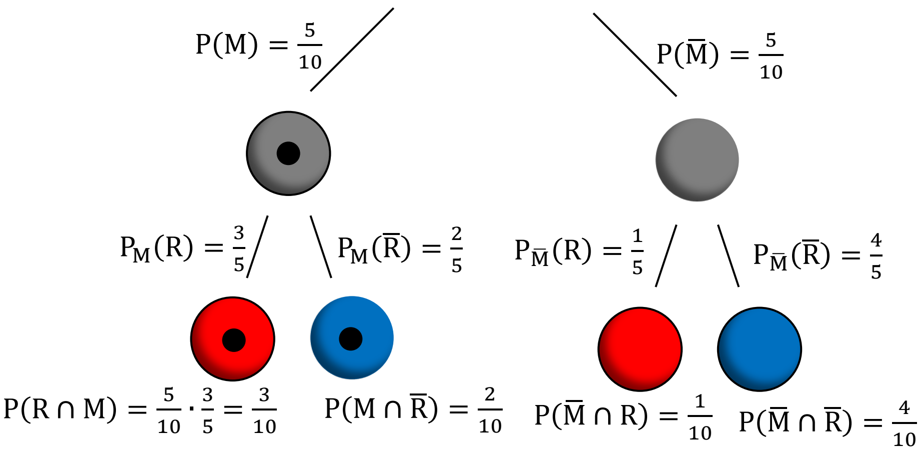
4.1 Noch fit? – Stochastisches Grundwissen aus der E-Phase

Aufgabe 3

a)

$P(M) = \frac{5}{10} = 50\ \%$, $P(\overline{M}) = \frac{5}{10} = 50\ \%$, $P_R(M) = \frac{3}{4} = 75\ \%$, $P_R(\overline{M}) = \frac{1}{4} = 25\ \%$, $P_{\overline{R}}(M) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,
$P_{\overline{R}}(\overline{M}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P_M(R) = \frac{3}{5} = 60\ \%$, $P_M(\overline{R}) = \frac{2}{5} = 40\ \%$, $P_{\overline{M}}(R) = \frac{1}{5} = 20\ \%$, $P_{\overline{M}}(\overline{R}) = \frac{4}{5} = 80\ \%$,
$P(R) = \frac{4}{10} = 40\ \%$, $P(\overline{R}) = \frac{6}{10} = 60\ \%$, $P(R \cap M) = \frac{3}{10} = 30\ \%$, $P(R \cap \overline{M}) = \frac{1}{10} = 10\ \%$,
$P(\overline{R} \cap M) = \frac{2}{10} = 20\ \%$, $P(\overline{R} \cap \overline{M}) = \frac{4}{10} = 40\ \%$

b)



c)

Sensitivität: $P_{\text{Infiziert}}(+) = \frac{P(\text{Infiziert} \cap +)}{P(\text{Infiziert})} = \frac{0{,}000999}{0{,}001} = 99{,}9\%$

Spezifität: $P_{\text{Nicht infiziert}}(-) = \frac{P(\text{Nicht infiziert} \cap -)}{P(\text{Nicht infiziert})} = \frac{0{,}997002}{0{,}999} = 99{,}8\%$

Aufgabe 4

a)

	A (Stürmer)	$\overline{A}$ (kein Stürmer)	
Startelf (B)	0,40	0,40	**0,8**
Einwechselspieler ($\overline{B}$)	0,15	0,25 · 0,2 = 0,05	0,2
	0,55	0,45	

b)

Der Torschütze ist …
(1) Stürmer der Startelf: $P(A \cap B) = 0{,}40$
(2) weder Stürmer noch Einwechselspieler: $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}40$
(3) Stürmer oder Einwechselspieler: : $P(A \cup \overline{B}) = 0{,}40 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}60$

(4) kein Stürmer: $P(\overline{A}) = 0{,}45$
(5) entweder Stürmer oder Einwechselspieler: $P\left((\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\right) = 0{,}40 + 0{,}05 = 0{,}45$
(6) nicht gleichzeitig Einwechselspieler und Nichtstürmer: $P\left(\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}\right) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

c)

Wahrscheinlichkeit, dass …
(1) unter den Stürmern ein Einwechselspieler getroffen hat: $P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{0{,}15}{0{,}55} = \frac{3}{11} \approx 27{,}3\ \%$.
(2) unter den Einwechselspielern ein Nichtstürmer getroffen hat: $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}05}{0{,}20} = \frac{1}{4} \approx 25\ \%$
(3) unter den Startspielern ein Stürmer getroffen hat: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}40}{0{,}80} = 0{,}50 = 50\ \%$.
(4) unter den Nichtstürmern ein Startspieler getroffen hat: $P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}40}{0{,}45} = \frac{8}{9} = 88{,}9\ \%$

Aufgabe 5

a)

$P(A) = \frac{5}{36}$ $(1 + 5 = 5 + 1 = 2 + 4 = 4 + 2 = 3 + 3 = 6)$;
$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $(1 - 1 = 2 - 2 = 3 - 3 = 4 - 4 = 5 - 5 = 6 - 6 = 0)$;
$P(A \cap B)$ = P(Augensumme ist 6 **und** die Differenz ist Null) = P(beide Würfel zeigen eine 3)
$= \frac{1}{36} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{216}$. Daher sind beide Ereignisse stochastisch abhängig.

b)

$P(A) = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{36-8}{36} = \frac{7}{9}$ $(1 + 1, 1 + 2 = 2 + 1, 2 + 2, 2 + 3 = 3 + 2, 1 + 3 = 3 + 1$ sind kleiner als 6)
$P(A \cap B) = P((3/1)$ und $(3/2)) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{7}{63}$. A und B sind stochastisch abhängig.

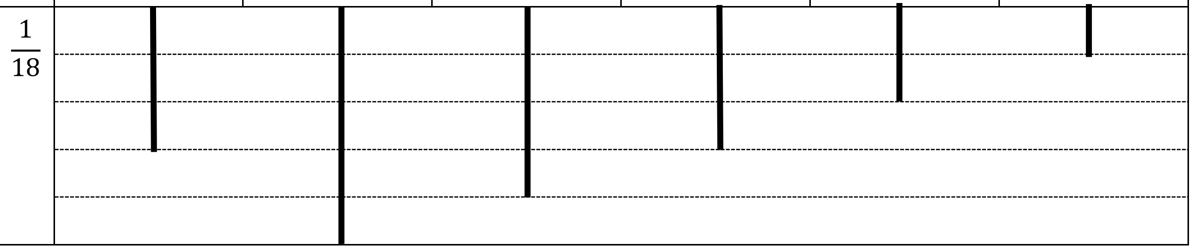
c)

$P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B)$. A und B sind stochastisch unabhängig.

4.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung und Histogramme

Aufgabe 1

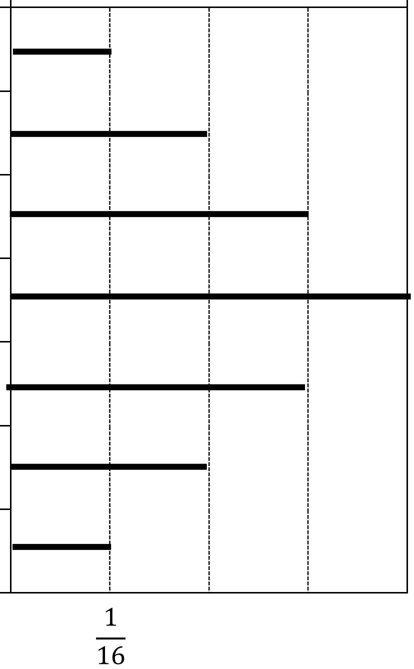
x_i	0	1	2	3	4	5
$X = x_i$	(1/1) (2/2) (3/3) (4/4) (5/5) (6/6)	(1/2), (2/1) (2/3), (3/2) (3/4), (4/3) (4/5), (5/4) (5/6), (6/5)	(1/3), (3/1) (2/4), (4/2) (3/5), (5/3) (4/6), (6/4)	(1/4), (4/1) (2/5), (5/2) (3/6), (6/3)	(1/5), (5/1) (2/6), (6/2)	(1/6), (6/1)
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \frac{3}{18}$	$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$	$\frac{8}{36} = \frac{2}{9} = \frac{4}{18}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \frac{3}{18}$	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9} = \frac{2}{18}$	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
Histogramm						



Der Erwartungswert beträgt $\mu = E(X) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{9} + 5 \cdot \frac{1}{18} = \frac{35}{18} \approx 1{,}94$

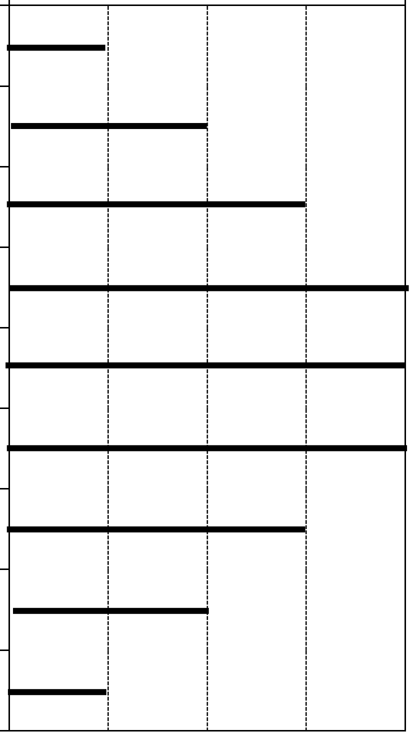
2a)

x_i	$X = x_i$: zugehörige Ergebnisse	$P(X = x_i)$	Histogramm
2	(1/1)	$\frac{1}{16}$	
3	(1/2), (2/1)	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	
4	(1/3), (3/1), (2/2)	$\frac{3}{16}$	
5	(1/4), (4/1), (2/3), (3/2)	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	
6	(2/4), (4/2), (3/3)	$\frac{3}{16}$	
7	(3/4), (4/3)	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	
8	(4/4)	$\frac{1}{16}$	



2b)

x_i	$X = x_i$: zugehörige Ergebnisse	$P(X = x_i)$	Histogramm
2	(1/1)	$\frac{1}{24}$	
3	(1/2), (2/1)	$\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$	
4	(1/3), (3/1), (2/2)	$\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$	
5	(1/4), (4/1), (2/3), (3/2)	$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$	
6	(1/5), (2/4), (4/2), (3/3)	$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$	
7	(1/6), (2/5), (3/4), (4/3)	$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$	
8	(2/6), (3/5), (4/4)	$\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$	
9	(3/6), (4/5)	$\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$	
10	(4/6)	$\frac{1}{24}$	



$\frac{1}{24}$

2c)

x_i	Oktaeder und Tetraeder		Zwei Hexaeder	
	$X = x_i$	$P(X = x_i)$	$X = x_i$	$P(X = x_i)$
2	(1/1)	$\frac{1}{32}$	(1/1)	$\frac{1}{36}$
3	(2/1), (1/2)	$\frac{1}{16}$	(2/1), (1/2)	$\frac{1}{18}$
4	(3/1), (2/2), (1/3)	$\frac{3}{32}$	(3/1), (2/2), (1/3)	$\frac{1}{12}$
5	(4/1), (3/2), (2/3), (1/4)	$\frac{1}{8}$	(4/1), (3/2), (2/3), (1/4)	$\frac{1}{9}$
6	(5/1), (4/2), (3/3), (2/4)	$\frac{1}{8}$	(5/1), (4/2), (3/3), (2/4), (1/5)	$\frac{5}{36}$
7	(6/1), (5/2), (4/3), (3/4)	$\frac{1}{8}$	(6/1), (5/2), (4/3), (3/4), (2/5), (1/6)	$\frac{1}{6}$
8	(7/1), (6/2), (5/3), (4/4)	$\frac{1}{8}$	(6/2), (5/3), (4/4), (3/5), (2/6)	$\frac{5}{36}$
9	(8/1), (7/2), (6/3), (5/4)	$\frac{1}{8}$	(6/3), (5/4), (4/5), (3/6)	$\frac{1}{9}$
10	(8/2), (7/3), (6/4)	$\frac{3}{32}$	(6/4), (5/5), (4/6)	$\frac{1}{12}$
11	(8/3), (7/4)	$\frac{1}{16}$	(6/5), (5/6)	$\frac{1}{18}$
12	(8/4)	$\frac{1}{32}$	(6/6)	$\frac{1}{36}$

Eine Häufigkeitsverteilung beim zweifachen Hexaeder-Wurf nimmt zur Mitte hin gleichmäßig zu und von dort gleichmäßig ab. Beim Wurf mit einem Oktaeder und Hexaeder gibt es ein breites mittleres Plateau.

2d)

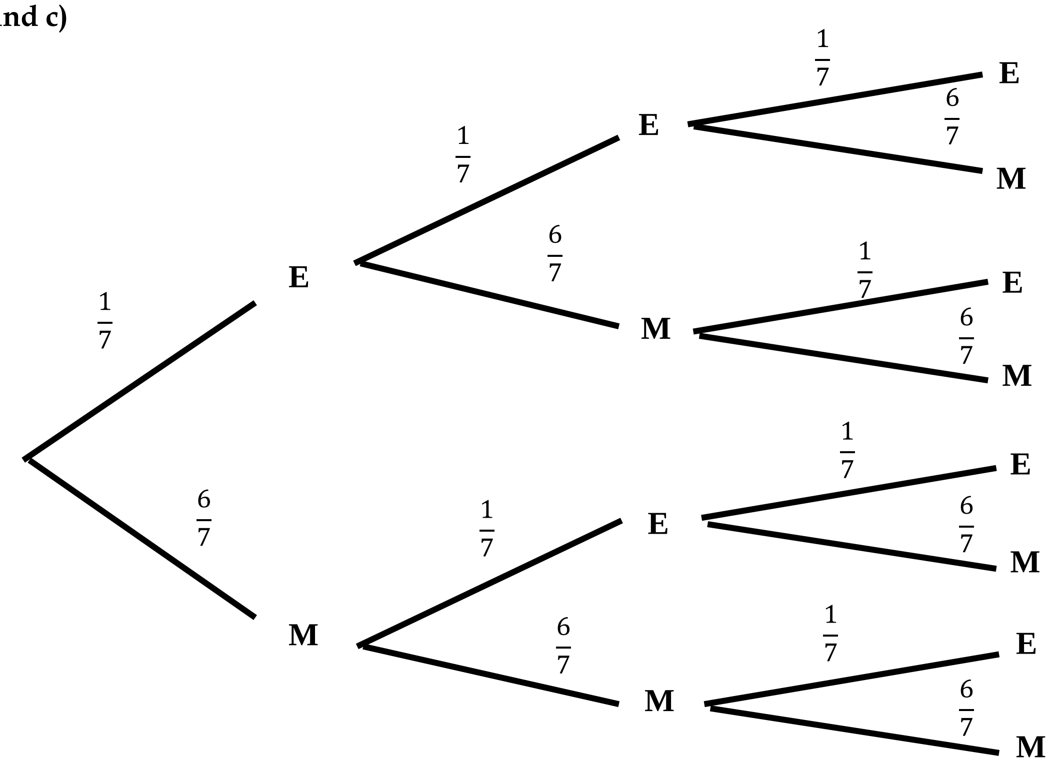
Versuch	Erwartungswert μ
2-facher Wurf eines Tetraeders	5
Wurf eines Tetraeders und Hexaeders	6
Wurf eines Oktaeders und Tetraeders	7
Wurf zweier Hexaeder	7

Die Erwartungswerte lassen sich mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnen oder mit folgender Überlegung: Beim Tetraeder erhält man beim Werfen eine Würfels im Durchschnitt langfristig (1 +2 + 3 + 4) : 4 = 2,5, beim Hexaeder (1 + 2+ …_+ 6) : 6 = 3,5 und beim Werfen des Oktaeders (1 + 2 + …+ 8) : 8 = 4,5. Durch Addition der beiden Prognosewerte erhält man die Erwartungswerte der obigen Tabelle.

4.3 Binomialverteilung

Aufgabe 1

a) und c)



b) Anzahl n der Schokoüberraschungskugeln = 2

Erfolgsanzahl k	X = k: mögliche Ergebnisse mit k Treffern	Wahrscheinlichkeit P(X = k)
0	(M/M)	$\left(\frac{6}{7}\right)^2 = 1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^0 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^2 \approx 73{,}47\,\%$
1	(E/M), (M/E)	$2 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} = 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^1 \approx 24{,}48\,\%$
2	(E/E)	$\left(\frac{1}{7}\right)^2 = 1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^0 \approx 2{,}04\,\%$

c) n = 3

K	X = k	P(X = k)
0	(M/M/M)	$\left(\frac{6}{7}\right)^3 = 1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^0 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^3 \approx 62{,}67\,\%$
1	(E/M/M), (M/E/M), (M/M/E)	$3 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} = 3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^2 \approx 31{,}48\,\%$
2	(E/E/M), (E/M/E), (M/E/E)	$3 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} = 3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^1 \approx 5{,}24\,\%$
3	(E/E/E)	$\left(\frac{1}{7}\right)^3 = 1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^0 \approx 0{,}29\,\%$

d)

K	X = k	P(X = k)
0	(M/M/M/M)	$\left(\frac{6}{7}\right)^4 = 1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^0 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^4 \approx 53{,}97\ \%$
1	(E/M/M/M), (M/E/M/M), (M/M/E/M), (M/M/M/E)	$4 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} = 4 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^3 \approx 35{,}98\ \%$
2	(E/E/M/M), (E/M/E/M), (E/M/M/E) (M/E/E/M), (M/E/M/E), (M/M/E/E)	$6 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} = 3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^2 \approx 8{,}99\ \%$
3	(M/E/E/E), (E/M/E/E), (E/E/M/E), (E/E/E/M)	$4 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} = 4 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^1 \approx 1\ \%$
4	(E/E/E/E)	$\left(\frac{1}{7}\right)^4 = 1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^0 \approx 0{,}04\ \%$

e)

$$P(X = k) = \text{Anzahl der Pfade mit k Erfolgen} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

f)

N	Erwartungswert μ
1	$0 \cdot \frac{6}{7} + 1 \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$
2	$\frac{2}{7}$
3	$\frac{3}{7}$
4	$\frac{4}{7}$
N	$\frac{n}{7}$

Für eine Schokokugel ist der Erwartungswert offenbar $\frac{1}{7}$. Bei sieben Kugeln wird man durchschnittlich 1 Erfolg erwarten können. Daher ist der Erwartungswert für n Kugeln n-mal so groß wie für 1 Kugel. Es gilt der wichtige Satz (vgl. Arbeitsblatt 12):

Sei X die Zufallsgröße: „*Trefferanzahl k bei n Versuchen mit der Trefferwahrscheinlichkeit p*“, dann gilt für den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$.

Aufgabe 2

a)

- X: *„Anzahl der Treffer beim Elfmeterschießen bei n Spielen mit Trefferwahrscheinlichkeit p"*
- Y: *„Anzahl der HIV-Positiv-Erkrankungen in Deutschland bei einer Erkrankungswahrscheinlichkeit p"*
- *Z: „Anzahl der Erfolge beim Lotto 6 aus 49"*

b)

- *Z: „Anzahl der Erfolge beim Lotto 6 aus 49"*
- *A: „Anzahl der Treffer von der Freiwurflinie vor und nach einer Wurftrainingsphase"*
- *B: „Anzahl der Verspätungen vor und nach einem Fernsehbericht über die Pünktlichkeit der Bahn."*

c)

Stand nach Kauf von 3 Kugeln	P(X = 0) = $1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^0 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^3$	P(X = 1) = $3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^2$	P(X = 2) = $3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^1$	P(X = 3) = $1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^0$	
Stand nach Kauf von 4 Kugeln	P(X = 0) = $1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^0 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^4$	P(X = 1) = $4 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^3$	P(X = 2) = $6 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^2$	P(X = 3) = $4 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^1$	P(X = 4) = $1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^0$

d)

Die Wahrscheinlichkeit der unteren Zeile setzt sich zusammen aus dem $\frac{1}{7}$- und oder $\frac{6}{7}$-fachen der oberen Wahrscheinlichkeiten. Treffen zwei Pfeile auf einen Kasten, werden dort die entsprechenden um den Faktor $\frac{1}{7}$ bzw. $\frac{6}{7}$ multiplizierten Ausgangswahrscheinlichkeiten addiert.

e)

P(X = 0) = $1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^0 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^5$	P(X = 1) = $5 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^4$	P(X = 2) = $10 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^3$	P(X = 3) = $10 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^2$	P(X = 4) = $5 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^1$	P(X = 5) = $1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^0$

f)

Die Summe der Exponenten muss stets 5 ergeben. Die Summe der Pfade ergibt $2^5 = 32$.

g) $\binom{10}{5} = 252;\ \binom{6}{4} = 15;\ \binom{10}{10} = 1;\ \binom{10}{1} = 10;\ \binom{100}{99} = 100;\ \frac{100!}{99!} = 100$

h)

Will man 3 Frauen und 2 Männer ohne Beachtung der Individualität der Personen auf 5 Stühle verteilen, überlegt man sich zuerst, wie viele Möglichkeiten es unter Beachtung der Individualität es gibt 5 Personen auf 5 Stühle zu verteilen. Dies sind 5! = 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 120 Möglichkeiten. Achtet man nicht mehr auf die Individualität der Frauen, können jeweils 3! = 3 · 2 · 1 = 6 Möglichkeiten für die Frauen zu einer Möglichkeit zusammengefasst werden. Man erhält 120 : 6 = 20 Möglichkeiten. Unter diesen Möglichkeiten können bei Nichtbeachtung der Individualität der Männer 2! = 2 · 1 = 2 erneut zusammengefasst werden. Man erhält insgesamt 20 : 2 = 10 Möglichkeiten. Es gilt:

$$\binom{5}{3} = \frac{\text{Möglichkeitsanzahl,5 Personen auf 5 Stühle zu verteilen}}{(\text{Möglichkeitsanzahl,3 Frauen auf 3 Stühle zu verteilen})\cdot(\text{Möglichkeitsanzahl,2 Männer auf zwei Stühle zu verteilen})}$$
$$= \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \frac{120}{6\cdot 2} = 10$$

Alternative Überlegungen: Unter Beachtung der Individualität gibt es 5 · 4 · 3 = 60 Möglichkeiten, 3 Frauen auf 5 Stühle zu verteilen. Achtet man nun nicht auf die Individualität, können 3 · 2 · 1 = 6 Möglichkeiten zu einer Möglichkeit zusammengefasst werden. So ergeben sich 60 : 6 = 10 Möglichkeiten. Es gilt:

$$\binom{5}{3} = \frac{\text{Möglichkeitsanzahl,3 Frauen unter Beachtung der Individualität auf 5 Stühle zu verteilen}}{\text{Möglichkeitsanzahl,3 Frauen auf 3 Stühle zu verteilen}} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

i)

Die Anzahl der Pfade $\binom{n}{k}$, die zu Trefferzahl k bei n Versuchen führt, lässt sich ablesen als Eintrag im Pascalschen Dreieck, indem man in der n-ten Zeile den k-ten Eintrag von links sucht. Allgemein gilt das Schema wie bereits oben in den Aufgabenteilen c) und d) exemplarisch beschrieben:

P (X = k – 1; n – 1 Versuche) · p + (X = k; n – 1 Versuche) · (1 – p) = P(X = k; n Versuche)

Dies muss rechnerisch nachgewiesen werden:

P_{n-1} (X = k - 1) · p + P_{n-1} (X = k - 1) · (1 – p)

$$= \binom{n-1}{k-1}\cdot p^{k-1}\cdot(1-p)^{n-k}\cdot p + \binom{n-1}{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{n-1-k}\cdot(1-p)$$

$$= \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right]\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{n-k}$$

Denn es gilt:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!\cdot k}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{(n-1)!\cdot(n-k)}{k!\cdot(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\cdot k + (n-1)!\cdot(n-k)}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{(n-1)!\cdot k + (n-1)!\cdot n - (n-1)!\cdot k}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-1)!} = \binom{n}{k}$$

Aufgabe 3

Auslastungsmodell

a) In einem Drittel der Arbeitszeit wird eine Maschine benötigt.

b) Für einen Mitarbeiter handelt es sich um einen Bernoulli-Versuch mit der Maschinennutzungswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$, da er entweder eine Maschine nutzt oder nicht. Da für jeden weiteren Mitarbeiter die entsprechende Maschinennutzungswahrscheinlichkeit unverändert bei $p = \frac{1}{3}$ bleibt, erhält man bei fünf Mitarbeitern eine Bernoulli-Kette der Länge 5.

c) $P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \approx 13{,}17\,\%$ $\qquad$ $P(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 32{,}92\,\%$

d) $P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 32{,}92\,\%$ $\qquad$ $P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 16{,}46\,\%$

$P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \approx 4{,}12\,\%$ $\qquad$ $P(X = 5) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \approx 0{,}41\,\%$

e) Berechne die kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(X > k)$ mit $k = 2, 3, 4$:

$P(X > 2) = 16{,}46\,\% + 4{,}12\,\% + 0{,}41\,\% = 20{,}99\,\%$ (Wenn drei Arbeiter zu einem bestimmten Zeitpunkt an einer Maschine sind, reichen zwei Maschinen nicht mehr aus. Es werden mindestens drei Maschinen benötigt.)

$P(X > 3) = 4{,}12\,\% + 0{,}41\,\% = 4{,}53\,\%$ (Wenn vier Arbeiter zu einem bestimmten Zeitpunkt an einer Maschine sind, reichen drei Maschinen nicht mehr aus. Es werden mindestens vier Maschinen benötigt.)

$P(X > 4) = 0{,}41\,\%$

Bei zwei Maschinen liegt die Wartezeit bei knapp 21 %, bei drei Maschinen sinkt sie unter 5 % und bei vier Maschinen unter 1 %.

f) Die Anschaffung einer weiteren Maschine macht Sinn, da beim Kauf einer dritten Maschine die Wahrscheinlichkeit einer Wartezeit um mehr als 16 % sinkt, während die Wahrscheinlichkeit bei der Anschaffung einer vierten Maschine nur noch um weitere knapp 5 % verringert wird.

Das Kugel-Fächer-Modell

a) Es handelt sich um einen Bernoulli-Versuch der Länge 150 mit der Geburtstagswahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{365}$. Die Zufallsgröße X lautet: X: *„Anzahl der Geburtstagskinder an einem beliebigen Tag“*. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten lassen sich mithilfe der Bernoulli-Formel berechnen:
$P(X = 0) = \binom{150}{0} \cdot \left(\frac{1}{365}\right)^0 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{150} \approx 66{,}26\ \%$ $\quad P(X = 1) = \binom{150}{1} \cdot \left(\frac{1}{365}\right)^1 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{149} \approx 27{,}31\ \%$
$P(X = 2) = \binom{150}{2} \cdot \left(\frac{1}{365}\right)^2 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{148} \approx 5{,}59\ \%$

b) Um herauszufinden, wie oft im Jahr unter 150 Personen an einem beliebigen Tag keine Person Geburtstag hat, muss die Wahrscheinlichkeit, dass an einem beliebigen Tag niemand der 150 Personen Geburtstag hat, mit der Anzahl der Tage eines Jahres (365) multipliziert werden. So erhält man die Anzahl der Tage ohne Geburtstagskind. An $P(X = 0) \cdot 365 \approx 0{,}6626 \cdot 365 \approx 242$ Tagen eines Jahres hat im Schnitt also *keine* Person Geburtstag. An $P(X = 1) \cdot 365 \approx 100$ Tagen hat im Schnitt *genau eine* Person Geburtstag. Daher hat an 365 – 242 – 100 = 23 Tagen im Schnitt eine Person mit *mindestens einer weiteren* Person Geburtstag.

c) Wie in Aufgabenteil a) handelt es sich um eine 150-stufigen Bernoulli-Kette mit der Trefferwahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{365}$. Gesucht ist die durchschnittliche Anzahl von Zahlen unter den Zahlen 1, 2, 3, …, 365, die nicht unter den 150 gezogenen ist. Dafür multipliziert man wie in Aufgabenteil b) die Bernoulli-Wahrscheinlichkeit $P(X = 0)$ (Wahrscheinlichkeit, dass keine der 150 Zahlen gezogen wird) mit 365 und erhält 241,85. Von 365 Zahlen kommen im Schnitt also 242 Zahlen *nicht* vor. Multipliziert man $P(X = 1)$ (Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl genau einmal vorkommt) mit 365, ergibt sich 99,68. Hier kann man sagen: Von 365 Zahlen kommen im Schnitt 100 Zahlen *genau einmal* vor. Daher kommen 365 – 242 – 100 = 23 Zahlen *mehr als einmal* vor.

d) Die Anzahl der Kugeln ist n = 150 und entspricht der Anzahl der erzeugten Zufallszahlen. Die Anzahl der Fächer beträgt f = 365 und entspricht den Zahlen 1, 2, 3, …, 365. Ferner sei k = 0, 1, …, 150 die Häufigkeit, mit der eine Kugel in einem bestimmten Fach landet. Dieser Parameter entspricht der absoluten Häufigkeit, mit der eine Zahl gezogen wird. Die Zufallsgröße lautet daher: *„Häufigkeit, mit der eine Kugel in einem Fach landet“*. Sie entspricht der Zufallsgröße: *„Häufigkeit, mit der eine Zahl gezogen wird“*. Aus der Sicht eines Faches beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine der 150 Kugeln (Zufallszahlen) in ihm abgelegt wird, $p = \frac{1}{365}$. Bei n = 150 Kugeln (Anzahl der Zufallszahlen) erhält man daher eine 150-stufige Bernoulli-Kette mit der Trefferwahrscheinlich $p = \frac{1}{365}$. Es ergibt sich allgemein für das Kugel-Fächer-Modell mit den Parametern Kugelanzahl (Anzahl der Zufallszahlen) n, Fächerbelegungszahl k (Häufigkeit, mit der eine Zahl gezogen wird) und Anzahl der Fächer f (Zahlen 1, 2, 3, …) mithilfe der Bernoulli-Formel: $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{f}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{f}\right)^{n-k}$.

e) Die Anzahl der Rosinen ist n = 100. Die Anzahl der Brötchen beträgt f = 6. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Rosine in einem bestimmten Brötchen landet beträgt daher $p = \frac{1}{6}$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei n = 100 Rosinen ein Brötchen ohne Rosinen ist. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht $P(X = 0) = \binom{100}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{100} \approx 0{,}000000012 = 0{,}0000012\ \%$. Für die weiteren zu untersuchenden Fälle gilt: $P(X = 5) \approx 0{,}00029 = 0{,}029\ \%$; $P(X = 20) \approx 10{,}65\ \%$; $P(X = 20) \approx 6{,}8\ \%$; $P(X \geq 16) \approx 61{,}23\ \%$; $P(10 \leq X \leq 20) \approx 82{,}68\ \%$.

Das Geburtstagsparadoxon

a) Bei beiden Fragestellungen handelt es sich um ein Bernoulli-Experiment, da es in beiden Versuchen nur zwei mögliche Ausgänge des Versuchs gibt (Geburtstagsproblem: Person hat mit einer anderen Person Geburtstag oder nicht / Würfelproblem: Würfel zeigt eine Augenzahl eines zweiten Würfels oder nicht)

Allerdings entsteht keine Bernoulli-Kette, da sich die Trefferwahrscheinlichkeit mit höherer Versuchszahl verändert. Z. B. wäre die Trefferwahrscheinlichkeit beim Geburtstagsproblem bei 367 Personen (unter Berücksichtigung des Schaltjahres) für die letzte Person 1, während die gleiche Wahrscheinlichkeit bei 2 Personen $\frac{1}{365}$ beträgt. Ebenso wird beim 7-stufigen Hexaeder-Wurf der siebte Wurf eine Trefferwahrscheinlichkeit von 1 haben, während die Trefferwahrscheinlichkeit des zweiten Wurfes $\frac{1}{6}$ beträgt.

b) Statt die Wahrscheinlichkeiten für alle Ergebnisse mit *„mindestens doppelt auftretender Augenzahl"* zu betrachten, bestimmt man die Wahrscheinlich des Gegenereignisses, das nur aus einem Ergebnis besteht, nämlich dem Ereignis, dass *„alle Augenzahlen ungleich"* sind. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich durch Subtraktion der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses von 100 % = 1.

$$\boxed{\text{eine Augenzahl}} \xrightarrow{\frac{5}{6}} \boxed{\text{zwei verschiedene Augenzahlen}} \xrightarrow{\frac{4}{6}} \boxed{\text{drei verschiedene Augenzahlen}} \xrightarrow{\frac{3}{6}} \boxed{\text{vier verschiedene Augenzahlen}}$$

P (*alle vier Würfel haben eine unterschiedliche Augenzahl*) = $= \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6^3} = \frac{5}{18} \approx 27{,}8\ \%$. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *„mindestens eine doppelt auftretende Augenzahl"* $1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18} \approx 72{,}2\ \%$.

c) Das hängt davon ab, wie die Auszahlung a im Verhältnis zum Einsatz für den Fall wäre, dass mindestens eine Augenzahl doppelt vorkommt. Für die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Zufallsgröße X: *„Auszahlung pro Spiel in €"* ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung für X:

K	*Alle 4 Augenzahlen ungleich*	*mindestens eine doppelt auftretende Augenzahl*
Auszahlung	0	A
P(X = k)	$\frac{5}{18}$	$\frac{13}{18}$

Im Falle des Einsatzes von 1 € müsste der Erwartungswert $\mu = E(X) = 0 \cdot \frac{5}{18} + a \cdot \frac{13}{18} = 1$ betragen, was bedeutet, dass die Auszahlung $a = \frac{18}{13} \approx 1{,}38$ €. Bei einer geringeren Auszahlung würde man nicht auf das Ereignis *„mindestens eine doppelt auftretende Augenzahl"* wetten.

d) P(*mindestens 2 Personen haben am gleichen Tag Geburtstag*) = 1 – P (*alle Personen haben an verschiedenen Tagen Geburtstag*) $= 1 - \frac{364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot \ldots \cdot 343}{365^{22}} = 1 - \frac{\binom{364}{22} \cdot 22!}{365^{22}} \approx 0{,}5073 = 50{,}73\ \%$.

e) (e.1) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass *eine Person mindestens zwei Preise* bekommt. Berechne zunächst die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass *jede Person höchstens einen Preis* erhält. Sie beträgt $\frac{24 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 16}{25^9} = \frac{\binom{24}{9} \cdot 9!}{25^9} \approx 0{,}1244 = 12{,}44\ \%$. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass *eine Person mindestens zwei Preise* erhält etwa 1 – 12,44 % = 87, 46 %.

(e.2) Auch hier betrachtet man zunächst das Gegenereignis „*zehn unterschiedliche Zahlen in Folge*". Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $\frac{36 \cdot 35 \cdot \ldots \cdot 26}{37^9} = \frac{\binom{36}{9} \cdot 9!}{37^9} \approx 0{,}2629 = 26{,}29\ \%$. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis „mindestens eine doppelte Zahl" 73,71 %.

(e.3) P (*fünf unterschiedliche Motive*) = $\frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{40^4} \approx 77{,}11\ \%$. Daher P (*mindestens ein doppeltes Motiv*) = 1 – 77,11 % = 22,89 %.

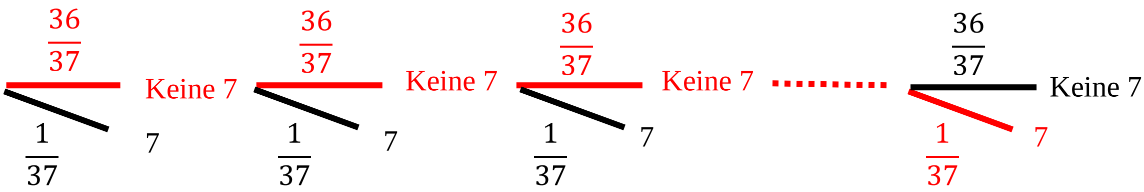
(e.4) P (*mindestens zwei Druckfehler auf einer Seite*) = 1 – P (*höchstens ein Druckfehler pro Seite*) = $1 - \frac{99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot \ldots \cdot 91}{100^9} = 1 - \frac{\binom{99}{9} \cdot 9!}{100^9} \approx 1 - 0{,}6282 = 37{,}18\ \%$.

(e.5) P (*mindestens zwei Rosinen pro Brötchen*) = 1 – P (*höchstens 1 Rosine pro Brötchen*) = $1 - \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 31}{50^{19}} = 1 - \frac{\binom{49}{19} \cdot 19!}{50^{19}} \approx 1 - 0{,}0102 = 98{,}80\ \%$.

(e.6) P (*Jede Ente wird von höchstens einem Jäger abgeschossen*) = $\frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{20^4} = 58{,}14\ \%$. Das Gegenereignis wird hier nicht benötigt. Man geht davon aus, dass die Jäger auf jeden Fall treffen. Trifft der erste Jäger eine Ente, bleiben für den zweiten nur noch 19 Enten übrig, wenn er nicht die gleiche Ente treffen will. Für den dritten Jäger bleiben 18, für den vierten Jäger 17 und für den fünften Jäger 16 Enten übrig, wenn jeweils eine andere Ente getroffen werden soll. Da alle gleichzeitig und unabhängig voneinander schießen haben alle fünf Jäger 20 Enten zur Auswahl.

Warten auf Erfolg

a) Aus dem Baumdiagramm kann man ablesen: Für die Zufallsgröße X: *„Anzahl k der notwendigen Runden, bis die Kugel auf Feld ‚7' liegen bleibt"*, gilt: $P(X = k) = \frac{1}{37} \cdot \left(\frac{36}{37}\right)^{k-1}$.



b) Dass die Kugel keinmal in k Runden auf Feld „7" liegen bleibt, bedeutet: lauter Misserfolge in k Runden. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt: $P(X > k) = \left(\frac{36}{37}\right)^k$ (Die Anzahl der notwendigen Runden ist größer als k)

c) Lösung über das Gegenereignis: Sei X die Anzahl der Erfolge in n Runden und die Trefferwahrscheinlichkeit $p = \left(\frac{1}{37}\right)$ und der Nichttrefferwahrscheinlichkeit $q = \left(\frac{36}{37}\right)$ Wenn $P(X \geq 1) \geq 0{,}95$ sein soll, ist dies gleichbedeutend mit der Ungleichung $P(X = 0) \leq 0{,}05$. Die Wahrscheinlichkeit, keinen Treffer in n Versuchen zu erhalten, lässt sich berechnen durch $\left(\frac{36}{37}\right)^n$ berechnen. Daher ergibt sich die Ungleichung $\left(\frac{36}{37}\right)^n \leq 0{,}05$. Durch Logarithmieren erhält man (Hinweis zum GTR: MATH → logab): $\log_{\frac{36}{37}}\left(\left(\frac{36}{37}\right)^n\right) \leq \log_{\frac{36}{37}}(0{,}05) \Leftrightarrow n \geq \log_{\frac{36}{37}}(0{,}05) \approx 109{,}34$ (Der Logarithmus zur Basis $\frac{36}{37} < 1$ ist eine streng monoton fallende Funktion. Daher dreht sich bei der Ungleichung nach dem Logarithmieren das Zeichen „≤" um.). Auch Ausprobieren führt zum Ziel:

n	50	100	125	**110**	**109**
$\left(\frac{36}{37}\right)^n$	0,2541	0,0646	0,0325	**0,0491**	**0,0505**

Wenn man also mindestens 110 Runden beim Roulette-Spiel durchführt, wird die Kugel mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens einmal im Feld „7" liegen bleiben.

Lösung über die kumulierte Wahrscheinlichkeit: Sei X die Anzahl der Erfolge in n Runden. Die Wahrscheinlichkeit für *„mindestens einen Erfolg in n Runden"* entspricht der kumulierten Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 1)$. Gesucht ist bei $k \geq 1$ die Zahl n, so dass $P(X \geq 1) \geq 0{,}95$. Mithilfe der Tabellenfunktion (Menu 7) kann durch Eingabe von $y = \text{BinomialCD}(1, x, x, \frac{1}{37})$ herausgefunden werden, dass x größer als 109 sein muss.

Aufgabe 4

(1) p = 0,3

$P(X = 14) = 0{,}1189$
$P(X \leq 18) = 0{,}8594$
$P(X < 13) = P(X \leq 12) = 0{,}2229$ (höchstens 12 Treffer)
$P(X \geq 17) = P(X = 17, 18, \ldots, 50) = P(X \geq 17) = P(17 \leq X \leq 50) = 0{,}3161$ (mindestens 17 Treffer)
$P(X > 21) = P(X = 22, 23, \ldots, 50) = P(X \geq 22) = P(12 \leq X \leq 50) = 0{,}0251$ (mindestens 22 Treffer)
$P(10 \leq X \leq 18) = 0{,}8192$ (mindestens 10 und höchstens 18 Treffer)

(2) p = 0,6

$P(X = 31) = 0{,}1109$ (genau 31)
$P(X \leq 33) = 0{,}8439$ (höchstens 33)
$P(X < 26) = P(X = 0, 1, 2, \ldots, 25) = 0{,}0978$ (höchstens 25)
$P(X \geq 27) = P(27 \leq X \leq 50) = 0{,}8438$ (mindestens 27)
$P(X > 31) = P(X \geq 32) = P(32 \leq X \leq 50) = 0{,}3356$ (mindestens 32)
$P(23 \leq X \leq 33) = 0{,}8279$ (mindestens 23 und höchstens 33)

(3) P(X) durch P(Y) ausdrücken

$P(X = 31) = \binom{50}{31} 0{,}6^{31}\, 0{,}4^{19} = \frac{50!}{31! \cdot 19!} 0{,}6^{31}\, 0{,}4^{19} = \frac{50!}{19! \cdot 31!} 0{,}4^{19} 0{,}6^{31} = \binom{50}{19} 0{,}4^{19} 0{,}6^{31} = P(Y = 19)$
$P(X \leq 33) = P(0, 1, \ldots, 33) = P(Y = 50, 49, \ldots, 17) = P(Y \geq 17)$
$P(X < 26) = P(X = 0, 1, 2, \ldots, 25) = P(Y = 50, 49, 48, \ldots, 25)$
$P(X \geq 27) = P(X = 27, 28, 29, \ldots 50) = P(Y = 23, 22, \ldots, 0) = P(Y \leq 23)$
$P(X > 31) = P(X \geq 32) = P(X = 32, 33, \ldots, 50) = P(Y = 18, 17, 16, \ldots, 0) = P(Y \leq 18)$
$P(23 \leq X \leq 33) = P(X = 23, 24, \ldots, 33) = P(Y = 27, 26, \ldots, 17) = P(17 \leq Y \leq 27)$

Aufgabe 5

Grundaufgabe 1
a) $P(X = 5) \approx 0{,}1789$
b) $P(X \geq 9) \approx 0{,}3759$ [$P(5 \leq X \leq 8) \approx 0{,}6178$]

Grundaufgabe 2
a) Erstelle mit dem GTR in MENU 1 über BinomialPD(10, 0.4) eine Liste für die singulären Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ mit $k = 0, 1, \ldots, 10$. Den Tabellenwerten entnimmt man den Höchstwert für $k = 4$, denn $P(X = 3) \approx 0{,}2150 < P(X = 4) \approx 0{,}2508 < P(X = 5) \approx 0{,}2007$.
b) Ansatz: Für welche k ist $P(X < k) = P(X \leq k - 1) \geq 0{,}95$. Lösung in MENU 7 (Tabellenfunktion): Man bestimmt für y = BinomialCD(x, 200, 0.02) die erste natürliche Zahl x (denke an SET und den Startwert 0, z. B. den Endwert 10 und die Schrittweite 1), so dass y mindestens 0,95 beträgt ist. Dies ist die Zahl $x = k - 1 = 7$. Fazit: Bei $k = 8$ nicht-normgerechter Schrauben sollte die Lieferung zurückgewiesen werden. Alternativ in MENU 1 (Rechenmodus): Bei einem nicht zu hohen Stichprobenumfang n kann über die Funktion BinomialCD(200, 0.02) eine Liste bestimmt werden für die kumulierten Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq k - 1)$ mit $k = 1, 2, \ldots, 201$. Man erhält für $k - 1 = 7$ zu ersten Mal einen Wahrscheinlichkeitswert, der größer als 0,95 ist. Alternativ gelangt man auch mit dem Befehl InvBinomialCD(0.95, 200, 0.02) = 7 zur ersten Zahl $k - 1$, so dass $P(X \leq k - 1) > 0{,}95$.

Grundaufgabe 3
a) $P(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot p^5 \cdot (1 - p)^0 \geq 0{,}95 \Leftrightarrow p^5 \geq 0{,}95 \Leftrightarrow p \geq \sqrt[5]{0{,}95} \approx 0{,}9897 = 98{,}97\,\%$
(einfacher Sonderfall: Im Bernoulli-Term haben der Binomialkoeffizient und die zweite Potenz jeweils den Wert 1).
b) Ansatz: Für welche Trefferwahrscheinlichkeit p ist $P(X \geq 38) \geq 0.9$. Lösungsmöglichkeit über MENU 5 (Grafenmenu): Betrachte die Funktionen y = BinomialCD(38, 40, 40, x) und y = 0,9 für den x-Bereich (x für die Trefferwahrscheinlichkeit p) und y-Bereich (y für die Wahrscheinlichkeit P) zwischen 0 und 1 (über V-Window). Ermittle grafisch den Schnittpunkt der beiden Graphen (über G-Solv und IINTSECT). Man erhält S (0,9721/0,9). Daher ist für $p \geq 0{,}9721$ $P(X \geq 38) \geq 0.9$.

Grundaufgabe 4
a) Für welche Zahl n ist $P(X \geq 1) \geq 0.9$? Über MENU 7 (Tabellenfunktion): Erstelle ein Tabelle für y = BinomialCD(1, x, x, 0.05) mit x = 1, 2, 3, … (x ist der Stichprobenumfang n und kann über SET mit Start- und Endwert sowie Schrittweite 1 eingestellt werden). Für x = 45 wird zum ersten Mal die Wahrscheinlichkeit von 0,90 überschritten. Daher müssen mindestens 45 Personen kontrolliert werden, damit ein Kontrolleur mindestens 1 Schwarzfahrer mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % erwischt. Rechnerische Alternativlösung über das Gegenereignis von $X \geq 1$: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \geq 0.9$ bedeutet, dass $P(X = 0) = \binom{n}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^n \leq 0.1$. Also erhält man: $0{,}95^n \leq 0.1 \Leftrightarrow n \geq \log_{0{,}95} 0{,}1 \approx 44{,}89$. Alternativ kann man auch unter MENU A (Gleichungsmenu) mit SOLVER arbeiten. Man gibt dort die Gleichung $0{,}95^n = 0{,}1$ ein und wählt den Bereich, in dem die Lösung liegen kann (unterer Wert 40, oberer Wert 50).
b) $P(X \geq 1) \geq 0.9$ ist gleichbedeutend mit $P(X = 0) = 0{,}65^n \leq 0{,}1$. Wie unter a) ergibt sich $n \geq 6$.
c) Für welches n ist $P(X \geq 3) \geq 0.95$? MENU 7 (Tabellenfunktion): Erstelle eine Tabelle für y = BinomialCD(3, x, x, 0.80) mit x = 3, 4, 5 … (x ist der Stichprobenumfang n und kann über SET mit Start- und Endwert sowie Schrittweite 1 eingestellt werden). Die Wahrscheinlichkeit 0,95 wird für n = 6 überschritten. Alternativ kann in MENU 1 (Rechenmodus) durch händische Eingabe von BinomialCD(3, x, x, 0.80) mit x = 4, 5, 6, … überprüft werden, wann diese Wahrscheinlichkeit > 0,95 ist.

Aufgabe 6

a)

Es sind bei 60 Würfen beim ungezinkten Würfel $\frac{1}{6} \cdot 60 = 10$ Einser zu erwarten. Sollten nur 3 Einser kommen, könnte es sich um einen gezinkten Würfel handeln, da der Wert sehr weit vom Erwartungswert abweicht.

b)

Die Formel für den Erwartungswert lautet $\mu = E(X) = n \cdot p$. Bei einem Wurf kommt zu einem Sechstel die „1". Bei 6 Würfen kommt im Schnitt einmal ($\frac{1}{6} \cdot 6 = 1$) die „1". Bei 60 Würfen beträgt die durchschnittlich zu erwartene Einserzahl $\frac{1}{6} \cdot 60 = 10$. Allgemein beträgt die Prognose für den zu erwartene Mittelwert $\frac{1}{6} \cdot n$. Für eine beliebige Trefferwahrscheinlichkeit erhält man die obige Formel.

c)

Erste Beobachtungen, z. B. (vgl. Aufgabe d)): Maximum bei steigender Wahrscheinlichkeit weiter rechts, bei größerer Zahl n nimmt das Maximum ab, für p = 0,5 ist das Histogramm symmetrisch zum Erwartungswert, bei großem n werden die Histogramm zunehmend symmetrisch zu Erwartungswert.

Erwartungswerte

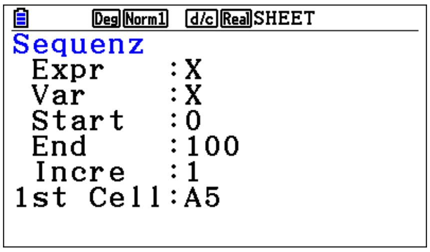
p	n = 4	n = 10	n = 20
0,1	0,4	1	2
0,25	1	2,5	5
0,5	2	5	10
0,7	2,8	7	14

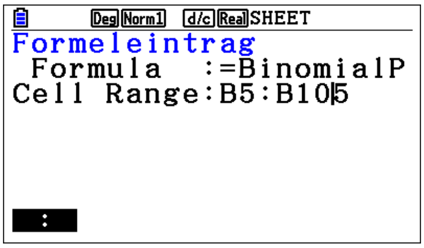
Aufgabe 7

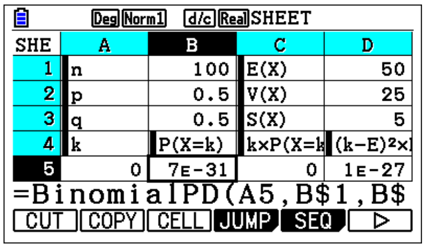
a) $p = \frac{1}{6}$, $n = 60$: $E(X) = 10$ und $P(7 \le X \le 13) \approx 77{,}67\ \%$.

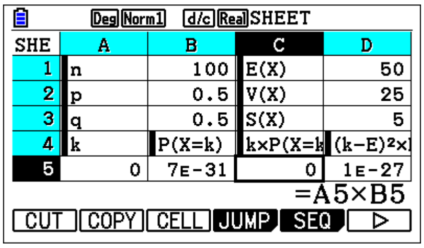
b)	n = 4		n = 20		n = 60		n = 100	
	V(X)	σ(X)	V(X)	σ(X)	V(X)	σ(X)	V(X)	σ(X)
p = 0,1	0,36	0,6	1,8	1,34	5,4	2,32	9	3
$p = \frac{1}{6}$	0,56	0,75	2,78	1,67	8,33	2,89	13,88	3,73
p = 0,25	0,75	0,87	3,75	1,94	11,25	3,35	18,75	4,33
p = 0,5	1	1	5	2,24	15	3,87	25	5
p= 0.7	0,84	0,92	4,2	2,05	12,6	3,55	21	4,58

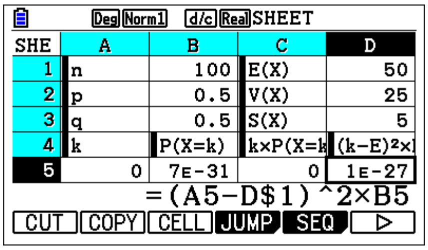
c) Programmierung: In MENU 4 (Tabellenkalkulation) kann man oben zunächst sechs Felder angeben für die Parameter n, p, q, E(X), V(X) und σ(X). Dann gibt man in B1 und B2 Werte für n und p ein. Dann werden über die SEQ Funktion (EDIT-Menu) die Zahlen 0, 1, 2, …, 100 1die dann über FILL (EDIT-Menu) in die Zellen B5 bis B105 kopiert werden. Analoges erfolgt für die Zellen C5 bis C105 und D5 bis D105. Dabei ist bei den Zellen B1 und B2 auf das Zeichen $ zu achten, das vor der Ziffer verhindert, dass beim Nach-unten-Kopieren (FILL) der Zellenbezug fest bleibt. Dann können die Formeln für den Erwartungswert und die Varianz sowie die Standardabweichung programmiert werden.

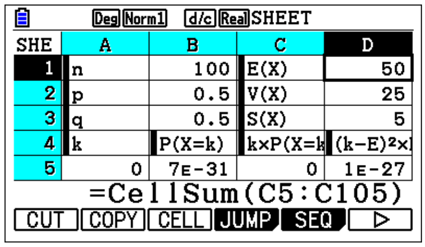


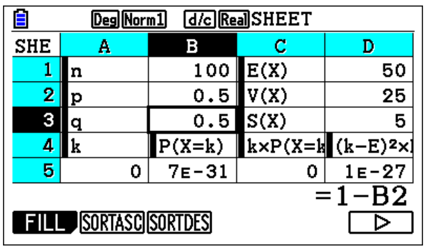


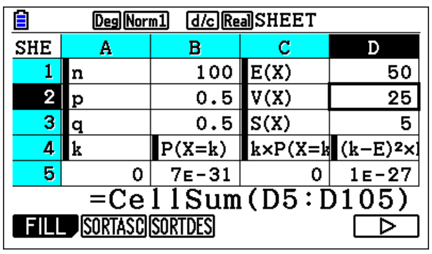


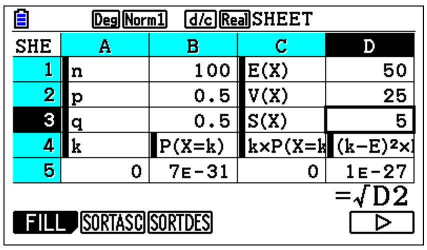












Beobachtungen: Multipliziert man q mit E(X) ergibt sich die Varianz V(X). Ebenso ergibt sich der Erwartungswert E(X) durch das Produkt von n und p.

Bemerkung: Wenn $(n + 1) \cdot p$ ganzzahlig ist (z. B. $n = 9$, $p = 0{,}4$; $\mu = 3{,}6$), nimmt die Verteilung an den beiden benachbarten Stellen $(n + 1) \cdot p - 1 = \mu + p - 1$ (= 3) und $(n + 1) \cdot p = \mu + p$ (= 4) sein Maximum (= 0,2508) an. Bei nicht ganzzahligem $(n + 1) \cdot p$ (z. B. $n = 10$, $p = 0{,}4$, $\mu = 4$) liegt das einzige Maximum beim größten Wert für k unterhalb von $(n + 1) \cdot p = \mu + p = 4{,}4$ (also bei 4).

4.4 Sigma-Regeln

Übungsaufgaben

a)

$\mu \approx 16,67$, $V(X) \approx 13,89 > 9$, $\sigma \approx 3,73$. Es gilt $\mu - 2\sigma \approx 9,21$ und $\mu + 2\sigma \approx 24,12$. Im Intervall [10, 24] liegen mindestens 95,4 % der möglichen Ausgänge, da $P(10 \leq X \leq 24) \approx 0,957$. Daher würden 10 Einser nicht auf eine signifikante Abweichung hindeuten, während 25 Treffer bei 100 Versuchen auf eine andere Trefferwahrscheinlichkeit hindeuten. Es gilt: $\mu - 2,58\sigma \approx 7,04$ und $\mu + 2,58\sigma \approx 26,29$. Daher liegt eine Trefferzahl mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % im Intervall [8; 26].

b)

Sei X die Anzahl der Gewinnlose in einer Stichprobe von $n = 60$. Der Erwartungswert von X beträgt $\mu = 20$. Die Standardabweichung σ beträgt ungefähr $3,65 > 3$. Die 2σ-Umgebung lautet $12,7 \leq X \leq 27,3$. 95,5 % aller Ausgänge liegen in dieser Umgebung, 4,5 % außerhalb. Das beobachtete Testergebnis liegt linksseitig von der 2σ-Umgebung. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt nur ca. 2,25 % wegen der nahezu vorliegenden Symmetrie des Histogramms einer Binomialverteilung für große n. Beurteilung: Die Wahrscheinlich ist die Werbung falsch. Der Anteil der Gewinnlose ist vermutlich deutlich geringer als ein Drittel.

c)

Man berechnet zunächst $\mu = 50$ und $\sigma = 5 > 3$. Die Grenzen für das 95 %-Sicherheitsintervall lauten dann $\mu - 1,96\sigma = 40,2 \leq X \leq 59,8 = \mu + 1,96\sigma$. Zum Herausfinden der richtigen Grenzen (die Sigma-Regeln geben nur gerundete Werte an und gelten umso besser je höher n ist) muss man nun verschiedene Möglichkeiten betrachten: $P(41 \leq X \leq 59) \approx 94,3$ % liefert einen zu kleinen Wert. Das Intervall [40; 60] liefert wegen $P(40 \leq X \leq 60) \approx 96,48$ % eine fast 96,5 %-Vorhersagewahrscheinlichkeit, die mindestens 95 % beträgt (nach außen abrunden).

d)

X zählt die Anzahl der gelesenen Exemplare. Man nimmt an, dass X binomialverteilt ist mit $n = 5000$, $p = 0,2$, $\mu = 1000$ und $\sigma \approx 28,28$. $P(X \leq 980) \approx 24,6$ %, $P(X \geq 1100) \approx 0,025$ %. Mit ca. 95,4 %-iger Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der ungelesenen Exemplare im Intervall $\mu - 2\sigma \approx 943,44 \leq X \leq 1056,56 \approx \mu + 2\sigma$. Das Intervall [944; 1056] liefert die gesuchte Lösung.

4.5 Testen von Hypothesen mittels Binomialverteilung

Aufgabe 1

b)

Es handelt sich um ein Bernoulli-Experiment unter der Annahme, dass alle Testdurchgänge voneinander unabhängig sind mit jeweils gleicher Trefferwahrscheinlichkeit. Es darf also kein Lerneffekt vorliegen (z. B. durch Ergebnisrückmeldung).

c)

Die Variablen lauten: n = 40 und p = 0,5 (da man zunächst davon ausgehen muss, dass geraten wird). Für den Erwartungswert gilt $\mu = 40 \cdot 0{,}5 = 20$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{\mu \cdot q} = \sqrt{20 \cdot 0{,}5} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$. Die Varianz beträgt 10.

Aufgabe 2

a)

$P(X \geq 23) = 1 - P(X \leq 22) \approx 21{,}48\%$

$P(X \geq 27) = 1 - P(X \leq 22) \approx 1{,}924\%$

$P(X \geq 30) = 1 - P(X \leq 22) \approx 0{,}001\%$

b)

Raten kann aufgrund des relativ geringen Stichprobenumfangs nicht ausgeschlossen werden.

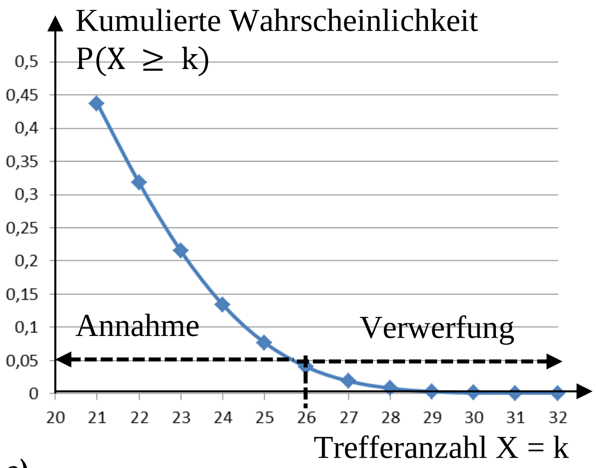
c) und d)

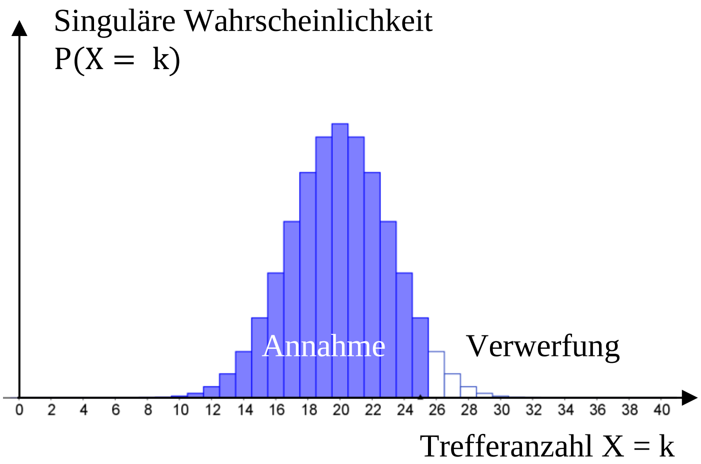
Annahmebereich: k≤ 25; Verwerfungsbereich: k ≥ 26

k	21	22	23	24	**25**	26	27	28	29	30	31
P(x = k)	0,119	0,103	0,081	0,057	**0,037**	0,021	0,011	0,005	0,002	0,001	0,000
P(X ≤ k)	0,682	0,785	0,866	0,923	**0,960**	0,981	0,992	0,997	0,999	0,999	0,999
P(X ≥ k)	0,437	0,318	0,215	0,134	**0,077**	0,040	0,019	0,008	0,003	0,001	0,000

Alternativ können die Sigmaregeln verwendet werden, da $\sigma > 3$: $k \geq 20 + 1{,}64 \cdot 3{,}1622 \approx 25{,}18$. Runden: Es werden sinnvollerweise nur natürliche Zahlen als Werte betrachtet, so dass wir im rechtsseitigen Fall nach oben aufrunden (im linkseitigen Fall würde nach unten abgerundet): Der Verwerfungsbereich liegt bei k ≥ 26.

Entscheidungsregel: Bestimmt die Versuchsperson nun 26 oder mehr Farben der Gummibärchen richtig, so wird H_0 verworfen und die Alternativhypothese „Die Person ist besser als Raten“ angenommen (jeweils auf einem Signifikanzniveau von 5%). Anderenfalls wird davon ausgegangen, dass die Person nur geraten hat.





e)

Aussage	Wahr	Falsch	Begründung
1. Es ist eindeutig bewiesen, dass die Nullhypothese falsch ist.	☐	■	Man kennt die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit nicht.
2. Die Wahrscheinlichkeit des Zutreffens der Nullhypothese ist gefunden worden.	☐	■	Man kennt die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit nicht.
3. Es ist eindeutig bewiesen, mit der die Alternativhypothese wahr ist.	☐	■	Man kennt die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit nicht.
4. Man kann nun die Wahrscheinlichkeit ableiten, dass die Alternativhypothese richtig ist.	☐	■	Man kennt die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit nicht.
5. Man geht nun davon aus, dass die Nullhypothese falsch ist, ist sich aber bewusst, dass man bei diesem Verfahren eine wahre Nullhypothese mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 5% fälschlich verwirft.	■	☐	Die Verwerfung der Nullhypothese bedeutet noch nicht, dass sie falsch ist, sondern nur, dass sie zu 5% fälschlich verworfen wurde, falls sie wahr ist.

Aussage	Wahr	Falsch	Begründung
6. Es ist eindeutig bewiesen, dass die Nullhypothese richtig ist	☐	■	Man kennt die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit nicht.
7. Man kann nun die Wahrscheinlichkeit ableiten, dass die Nullhypothese richtig ist.	☐	■	Man kennt die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit nicht.
8. Es ist eindeutig bewiesen, dass die Alternativhypothese falsch ist.	☐	■	Man kennt die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit nicht.
9. Die Wahrscheinlichkeit des Zutreffens der Alternativhypothese ist gefunden worden.	☐	■	Man kennt die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit nicht.
10. Man geht nun davon aus, dass die Nullhypothese richtig ist, ist sich aber bewusst, dass man bei diesem Verfahren in dem Fall, in dem die Nullhypothese falsch ist, diese mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% dennoch fälschlich annimmt	☐	■	Der zweite Teil der Aussage ist falsch, da man die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit nicht kennt und damit auch nicht die Wahrscheinlichkeit eine falsche Nullhypothese fälschlich anzunehmen.

f)

Stichprobenumfang n	**Kleinstes b mit $P_n(X \leq b) \geq 0,95$**	**Fehler 1. Art:** $P_n(X \geq b)$
10	8	$P_{10}(X \geq 9) \approx 0{,}0107$
20	14	$P_{20}(X \geq 15) \approx 0{,}0207$
40	25	$P_{40}(X \geq 26) \approx 0{,}0403$
50	31	$P_{50}(X \geq 32) \approx 0{,}0325$
100	58	$P_{100}(X \geq 59) \approx 0{,}0443$

Bei größerem Stichprobenumfang nimmt der Annahmebereich bei gleichem p zu. Die Irrtumswahrscheinlichkeit liegt stets unter 5%.

g)

Stichprobenumfang n	**b**	$\mathbf{p_{neu}}$	**Fehler 2. Art:** $P_{p_{neu}}(X \leq b)$
20	14	0,60	87,44%
		0,70	58,36%
		0,80	19,58%
40	25	0,60	68,26%
		0,70	19,26%
		0,80	0,79%
100	58	0,60	37,75%
		0,70	0,72%
		0,80	0,00004%

Durch einen höheren Stichprobenumfang kann man die Wahrscheinlichkeit für den Fehler der 2. Art verringern.

h)

Wenn man den Annahmebereich von H_0 vergrößert, um den Fehler der 1. Art zu verkleinern, wird die Wahrscheinlichkeit für den Fehler der 2. Art vergrößert. Wenn man dann zusätzlich noch den Stichprobenumfang erhöht, kann man gleichzeitig die Wahrscheinlichkeiten für den Fehler der 1. und 2. Art verringern. Für eine wahre Fähigkeit, Gummibärchen an der Farbe zu erkennen, die nur leicht über der Ratewahrscheinlichkeit von 0,5 liegt, ist also der Fehler zweiter Art sehr hoch.

i)

n = 40; p = 0,5	$\alpha = 20\%$	$\alpha = 10\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$
Annahmebereich (Mit kumulierter Wahrscheinlichkeit)	Kleinstes k mit $P(X \leq k) \geq 0{,}80$ ist 23, also: $k \leq 23$	Kleinstes k mit $P(X \leq k) \geq 0{,}90$ ist 24, also: $k \leq 24$	Kleinstes k mit $P(X \leq k) \geq 0{,}95$ ist 25, also: $k \leq 25$	Kleinstes k mit $P(X \leq k) \geq 0{,}99$ ist 27, also: $k \leq 27$
Mit Sigmaregeln (schlechte Näherungen, da $\sigma = 3{,}16$ nur knapp über 3 liegt)	$k=20+0{,}84 \cdot 3{,}16 \approx 22{,}65$	$k=20+1{,}28 \cdot 3{,}16 \approx 24{,}04$	$k=20+1{,}64 \cdot 3{,}16 \approx 25{,}18$	$k=20+2{,}33 \cdot 3{,}16 \approx 27{,}36$
Verwerfungsbereich	$k \geq 24$	$k \geq 25$	$k \geq 26$	$k \geq 28$

Aufgabe 3

a)

Es handelt sich um ein Bernoulli-Experiment. Da angenommen wird, dass alle Testdurchgänge voneinander unabhängig sind mit jeweils gleicher Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,65 (Lose werden immer wieder aufgefüllt). Der Stichprobenumfang beträgt n = 80 und das Signifikanzniveau an jeder Seite 0,5%.

b)

Die Nullhypothese lautet H_0: p = 0,65. Wir nehmen also bei einem Signifikanzniveau von 1% an, dass 65% der Lose Nieten sind.

c)

Die **Gegenhypothese H_A** ist keine Festlegung auf einen bestimmten Anteil der Nieten. Sie wird nur angenommen, wenn das Ergebnis der Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% darauf schließen lässt, dass die Nullhypothese nicht zutrifft. Also: H_A: p ≠ 0,65 bei einem Signifikanzniveau von 1%.

d)

(1) X: Anzahl der Nieten; Stichprobenumfang n = 80; Nietenwahrscheinlichkeit p = 65%; Erwartungswert μ = 0,65 · 80 = 52; Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{80 \cdot 0{,}65 \cdot\ 0{,}35} \approx 4{,}27$; Signifikanzniveau α = 1%.

(2)	…	39	40	**41**	42	43	…	62	**63**	64	65	…
P(x = k)	…	0,0011	0,0020	**0,0037**	0,064	0,0104	…	0,0056	**0,0029**	0,0015	0,0007	…
P(X ≤ k)	…	0,0021	0,0041	**0,0078**	0,0142	0,0247	…	0,9945	**0,9974**	0,9989	0,9996	…
P(X ≥ k)	…	0,9990	0,9979	**0,9959**	0,9922	0,9858	…	0,0111	**0,0055**	0,0026	0,0004	…

e)

(1) Kleinste Zahl a, bei der 0,005 überschritten wird: a = 41.

(2) Kleinste Zahl b, bei der 0,995 überschritten wird: b = 63.

(3) **Annahmebereich**: 41 ≤ k ≤ 63; **Verwerfungsbereich**: k ≤ 40 und k ≥ 63; **Entscheidungsregel**: Das bedeutet, dass für den Fall, dass der Mathematik-LK zwischen 41 und 63 Nieten nachgewiesen hat, die Annahme, dass der tatsächliche Anteil der Nieten 65% beträgt, akzeptiert wird. In allen anderen Fällen geht der Mathe-LK davon aus, dass der tatsächliche Anteil der Nieten nicht 65% beträgt.

f)

Bei einem Signifikanzniveau von 10% wäre der Annahmebereich (mit a_1= [45;59], wie entsprechend nachzurechnen ist) deutlich kleiner. Das bedeutet, dass die Irrtumswahrscheinlichkeit entsprechend größer wäre. Dem Hersteller gegenüber können die Schüler des Mathe-LKs bei einem Ergebnis im Verwerfungsbereich auf dem Signifikanzniveau von 1% entsprechend sicherer sein können, dass der Hersteller einen Produktionsfehler gemacht hat, als bei einem Signifikanzniveau von 10%. Allerdings fällt dieser auch erst „später“ auf, d. h., dass bei einer tatsächlichen Wahrscheinlichkeit von p ≠ 0,65 länger die Nullhypothese noch (fälschlicherweise) akzeptiert wird, der Produktionsfehler also „weniger wahrscheinlich entdeckt“ wird.

g)

Dieses Vorgehen ist nicht sinnvoll, sofern der Ansatz gewählt wird, dass neutral aufgrund einer vorher aufgestellten Hypothese deren Gültigkeit überprüft wird. Der Test ist nur nachvollziehbar konzipiert, wenn das Signifikanzniveau vorher angegeben wird. Zudem sagt der Test ja auch nicht aus, ob eine Hypothese wahr ist oder falsch, sondern führt zu einer Entscheidung für oder gegen die Nullhypothese. Wird das Signifikanzniveau im Nachhinein festgelegt, so kann genau diese Entscheidung im Sinne des Testers beeinflusst werden. Bemerkung: Allerdings ist es sinnvoll, wenn der Mathe-LK anhand möglicher Signifikanzniveaus die Bedeutung und die Abhängigkeit der Fehler erster und zweiter Art verdeutlichen und erkennen möchte ☺.

h)

(1) Der Fehler erster Art gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass H_0 fälschlicherweise verworfen wird, d. h., dass weniger als 41 oder mehr als 63 Nieten gezogen werden, obwohl tatsächlich 65% Nieten enthalten sind.

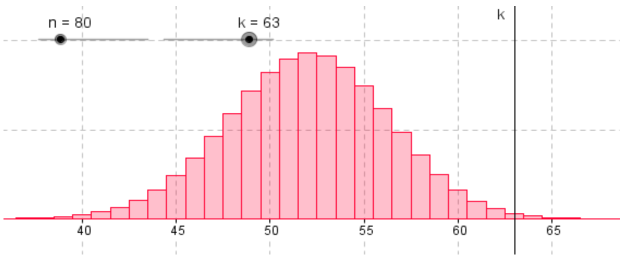
(2) $\alpha = P(X \leq 40) + P(X \geq 64) = P(X \leq 40) + 1 - P(X \leq 63) = 0{,}0041 + 0{,}0026 = 0{,}0067 = 0{,}67\%$
Anschaulich ist der Fehler erster Art die Summe der beiden rot markierten Werte in der obigen Tabelle.

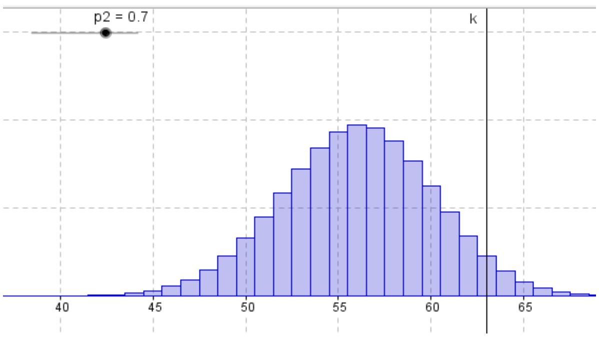
i)

(1) Der Fehler zweiter Art kann nicht bestimmt werden, da in dieser Aufgabe die „echte“, also die tatsächliche Wahrscheinlichkeit unbekannt ist. Im Zusammenhang gibt der Fehler zweiter Art die Wahrscheinlichkeit an, mit der von einem 65%-Nietenanteil ausgegangen wird, obwohl tatsächlich mehr oder weniger Nieten enthalten sind.

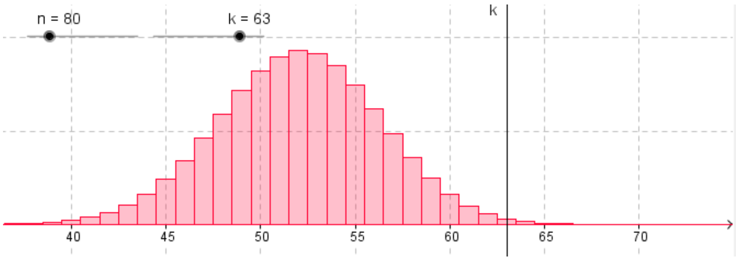
(2) Um den Fehler zweiter Art zu berechnen, betrachtet man den Annahmebereich der Nullhypothese unter der Voraussetzung, dass die Alternativhypothese gilt. Der Fehler zweiter Art ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Testergebnis in den Annahmebereich der Nullhypothese fällt, obwohl die Alternativhypothese gilt.

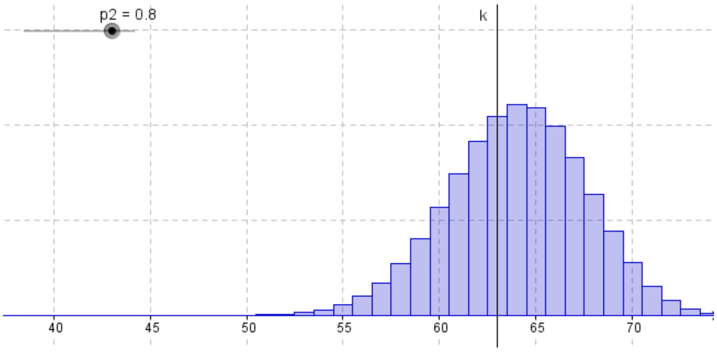
(3) Auf der „rechten Seite“ heißt das, dass der Fehler zweiter Art die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass unter der Annahme, dass p = 0,7 gilt, das Ergebnis im Intervall a = [41;63] liegt. Das berechnet sich mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilung: $P_{0,7}(41 \leq X \leq 63) = 0{,}9697$.





(4) Der Fehler zweiter Art wird deutlich geringer, da deutlich weniger Ergebnisse im Annahmebereich von H_0 liegen.





j)

(1) $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{80 \cdot 0{,}65 \cdot\ 0{,}35} \approx 4{,}27$
(2) a =2,58 (da das Signifikanzniveau 1% gewählt wurde).
(3) a = [μ – 2,58σ; μ + 2,58σ] = [52 – 2,58 ·4,27; 52 + 2,58 ·4,27] = [40,98; 63,01] ≈ [41; 63].

Exkurs zur Rundung beim Rechnen mit Sigmaregeln: Im Annahmebereich liegen mindestens 95% der Ergebnisse, im Verwerfungsbereich maximal 5% der Ergebnisse. Damit dies mit Sicherheit noch gilt (insbesondere bei kleinen σ-Werten kann es sonst dazu kommen, dass nicht mehr 95% der Ergebnisse im Annahmebereich liegen), muss der Annahmebereich rundungstechnisch „vergrößert“ werden, damit im Zweifelsfall noch mehr Ergebnisse im Annahmebereich liegen. Das bedeutet hier dann a= [40;64], um sicher zu sein.[61] Allerdings kann die Rundungsfrage differenzierter betrachtet werden: Es gibt theoretisch vier Rundungsmöglichkeiten. Von jedem dieser Intervalle kann man P(A) berechnen:

- a_1 = [40;63], $P(40 \leq X \leq 63) = 0{,}995372$
- a_2 = [41;63], $P(41 \leq X \leq 63) = 0{,}993327$
- a_3 = [40;64], $P(40 \leq X \leq 64) = 0{,}996825$
- a_4 = [41;64], $P(41 \leq X \leq 64) = 0{,}99478$

Es ist nun derjenige Annahmebereich zu wählen, der den geringsten Abstand zu 0,99 hat. In diesem Fall ist die beste Rundung somit a_2 = [41;63]. Dies muss nicht immer dem Annahmebereich entsprechen, der sich durch „nach außen runden“ (hier: a_3 = [40;64]) oder durch mathematische Rundungsregeln (die ohnehin hier nicht sinnvoll anzuwenden sind) ergibt. Die Auswahl des Annahmebereichs hat dann auch Auswirkungen auf die Fehler erster und zweiter Art.

[61] In den Abitur-Modelllösungen wird das nicht differenzierter betrachtet. Mit Hilfe des GTR ist dies aber ohne größeren Aufwand möglich.

Aufgabe 4

a) und b)

Testarchitektur, Binomialverteilungen: X = Anzahl der Verspätungen; n = 100; p = 0,40; Signifikanzniveau α = 5%. Daher gilt: $\mu = n \cdot p = 40$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0{,}40 \cdot\ 0{,}60} \approx 4{,}90$.

Hypothesenbildung: Es sei X die Anzahl der Verspätungen. Die Bürgerinitiative ist überzeugt von der Richtigkeit ihrer Behauptung und wird sich nur vom Gegenteil überzeugen lassen, wenn sehr kleine Werte von X auftreten. Daher testet sie nicht das Gegenteil ihrer Behauptung. Es geht also um einen linksseitigen Test. Die **Nullhypothese H_0** ist **$p \geq 0{,}4$** (man könnte auch p = 0,4 wählen, da bei Werten über 40 % die Nullhypothese ebenfalls erfüllt wäre). Die **Alternativhypothese H_A** ist **$p < 0{,}4$** (Das Eintreten wäre aus der Sicht der Bahn positiv).

c)

k	…	29	30	31	32	33	34	35	36	37	…
P(X ≤ k)	...	0,0148	0,0248	**0,0398**	0,0615	0,0913	0,1303	0,1795	0,2386	0,3068	…

d)

Signifikanz und Relevanz, Annahme und Verwerfungsbereich: Beim Ablesen der Tabelle wird P(X ≤ k) das erste Mal für k = 32 größer als 5%. Der **Annahmebereich** ist somit A = [32;100] und der **Verwerfungsbereich** V = [0;32]. **Entscheidungsregel**: Im Anwendungszusammenhang bedeutet das, dass ab 32 Verspätungen mit einer Wahrscheinlichkeit von über 95% davon auszugehen ist, dass die tatsächliche Verspätungsquote (mindestens) 40% beträgt, da mehr als 95% der möglichen Ergebnisse in diesem Intervall liegen. Bei 32 Verspätungen oder mehr wird also die Nullhypothese angenommen, bei weniger als 32 Verspätungen wird sie verworfen.

e)

Fehler 1. Art beim Testen: Der Fehler erster Art beträgt $\alpha = P(X \leq 31) \approx$ 3,98% (siehe Tabelle oben). Das bedeutet, dass mit 4% Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese (die Bahn hat mindestens 40% Verspätungen) abgelehnt wird und fälschlicherweise (wenn die Verspätungsquote mindestens 40 % beträgt) von einem geringeren Anteil an Verspätungen ausgegangen wird.

f)

Der **Fehler zweiter Art** (unter der Annahme, dass die tatsächliche Verspätungswahrscheinlichkeit 30% beträgt) beträgt $\beta = P_{0,3}(32 \leq X \leq 100) = 1 - P_{0,3}(X \leq 31) \approx 36{,}67\%$. Das bedeutet, dass der Ausgang der Stichprobe im Annahmebereich liegt, obwohl die tatsächliche Wahrscheinlichkeit für Verspätungen geringer ist. Aus Sicht der Bürgerbewegung ist der recht große Fehler zweiter Art natürlich unproblematisch, da die These nachgewiesen werden soll, dass die Verspätungsquote (mindestens) 40% beträgt. Das würde der VRR anders bewerten, da das Ergebnis der Untersuchung in eben mehr als einem Drittel der Untersuchungsergebnisse schlechter ausfallen würde als das Angebot der Bahn eben ist.

g)

Sigma-Regeln: $\mu = n \cdot p = 40$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0{,}40 \cdot\ 0{,}60} \approx 4{,}90$; a = 1,64 (da das Signifikanzniveau 5% gewählt wurde).
$A = [\mu - 1{,}64 \cdot \sigma\,;\ n] = [40 - 1{,}64 \cdot 4{,}899\,; 100] = [31{,}96\,; 100] \approx [32\,; 100]$.

h)

Der VRR wird den (mit ca. 36%) aus ihrer Sicht zu hohen Fehler zweiter Art als einen Nachteil sehen. Ein **rechtsseitiger** Test kommt zu einem Annahmebereich, der besagt, dass bei einem Untersuchungsergebnis zwischen 0 und 48 Verspätungen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% die Verspätungsquote höchstens 40% beträgt.

k	…	45	46	47	48	49	50	51	52	…
P(X ≤ k)	...	0,8689	0,9070	0,9362	0,**9577**	0,9729	0,9832	0,9900	0,9942	…
P(X ≥ k)	…				0,0638	**0,0423**	0,0271			

Bezüglich möglicher Werbeaussagen und Imagefragen ist diese Vorgehensweise natürlich aus Sicht der Bahn besser. Hinzu kommt ein für sie günstiger recht großer Fehler zweiter Art. Denn in ca. 10% der Fälle wird die für die Bahn günstigere Aussage fälschlicherweise beibehalten. Die Bürgerbewegung hingegen kann nur ca. 4% Fehler erster Art „erhoffen", nachdem die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird. Außerdem ist der Annahmebereich aus Sicht der Bürgerbewegung (die ja von mindestens 40% ausgeht) sehr groß, da es einen hohen Überschneidungsbereich der beiden Annahmebereiche gibt: A = [32;48]. Solange dies der Fall ist, ist die Deutung des Untersuchungsergebnisses stark von der Testarchitektur abhängig und weniger vom Untersuchungsergebnis. In keinem Fall lässt sich mit Hilfe der Untersuchung sagen, wie groß die tatsächliche Verspätungsquote der Bahn ist.

Aufgabe 5: Münzwurf

a) Bei jedem Wurf der beiden Münzen wird als Treffer das Ergebnis „beide Münzen zeigen Zahl" betrachtet. Die einzelnen Würfe sind unabhängig voneinander. Somit ist es eine Bernoulli-Kette. Die Länge ist $n = 50$ und die Trefferwahrscheinlichkeit ist $p = 0{,}25$.

b) $P(X = 12) = 12{,}94\%$; $P(X \leq 12) = 51{,}10\%$;

c) $P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) = 61{,}84\%$; $P(15 \leq X \leq 30) = 25{,}19\%$

d) $\sigma = 50 \cdot 0{,}25 = 12{,}5$. Wenn man die Bernoulli-Kette sehr oft durchführt, sind im Durchschnitt auf lange Sicht 12,5 Treffer zu erwarten.

e) $\sigma = 3{,}0619$

f) Das 2σ-Intervall: [7;18].

Aufgabe 6: Kirschkerne

a) $n = 100$, $p = 0{,}02$; $P(X \geq 1) = 86{,}74\%$

b) $\mu = 2$

c) $p = 0{,}015$, $k = 0$, n gesucht. Er darf höchstens 11 Kirschen nehmen.

d) $n = 120$, $k = 0$, p gesucht. Die Wahrscheinlichkeit darf höchstens 0,2229% betragen.

Aufgabe 7: Brot auf die Marmeladenseite

a) H_0: $p = 0{,}5$; H_A: $p \neq 0{,}5$; X ist binomialverteilt mit Parametern $n = 25$ und $p = 0{,}5$.

b) Annahmebereich [8; 17], d.h. wenn das Brot zwischen 8-und 17-mal auf die Marmeladenseite fällt, behält Katja die Nullhypothese bei.

c) $P(X < 8) + P(X > 17) = 0{,}0433$

d) $P_{0,7}(8 \leq X \leq 17) = 0{,}4881$

Aufgabe 8: Umfrage zur Stadthalle

a) Linksseitiger Test. Die Nullhypothese, dass 75 % für den Bau sind, soll verworfen werden, wenn es in der Umfrage nur wenig Befürworter gibt.

H_0: $p = 0{,}75$; H_A: $p < 0{,}75$; Annahmebereich: [68; 100]

b) Bei höchstens 67 Befürwortern kann die Redaktion die Schlagzeile drucken.

c) $P(X \leq 67) = 0{,}0446$

d) $P_{0,6}(X \geq 68) = 0{,}0615$

4.6 Kontrollaufgaben

Aufgaben ohne Zuhilfenahme von Hilfsmitteln

Aufgabe 1

a) Man rechne nach: $\mu(\text{Mathematik}) = \frac{1}{24}(1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6) = \frac{84}{24} = \frac{21}{8} = 3{,}5$
$\mu(\text{Englisch}) = \frac{1}{24}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 2) = \frac{84}{24} = \frac{21}{8} = 3{,}5$. Im Fach Englisch liegen offenbar mehr Klassenarbeiten in der Nähe des Erwartungswertes. Dort ist die Streuung geringer. Daher sind (1) und (3) richtig.

b) (1) In diesem Fall müsste wegen der Symmetrie $P(X = 0) = P(X = 2) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ sein.

(2) $\mu = 0 \cdot 0{,}32 + 1 \cdot 0{,}36 + 2 \cdot 0{,}32 = 1$; $V = (0-1)^2 \cdot 0{,}32 + (1-1)^2 \cdot 0{,}36 + (2-1)^2 \cdot 0{,}32 = 0{,}64$;
Daher beträgt die Standardabweichung $\sigma = = \sqrt{V} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

Aufgabe 2

a) X: Anzahl der blauen Kugeln; $p = 40\ \%$, $k \leq 1$
$P(X \leq 1) = \binom{3}{0} 0{,}4^0 \cdot 0{,}60^3 + \binom{3}{1} 0{,}4^1 \cdot 0{,}60^2 = 0{,}60^3 + 3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}36$
$= 0{,}60^3 + 3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}36 = (0{,}6 + 1{,}2) \cdot 0{,}36 = 0{,}216 + 0{,}432 = 0{,}648$

b) $P(X = k) = \binom{4}{k} 0{,}4^k \cdot 0{,}60^{4-k}$ für $0 \leq k \leq n = 4$.

Aufgabe 3

a)	M	W	
60+	0,8 · 37,5 % = 30 %	40 %	**70 %**
unter 60	7,5 %	22,5 %	30 %
	37,5 %	62,5 %	

P(W und 60+) = 40 %.

b) Drei Achtel (= 37,5 %) der Reisegruppe sind Männer, fünf Achtel (62,5 %) sind Frauen. Daher müssen zwei Achtel der Gesamtgruppe der Personenzahl 10 entsprechen. Insgesamt hat die Reisegruppe 40 Personen (25 Frauen und 15 Männer).

Aufgabe 4

a) Nur (2) ist falsch. Alle anderen Terme sind gleich, da $\binom{20}{3} = \binom{20}{17}$ und $0{,}5^3 \cdot 0{,}5^{17} = 0{,}5^{20}$ sowie $\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!}$.

b) A gehört zu T_3, B gehört zu T_1, C gehört zu T_2

Aufgabe 5

a) Der Erwartungswert von X beträgt $10 \cdot 0{,}4 = 4$ und von Y $10 \cdot 0{,}6 = 6$. Da der Erwartungswert in der Nähe der Trefferzahl mit der größten Wahrscheinlichkeit liegt, handelt es sich um die Verteilung von X. Ferner gilt: $P(X \neq 5) = 1 - P(X = 5) = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$.

b) $P(X = k) = \binom{10}{k} 0{,}4^k \cdot 0{,}60^{10-k} = \binom{10}{10-k} 0{,}60^{10-k} \cdot 0{,}4^{10-(10-k)} = P(Y = 10 - k)$.
Alternativ kann auch argumentiert werden, dass Y die komplementäre Zufallsgröße zu X ist (Trefferwahrscheinlichkeit von X ist Nichttrefferwahrscheinlichkeit von Y).
Ferner gilt: $P(Y = 6) = P(X = 4) = 0{,}25$

Aufgabe 6

a) $\mu = 100 \cdot 0{,}2 = 20;\ \sigma = \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = \sqrt{20 \cdot 0{,}8} = \sqrt{16} = 4$

b) $V = n \cdot p \cdot (1 - p) \Leftrightarrow 9 = 100 \cdot p \cdot (1 - p) \Leftrightarrow \frac{9}{100} = p \cdot (1 - p) \Leftrightarrow p^2 - p + 0{,}09 = 0$
$\Leftrightarrow p = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - 0{,}09} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}16} = 0{,}5 \pm 0{,}4$. Daher gilt $p = 0{,}9$ oder $p = 0{,}1$ mit den Erwartungswerten $\mu = 90$ oder $\mu = 10$.

c) $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$: Je größer n ist, desto größer ist die Standardabweichung. Sie gibt die Streuung um den Erwartungswert an. Deshalb ist die Streuung um den jeweiligen Erwartungswert für $n = 80$ am größten und für $n = 20$ am kleinsten.

Aufgaben mit Zuhilfenahme von Hilfsmitteln

Aufgabe 7

a) Voraussetzungen:
- Genaue eine Antwort ist richtig.
- Nur 2 mögliche Ausgänge sind möglich (richtige Antwort = Treffer, falsche Antwort = Niete),
- Alle Aufgaben sind gleich schwer und hängen nicht voneinander ab.
- Kenntnisstand = Trefferwahrscheinlichkeit p
- Keine Ermüdung
- Zufallsgröße X: Anzahl der richtig beantworteten Fragen

b) (1) $n = 20$, $k \geq 12$ (60 % von 20), $p = 0{,}7 \Rightarrow P(X \geq 12) \approx 88{,}67\ \%$;
(2) Wegen $\mu = 20 \cdot 0{,}7 = 14$ ist die kumulierte Wahrscheinlichkeit gesucht: $P(9 \leq X \leq 19) \approx 99{,}41\ \%$.

c) (1) P(1. bis 8. Frage richtig und 9. sowie 10. Frage falsch) $= 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}67\ \%$.
(2) $n = 10$, $k = 8$, $p = 0{,}8$: $P(X = 8) \approx 30{,}20\ \%$.

d) Gegeben: $n = 20$, $k \geq 15$, $P_{n=20;p}(X \geq 15) \geq 0{,}9$. **Gesucht**: (Mindest-)Kenntnisstand p.
Betrachte im Graphen-Menu die Funktion f mit $f(x) = P_{n=20;x}(X \geq 15)$ (Eingabe: Y1 = BinomialCd(15, 20, 20, x)) (x: Kenntnisstand) und bringe sie mit der zweiten Funktion g mit $g(x) = 0{,}9$ (Eingabe: Y2 = 0.9) zum Schnitt. Man erhält die Schnittstelle $x \approx 0{,}8341$, an der $P_{n=20;x}(X \geq 15) = 0{,}9$ gilt. Für $x \geq 0{,}8341$ gilt dann $P_{n=20;x}(X \geq 15) \geq 0{,}9$. Damit beträgt der Kenntnisstand von Bewerber C mindestens 83,41 %.

e) Gegeben: $n = 20$, $p = 0{,}9$, maximales P. **Gesucht**: k
Betrachte im Tabellen-Menu die Funktion f mit $f(x) = P_{n=20;p=0{,}9}(X = x)$ (Eingabe: Y1 = BinomialPd(x, 20, 0.9))(x: Anzahl der richtigen Fragen) und suche in der Tabelle den k-Wert mit der größten Wahrscheinlichkeit. Für $k = 18$ wird $P(X = k)$ maximal, denn es gilt: $P(X = 17) \approx 0{,}1901 < P(X = 18) \approx 0{,}2851 < P(X = 19) \approx 0{,}2701$. Alternativ kann mit den Erwartungswert $\mu = 20 \cdot 0{,}9 = 18$ argumentiert werden, beim dem aufgrund der Ganzzahligkeit die größte Wahrscheinlichkeit vorliegt.

f) Gegeben: $k \geq 10$, $p = 0{,}75$, $P_{n;p=0{,}75}(X \geq k) \geq 0{,}95$. **Gesucht**: Anzahl der Fragen n
Betrachte im Tabellen-Menu die Funktion f mit $f(x) = P_{n;p=0{,}75}(X \geq 10)$ (Eingabe: Y1 = BinomialCd(10, x, x, 0.75) (x: Anzahl der Fragen) und schaue, für welches x f (hier als Y1) größer als 0,95 wird. Bei $n = 17$ Fragen ist $P(X \geq 10) \approx 0{,}9597 > 95\ \%$. Also müssten mindestens 17 Fragen gestellt werden, damit der Proband mindestens 10 Fragen mit einem Kenntnisstand von 75 % richtig beantwortet.

g) Betrachte die Vierfelder-Tafel (oder ein Baumdiagramm) mit den fettgedruckten Eintragungen für gegebenen Informationen: $P(B) = 68\ \%$ haben sich insgesamt bewährt.

	Test bestanden (A)	Durchgefallen ($\overline{A}$)	
Bewerber bewährt sich (B)	$0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$	0,04	0,68
Bewerber bewährt sich nicht ($\overline{B}$)	0,16	$0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$	0,32
	0,8 = 80 %	**0,2 = 20 %**	

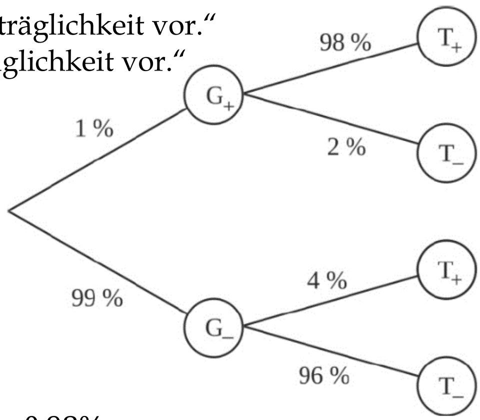
h) Gegeben: $n = 60$, $p = 0{,}6$, $P(X \geq k) \leq 0{,}75$. **Gesucht**: Minimale Anzahl k der richtigen Antworten.
Betrachte im Tabellen-Menu die Funktion f mit $f(x) = P_{n=20;p=0{,}6}(X \geq x)$ (Eingabe: Y1 = BinomialCd(x, 60, 60, 0.6) (x: Anzahl der richtigen Fragen) und suche in der Tabelle den kleinsten k-Wert mit $P(X \geq k) \leq 0{,}75$. Für $k = 33$ gilt $P(X \geq k) \approx 0{,}8221$. Für $k = 34$ gilt $P(X \geq k) \approx 0{,}7464$. Daher ist $k = 34$ der gesuchte Wert.

i) Der Erwartungswert μ beträgt $60 \cdot 0{,}6 = 36$. Die Standardabweichung σ liegt bei $\sqrt{\mu \cdot (1-p)} = \sqrt{36 \cdot 0{,}4} = 1{,}2 \cdot \sqrt{10} \approx 3{,}79 > 3$. Daher lautet die 2σ-Umgebung von 36: $[28{,}41; 43{,}59]$. Betrachte nun die kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(29 \leq X \leq 43) \approx 95{,}3\ \%$. Sollten mehr als 4,7 % der Testergebnisse mit mehr als 43 oder weniger als 29 richtigen Antworten erfolgen, liegt eine signifikante Abweichung vom Erwartungswert vor und der angenommene Schwierigkeitsgrad wäre zu überdenken.

Aufgabe 8

a)

(1) G_+: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor.“
G_-: „Bei der Person liegt keine Glutenunverträglichkeit vor.“
T_+: „Das Testergebnis ist positiv.“
T_-: „Das Testergebnis ist negativ.“



(2) $P(A) = P(G_+ \cap T_+) = 0{,}01 \cdot 0{,}98 = 0{,}0098 = 0{,}98\%$
$P(B) = P(T_-) = P(G_+ \cap T_-) + P(G_- \cap T_-) = 0{,}01 \cdot 0{,}02 + 0{,}99 \cdot 0{,}96 = 0{,}9506 = 95{,}06\%$

(3) $P_{T_+}(G_+) = \frac{P(G_+ \cap T_+)}{P(T_+)} = \frac{0{,}0098}{1-P(T_-)} = \frac{0{,}0098}{0{,}0494} \approx 0{,}19840 = 19{,}84\%$.

b)

(1) Das Modell der binomialverteilten Zufallsgröße ist hier geeignet, da es sich um eine diskrete Zufallsgröße handelt und ein Bernoulli-Prozess mit genau zwei möglichen Ergebnissen („krank“ und „gesund“) vorliegt. Darüber hinaus kann man aufgrund der großen Grundgesamtheit (82 Millionen) und der kleinen Stichprobe (20 000) von einer annähernd gleichbleibenden Wahrscheinlichkeit für die Auswahl einer von Glutenunverträglichkeit betroffenen Person ausgehen.

(2) $P(E_1) = P_{n=20000;p=0{,}01}(X = 190) \approx 2{,}25\%$; $P(E_2) = P_{n=20000;p=0{,}99}(X > 19800) \approx 49{,}05\%$
$P(E_3) = P_{n=20000;p=0{,}01}(240 \leq X \leq 2400) \approx 0{,}31\%$

(3) X ist binomialverteilt mit n = 20000 und p = 0,01. $\mu = E(X) = n \cdot p = 20000 \cdot 0{,}01 = 200$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt: $1 - P(0{,}9 \cdot 200 \leq X \leq 1{,}1 \cdot 200) \approx 0{,}1450 = 14{,}50\ \%$.

c)

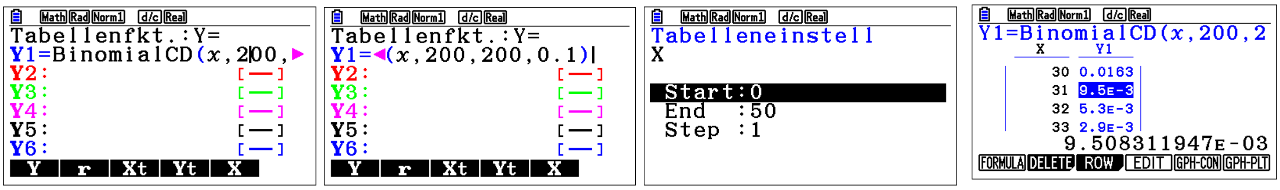
(1)

Folgende Fehlentscheidungen können auftreten:

- Obwohl höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, entscheidet man sich aufgrund des Ergebnisses der Kontrolle dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern. (Fehler 1. Art = α-Fehler)
- Obwohl mehr als 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, entscheidet man sich aufgrund des Ergebnisses der Kontrolle nicht dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern. (Fehler 2. Art = β-Fehler)

(2) Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Teststreifen in der Stichprobe, die unbrauchbar sind. Y ist binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,1. Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 16 unbrauchbare Teststreifen beträgt $P(16 \le Y \le 100) \approx 0{,}0399 = 3{,}99\ \%$.

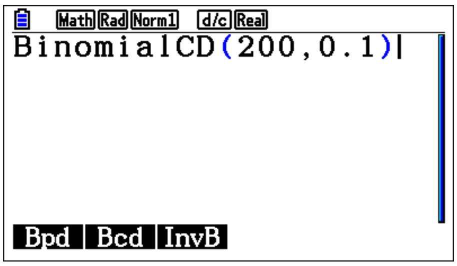
(3) Gegeben: Y: „Anzahl der unbrauchbaren Teststreifen“ ist binomialverteilt mit n = 200 und Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,1 sowie $P_{n=200;p=0,1}(Y \ge k) \le 1{,}33\ \%$. **Gesucht**: Mindestzahl k
Man definiert im Tabellenmenu (MENU 7) eine Funktion f mit $f(k) = P_{n=200;p=0,1}(Y \ge k)$ mit der Trefferzahl k. Es gilt $f(30) = P_{n=200;p=0,1}(Y \ge 30) \approx 0{,}016 > 1{,}33\%$ und $f(31) = P_{n=200;p=0,1}(Y \ge 31) \approx 0{,}001 < 1{,}33\%$. Daher gilt für $k \ge 31$ $P_{n=200;p=0,1}(Y \ge k) \le 1{,}33\ \%$. Die Verwendung des GTR ist im Folgenden dokumentiert:

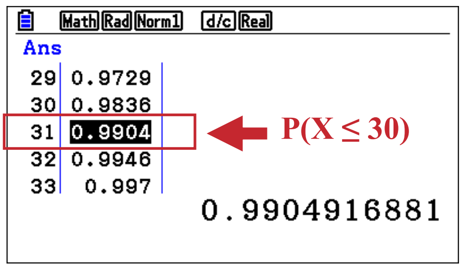


Alternativlösung: Einige Schüler favorisieren die Listenfunktion der kumulierten Wahrscheinlichkeiten in MENU 1. Man müsste die **Ausgangsfrage** umformulieren:

Für welche z der binomialverteilten Größe Y: „Anzahl der unbrauchbaren Teststreifen“ mit p = 0,1 und n = 200 gilt $P(Y \le z) \ge 98{,}67\ \%$?

Für $z \ge 30$ ist $P(Y \le z) \ge 98{,}67\ \%$. Damit kann für alle $k \ge 31$ Folgendes gefolgert werden: $P(Y \ge k) = 1 - P(Y \le k-1) \le 1 - 98{,}67\ \% = 1{,}33\ \%$.





(4) Y ist nun binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,18. $P(Y < 16) = P(Y \le 15) \approx 26{,}30\%$.

d) (1) $\bar{x} = \frac{1}{100} \cdot (4 \cdot 15 + 9 \cdot 16 + 10 \cdot 17 + 48 \cdot 18 + 18 \cdot 19 + 11 \cdot 20) = 18\text{ mg}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{4\cdot(18-15)^2 + 9\cdot(18-16)^2 + 10\cdot(18-17)^2 + 48\cdot(18-18)^2 + 18\cdot(18-19)^2 + 11\cdot(18-20)^2}{100}} = 1{,}2\text{ mg}$$

(2) Das arithmetische Mittel ist konstant geblieben, d. h., die durchschnittliche Indikatormenge pro Teststreifen hat sich nicht verändert. Eine deutliche Veränderung gibt es bei der Standardabweichung, die von 4,3 mg auf 1,2 mg gesunken ist. Eine geringere Streuung bedeutet, dass die Indikatormengen auf den Teststreifen weniger stark von der durchschnittlichen Menge abweichen als vorher. Das Produktionsverfahren ist somit präziser und somit qualitativ besser geworden.

Aufgabe 9

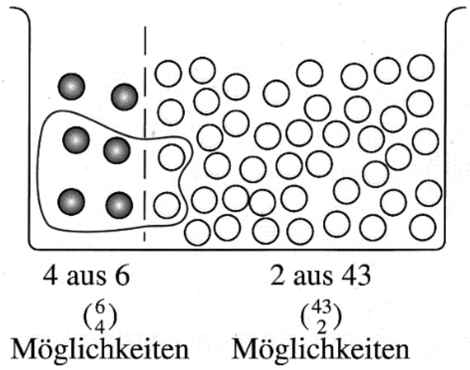
a) Sei X: Anzahl der richtigen Zahlen im „Lotto 6 aus 49“. Es gibt genau $\binom{49}{6}$ unterschiedliche Kombinationen (ohne Beachtung der Reihenfolge). Daher gilt $P(X=6) = \frac{1}{\binom{49}{6}}$.

Alternativ kann mithilfe der sechs Pfadwahrscheinlichkeiten die Wahrscheinlichkeit für sechs Richtige durch das Produkt $\frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{2}{45}\cdot\frac{1}{44} = \frac{6!}{49\cdot48\cdot\ldots\cdot45\cdot44} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$ berechnet werden.

b) Insgesamt sind wegen a) $\binom{49}{6}$ Tipps möglich. Um festzustellen, wie viele dieser Tipps günstig sind für das Ereignis E: „Vier Richtige“ verwendet man folgende Grundidee: Man denkt sich den Inhalt der Urne in zwei Gruppen: einmal die 6 Richtigen und zum anderen die 43 Nieten.

- Ein für E günstiger Tipp besteht aus 4 Richtigen und 2 Nieten.
- Es gibt $\binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten, aus der Gruppe der 6 Richtigen 4 Richtige auszuwählen.
- Analog gibt es $\binom{43}{2} = 903$ Möglichkeiten aus der Gruppe von 43 Nieten 2 Nieten auszuwählen.
- Daher gibt es insgesamt $\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}$ Möglichkeiten, vier Treffer mit zwei Nieten zu einem für E günstigen Tipp zu kombinieren.
- Dividiert man diese Zahl durch die Anzahl der möglichen Kombinationen erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(4\text{ Richtige}) = \frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \approx 0{,}1\ \%$$



$$\Downarrow$$

$$P(\text{„4 Richtige”}) = \frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{15\cdot 903}{13\,983\,816} \approx 0{,}001$$

c) Analog gilt: $P(0\text{ Richtige}) = \frac{\binom{6}{0}\cdot\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} = \frac{\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} \approx 0{,}4360$