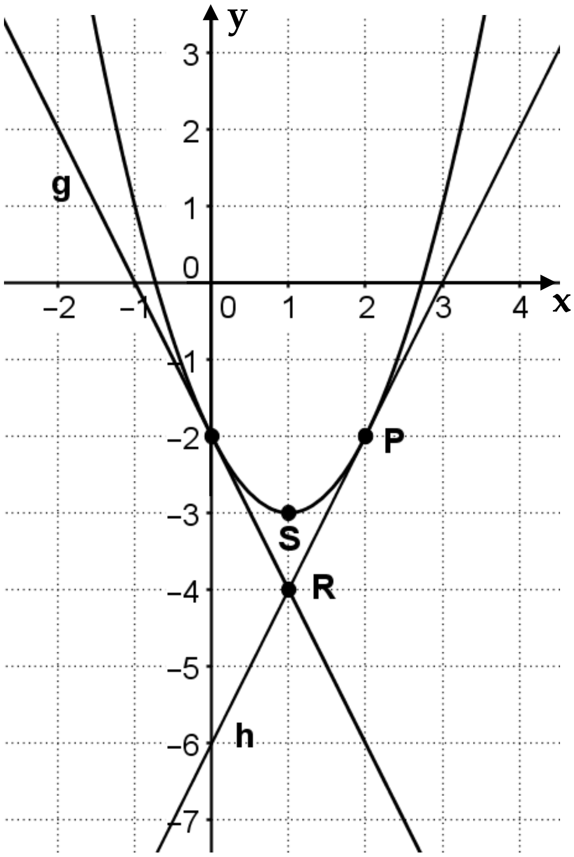
3. Klassenarbeit, 10c, 24.02.2015, Teil 1 (30´)

Name: ______________________________________

Aufgabe 1: Parabel und Geraden im Koordinatensystem

In einem Koordinatensystem sind eine Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2 - 2x - 2$ und eine Geraden g und ein Punkt P gegeben. Die folgende Abbildung stellt die Situation dar.



a) **Zeige** rechnerisch mithilfe einer Punktprobe, dass der Punkt P(2/-2) auf der Parabel liegt, der Punkt Q(-1/-1) jedoch nicht. (4P)

Punktprobe für den Punkt P:
$-2 = 2^2 - 2 \cdot 2 - 2$ ist eine wahre Aussage. Also liegt P auf der Parabel.

Punktprobe für den Punkt Q:
$-1 = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 2 = 1$ ist eine falsche Aussage. Also liegt Q nicht auf der Parabel.

b) **Lies** den Scheitelpunkt S der Parabel **ab** und **gib** damit die Scheitelpunktform der Normalparabel **an**. [Hinweis: Hier muss nicht gerechnet werden.] (2P)

Scheitelpunkt S(1/-3). Scheitelpunktform: $y = (x - 1)^2 + 3$

c) **Wandle** die Normalform der Parabel in die Scheitelpunktform **um**. (3P)

$$\mathbf{y = x^2 - 2x - 2}$$
$$\mathbf{y = x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 - 2}$$
$$\mathbf{y = (x - 1)^2 - 1^2 - 2}$$
$$\mathbf{y = (x - 1)^2 - 3}$$

d) **Gib** näherungsweise die beiden Schnittstellen der Parabel mit der x-Achse (= Nullstellen der Parabelfunktion) **an**. (2P)

$x_1 \approx$ -0,75 und $x_2 \approx$ 2,75 (jeweils ± 0,1 akzeptabel)

e) **Berechne** mithilfe der Diskriminante die Nullstellen der Parabelfunktion. (4P)

$$\mathbf{y = x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow p = -2 \text{ und } p = -2}$$
$$\mathbf{\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-2) = 1 + 2 = 3}$$
$$\mathbf{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = 1 \pm \sqrt{3}}$$
$$\mathbf{\Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{3} \approx 2,70 \text{ und } x_2 = 1 - \sqrt{3} \approx -0,70}$$

f) **Begründe**, warum die Gerade g die Gleichung y = −2x − 2 hat. (2P)

Die Gerade g hat die Steigung -2 und schneidet die y-Achse bei -2.

g) **Zeichne** die Gerade h mit der Gleichung y = 2x − 6 in das obige Koordinatensystem **ein**. (2P)

h) **Berechne** den Schnittpunkt R der Geraden g: y = −2x − 2 und h: y = 2x − 6 durch Lösen des entsprechenden linearen Gleichungssystems. (4P)

Durch Gleichsetzen der beiden Gleichungen erhält man:

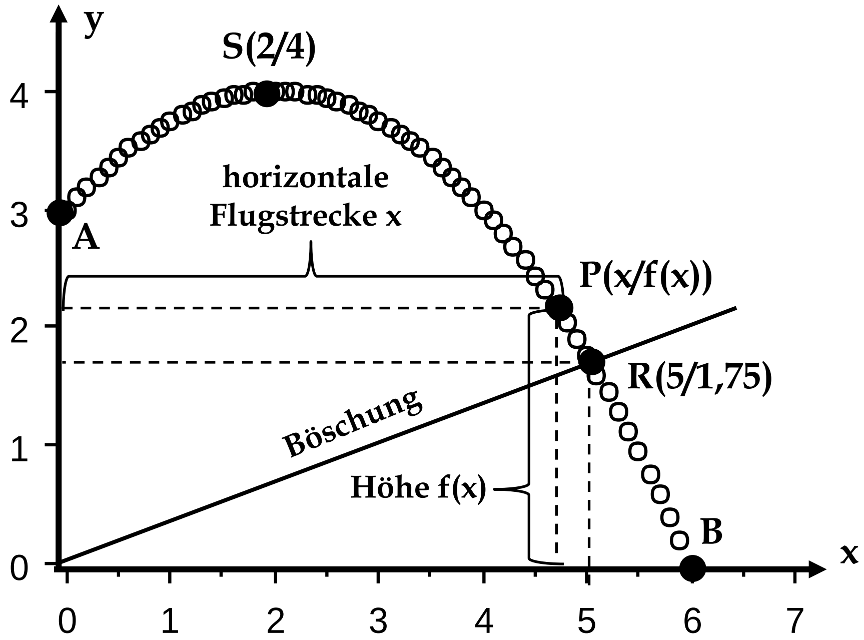
$$\mathbf{-2x - 2 = 2x - 6 \Leftrightarrow 4 = 4x \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow R(1/-4)}$$

3. Klassenarbeit, 10c, 24.02.2015, Teil 2 (60´)

Name: ______________________________

Aufgabe 2 (Kugelstoßen)(20P)

Beim Kugelstoßen durchläuft die Kugel näherungsweise eine Parabelbahn. In unserem Fall wird die Bahn durch eine quadratische Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}25 \cdot x^2 + x + 3$ beschrieben. Dabei gibt *f(x)* die *Höhe der Kugel über dem Boden* nach einer *horizontalen Flugstrecke x* (jeweils in Metern) an. Die folgende Abbildung beschreibt den Sachverhalt des Kugelstoßes.



a) **Gib** die Koordinaten des Abstoßpunktes A sowie des Punktes B **an**, an dem die Kugel auf dem Boden aufkommt. (2P)

A(0/3) und B(6/0)

b) **Berechne** f(5) und **gib** die Bedeutung dieses Wertes in der obigen Situation **an**. (3P)

$$\mathbf{f(5) = -0{,}25 \cdot 5^2 + 5 + 3 = 1{,}75\ [m]}$$

beschreibt die Höhe der Kugel über dem Boden nach einer waagerechten Entfernung von 5 Metern.

c) **Ermittle** die Nullstellen der Parabelfunktion f und **gib** die Bedeutung dieser Nullstellen im obigen Sachkontext **an**. [Zur Erinnerung: Bringe die quadratische Gleichung zuerst in die Normalform einer quadratischen Gleichung.] (6P)

$$\mathbf{-0,25 \cdot x^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \; (p = -4, q = -12)}$$

$$\mathbf{D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-12) = 16}$$

$$\mathbf{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{16} = 2 \pm 4}$$

$$\mathbf{\Rightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 6}$$

Die rechte Nullstelle beschreibt die Stoßweite, die linke Nullstelle hat keine Bedeutung im Sachkontext. Sie entsteht, wenn man den Parabelverlauf vor dem Abstoß bis zum Boden verlängern würde.

d) **Zeichne** in die obige Abbildung den höchsten Punkt S der Flugbahn **ein** und **lies** seine Koordinaten **ab**. (2P)

S(2/4)

e) **Begründe**, dass die Parabelbahn des obigen Kugelstoßes auch durch die Funktionsgleichung $y = -0{,}25 \cdot (x - 2)^2 + 4$ beschrieben werden kann. (3P)

$$\mathbf{y = -0,25 \cdot (x-2)^2 + 4 = -0,25 \cdot (x^2 - 4x + 4) + 4}$$

$$\mathbf{= -0,25 \cdot x^2 + x - 1 + 4 = -0,25 \cdot x^2 + x + 3 = f(x)}$$

Alternativ könnte auch mit dem Scheitelpunkt S(2/4) (x-Wert ist Mittelwert der Nullstellen -2 und 6) und dem gleichen Streckfaktor a = -0,25 argumentiert werden. Auch ein Umformen von f(x) in die Scheitelpunktform ist denkbar.

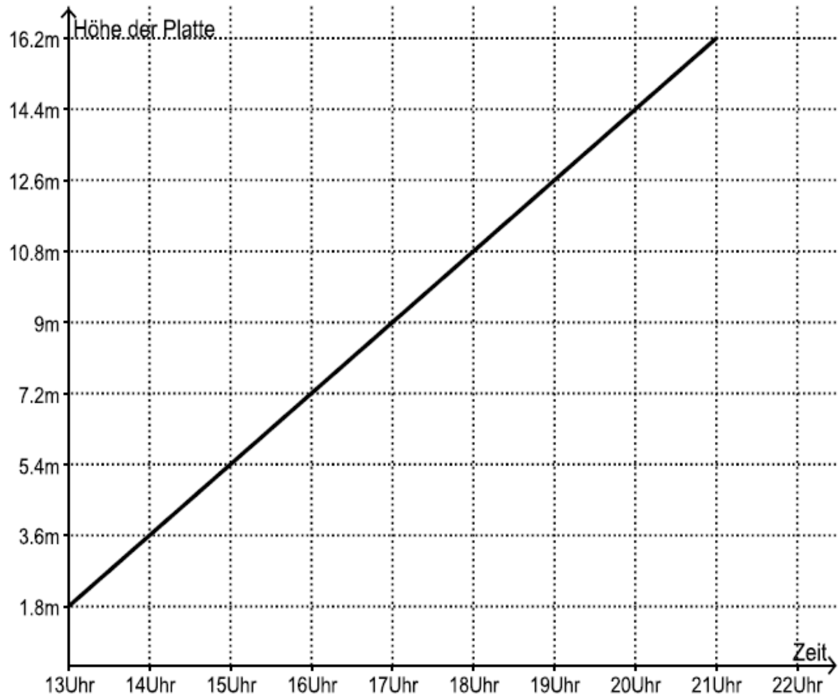
f) Der Kugelstoßer stößt die Kugel im Training gegen eine Böschung, die gleichmäßig ansteigt. Die Böschung beginnt im Nullpunkt und erreicht nach 10 Metern eine Höhe von 3,5 Metern. **Zeichne** die Böschung in die obige Zeichnung **ein** und **bestimme** ihre Funktionsgleichung. **Gib an**, in welcher Höhe die Kugel auf die Böschung trifft. (4P)

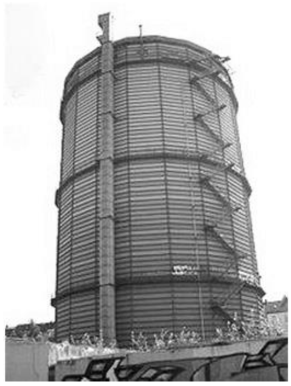
$$\mathbf{y = \frac{3,5}{10} \cdot x = 0,35 \cdot x}$$

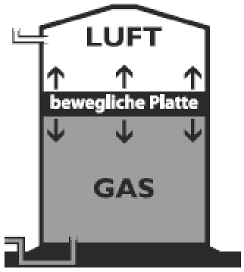
Die Kugel trifft in einer Höhe von 1,75 Metern auf die Böschung.

Aufgabe 3 (Gastank) (10P)

Am Boden eines Gastanks gibt es eine bewegliche Platte, die sich beim Füllen des Behälters mit Gas hebt. Wenn der Gastank vollständig gefüllt ist, befindet sich die Platte 50 m über der Grundfläche. Im folgenden Koordinatensystem wird das Füllen des Gasbehälters dargestellt.







a) **Gib an**, auf welcher Höhe sich die Platte um 15 Uhr befindet. **Bestimme** den Zeitpunkt, an dem die Platte auf einer Höhe von 9 m ist. (2P)

Um 15 Uhr befindet sich die Platte in einer Höhe von 5,40 m. Um 17 Uhr hat die Platte eine Höhe von 9 m erreicht.

b) Der Gastank war komplett leer und wurde gleichmäßig gefüllt. **Gib an**, um wieviel Uhr das Füllen des Gastanks begonnen hat. **Begründe** deine Angabe. (3P)

Das gleichmäßige Füllen hat um 12 Uhr begonnen, da die Platte pro Stunde um 1,80 m steigt und die Platte um 13 Uhr eine Höhe von 1,80 m hatte.

Alternativ: Verlängerung der Gerade zur Zeitachse und Ablesen der Schnittstelle mit der Zeitachse.

c) Die Grundfläche des Gasttanks ist annähernd kreisförmig und hat einen Durchmesser von 37,60 m. **Zeige**, dass die Grundfläche ca. 1100 m² groß ist und **erkläre**, dass pro Stunde ein Volumen von ca. 1980 m³ Gas in den Gastank einströmen kann. (5P)

$\mathbf{d = 37{,}60\ m \Rightarrow r = 18{,}80\ m \Rightarrow G = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 18{,}80^2 \approx 1100\ [m^2]}$

Pro Stunde steigt die Platte um 1,8 m. Daher beträgt das Volumen V des Gases V = $\mathbf{1100\ m^2 \cdot 1{,}8\ m = 1980\ m^3}$

Aufgabe 4 (Kaffeevollautomat) (15P)

Der Betreiber eines Bistros mit durchschnittlich 450 Besuchern pro Tag möchte einen Kaffeevollautomaten anschaffen. Er kauft eine entsprechende Maschine für 1500 €. Für einen einfachen Espresso benötigt man ca. 8 g Kaffeebohnen, der in 1-kg-Packungen für 10 € gekauft werden kann. Zusätzlich entstehen für 100 Espresso noch 10 € Nebenkosten (für Kekse, Zucker, Strom, Wasser sowie Reinigungs- und Entkalkungsmittel).

a) Im Preis für 1 kg Kaffee sind 7 % Mehrwertsteuer enthalten. Wie viel kosten 1 kg Kaffee ohne Mehrwertsteuer? **Notiere** deine Rechnung. (3P)

10 € entsprechen 107 %. Gesucht ist der Grundwert, der 100 % entspricht. Den Grundwert erhält man, indem man 10 € durch 107 dividiert und dann mit 100 multipliziert. Also: $\mathbf{\frac{10}{107} \cdot 100 \approx 9{,}35}$ **€**

b) **Zeige**, dass das Bistro für jeweils 100 Espresso mit Kosten von 18 € (für die Kaffeebohnen und die oben angegebenen Nebenkosten) rechnen muss. (4P)

1 kg Kaffeebohnen kosten 10 €. 1 g Kaffeebohnen kostet also 1 Cent. Damit kosten die Bohnen für einen Espresso 8 Cent. Die Bohnen für 100 Espresso kosten 8 €. Daher betragen die Gesamtkosten für 100 Portionen 18 €.

Berücksichtigt man die Anschaffungskosten für den Kaffeevollautomat, dann können die gesamten Kosten für x Espresso mit der Funktionsgleichung $K(x) = 1500 + 0{,}18 \cdot x$ berechnet werden. Bei einem Verkaufspreis von 1,80 € können die Einnahmen mit der Funktionsgleichung $E(x) = 1{,}80 \cdot x$ ermittelt werden.

c) **Begründe**, dass die beiden Funktionsgleichungen die Kosten bzw. die Einnahmen beschreiben. (3P)

Kostenfunktion: Da 100 Espresso 18 € kosten, kostet ein Espresso 0,18 €. Die Anschaffungskosten betragen 1500 €. Damit sind die Gesamtkosten K(x) für x Espresso $K(x) = 1500\text{ €} + 0{,}18 \cdot x$.

Einnahmen: Die Einnahmen betragen pro Espresso 1,80 €. Damit sind die Gesamteinnahmen E(x) für x Espresso $E(x) = 1{,}80 \cdot x$.

d) **Untersuche** mit einem Verfahren Deiner Wahl, ab welcher Anzahl verkaufter Espresso die Einnahmen höher sind als die Kosten. (5P)

$$1500 + 0{,}18 \cdot x = 1{,}80 \cdot x \Leftrightarrow 1{,}62 \cdot x = 1500 \Leftrightarrow x \approx 926$$

Ab dem 926. Espresso macht das Bistro Gewinn.

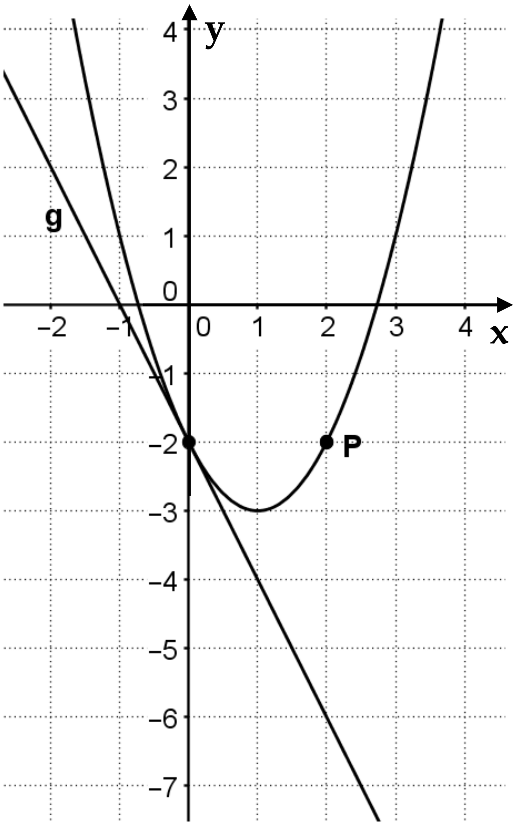
Alternativ: Zeichnerische Lösung oder Probieren.

3. Klassenarbeit, 10c, 24.02.2015, Teil 1 (30´)

Name: ____

Aufgabe 1: Parabel und Geraden im Koordinatensystem

In einem Koordinatensystem sind eine Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2 - 2x - 2$ und eine Geraden g und ein Punkt P gegeben. Die folgende Abbildung stellt die Situation dar.



a) **Zeige** rechnerisch mithilfe einer Punktprobe, dass der Punkt P(2/-2) auf der Parabel liegt, der Punkt Q(-1/-1) jedoch nicht. (4P)

b) **Lies** den Scheitelpunkt S der Parabel **ab** und **gib** damit die Scheitelpunktform der Normalparabel **an**. [Hinweis: Hier muss nicht gerechnet werden.] (2P)

c) **Wandle** die Normalform der Parabel in die Scheitelpunktform **um**. (3P)

d) **Gib** näherungsweise die beiden Schnittstellen der Parabel mit der x-Achse (= Nullstellen der Parabelfunktion) **an**. (2P)

e) **Berechne** mithilfe der Diskriminante die Nullstellen der Parabelfunktion. (4P)

f) **Begründe**, warum die Gerade g die Gleichung $y = -2x - 2$ hat. (2P)

g) **Zeichne** die Gerade h mit der Gleichung $y = 2x - 6$ in das obige Koordinatensystem **ein**. (2P)

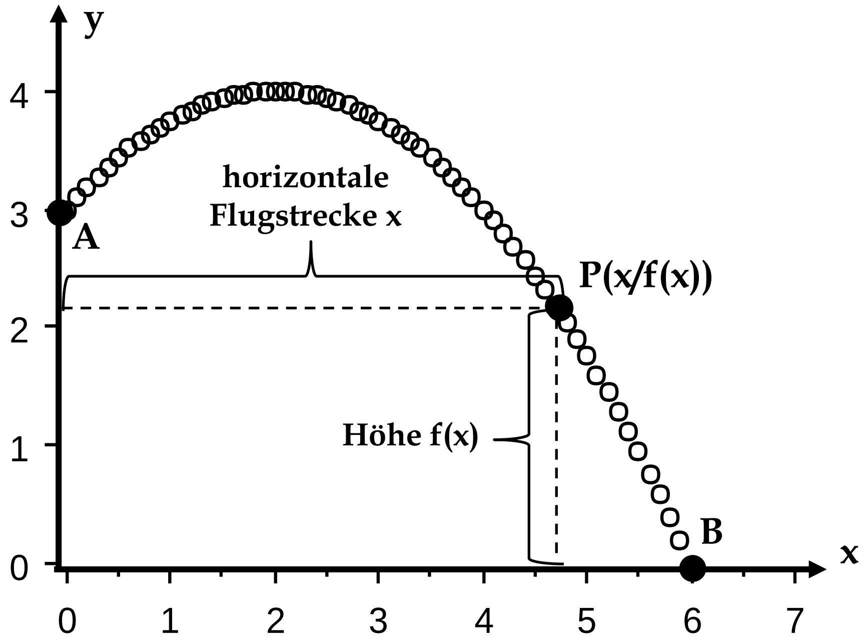
h) **Berechne** den Schnittpunkt R der Geraden g: $y = -2x - 2$ und h: $y = 2x - 6$ durch Lösen des entsprechenden linearen Gleichungssystems. (4P)

3. Klassenarbeit, 10c, 24.02.2015, Teil 2 (60´)

Name: ______________________________________

Aufgabe 2 (Kugelstoßen)(20P)

Beim Kugelstoßen durchläuft die Kugel näherungsweise eine Parabelbahn. In unserem Fall wird die Bahn durch eine quadratische Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}25 \cdot x^2 + x + 3$ beschrieben. Dabei gibt *f(x)* die *Höhe der Kugel über dem Boden* nach einer *horizontalen Flugstrecke x* (jeweils in Metern) an. Die folgende Abbildung beschreibt den Sachverhalt des Kugelstoßes.



a) **Gib** die Koordinaten des Abstoßpunktes A sowie des Punktes B **an**, an dem die Kugel auf dem Boden aufkommt. (2P)

b) **Berechne** f(5) und **gib** die Bedeutung dieses Wertes in der obigen Situation **an**. (3P)

c) **Ermittle** die Nullstellen der Parabelfunktion f und **gib** die Bedeutung dieser Nullstellen im obigen Sachkontext **an**. [Zur Erinnerung: Bringe die quadratische Gleichung zuerst in die Normalform einer quadratischen Gleichung.] (6P)

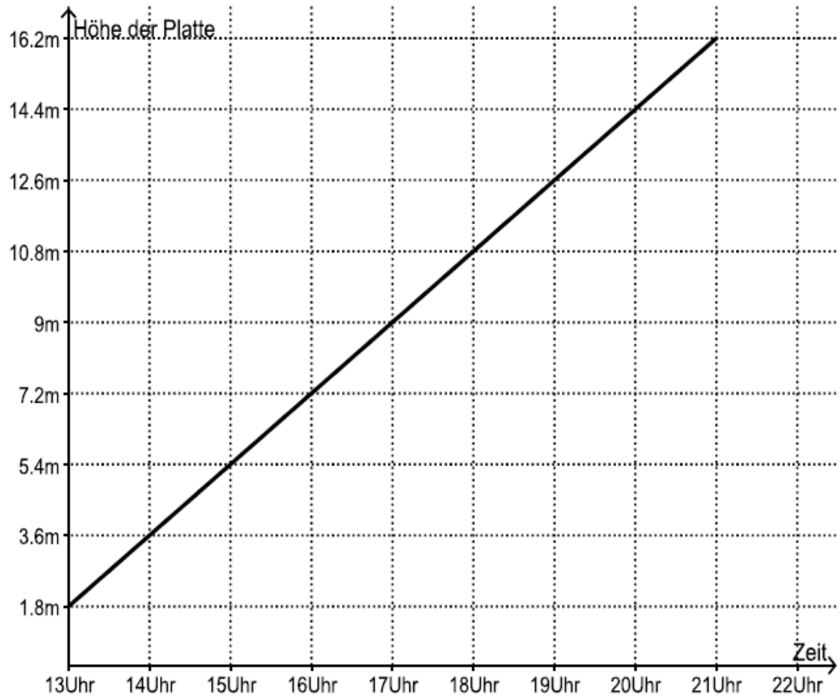
d) **Zeichne** in die obige Abbildung den höchsten Punkt S der Flugbahn **ein** und **lies** seine Koordinaten **ab**. (2P)

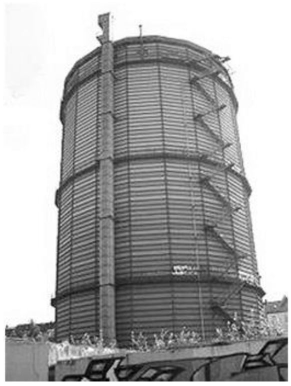
e) **Begründe**, dass die Parabelbahn des obigen Kugelstoßes auch durch die Funktionsgleichung $y = -0{,}25 \cdot (x - 2)^2 + 4$ beschrieben werden kann. (3P)

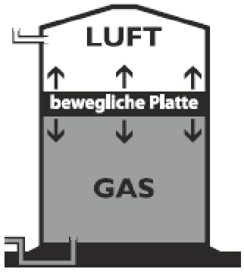
f) Der Kugelstoßer stößt die Kugel im Training gegen eine Böschung, die gleichmäßig ansteigt. Die Böschung beginnt im Nullpunkt und erreicht nach 10 Metern eine Höhe von 3,5 Metern. **Zeichne** die Böschung in die obige Zeichnung **ein** und **bestimme** ihre Funktionsgleichung. **Gib an**, in welcher Höhe die Kugel auf die Böschung trifft. (4P)

Aufgabe 3 (Gastank) (10P)

Am Boden eines Gastanks gibt es eine bewegliche Platte, die sich beim Füllen des Behälters mit Gas hebt. Wenn der Gastank vollständig gefüllt ist, befindet sich die Platte 50 m über der Grundfläche. Im folgenden Koordinatensystem wird das Füllen des Gasbehälters dargestellt.







a) **Gib an**, auf welcher Höhe sich die Platte um 15 Uhr befindet. **Bestimme** den Zeitpunkt, an dem die Platte auf einer Höhe von 9 m ist. (2P)

b) Der Gastank war komplett leer und wurde gleichmäßig gefüllt. **Gib an**, um wieviel Uhr das Füllen des Gastanks begonnen hat. **Begründe** deine Angabe. (3P)

c) Die Grundfläche des Gasttanks ist annähernd kreisförmig und hat einen Durchmesser von 37,60 m. **Zeige**, dass die Grundfläche ca. 1100 m^2 groß ist und **erkläre**, dass pro Stunde ein Volumen von ca. 1980 m^3 Gas in den Gastank einströmen kann. (5P)

Aufgabe 4 (Kaffeevollautomat) (15P)

Der Betreiber eines Bistros mit durchschnittlich 450 Besuchern pro Tag möchte einen Kaffeevollautomaten anschaffen. Er kauft eine entsprechende Maschine für 1500 €. Für einen einfachen Espresso benötigt man ca. 8 g Kaffeebohnen, der in 1-kg-Packungen für 10 € gekauft werden kann. Zusätzlich entstehen für 100 Espresso noch 10 € Nebenkosten (für Kekse, Zucker, Strom, Wasser sowie Reinigungs- und Entkalkungsmittel).

a) Im Preis für 1 kg Kaffee sind 7 % Mehrwertsteuer enthalten. Wie viel kosten 1 kg Kaffee ohne Mehrwertsteuer? **Notiere** deine Rechnung. (3P)

b) **Zeige**, dass das Bistro für jeweils 100 Espresso mit Kosten von 18 € (für die Kaffeebohnen und die oben angegebenen Nebenkosten) rechnen muss. (4P)

Berücksichtigt man die Anschaffungskosten für den Kaffeevollautomat, dann können die gesamten Kosten für x Espresso mit der Funktionsgleichung $K(x) = 1500 + 0{,}18 \cdot x$ berechnet werden. Bei einem Verkaufspreis von 1,80 € können die Einnahmen mit der Funktionsgleichung $E(x) = 1{,}80 \cdot x$ ermittelt werden.

c) **Begründe**, dass die beiden Funktionsgleichungen die Kosten bzw. die Einnahmen beschreiben. (3P)

d) **Untersuche** mit einem Verfahren Deiner Wahl, ab welcher Anzahl verkaufter Espresso die Einnahmen höher sind als die Kosten. (5P)

Bewertungsbogen von			**Wie schwer? (I bis VI)**	**M**	**P**	**A**	**W**	**A**	**G**	**F**	**S**	**Mögliche Punktzahl**		**Erreichte Punktzahl**
1	a)	Du zeigst …	**I**					×		×		**4**		
	b)	Du liest ab … und gibst an …	**I**			×			×			**2**		
	c)	Du wandelst um …	**III**					×		×		**3**		
	d)	Du gibst an …	**I**			×				×		**2**		
	e)	Du berechnest …	**III**					×		×		**4**		
	f)	Du begründest …	**II**			×				×		**2**		
	g)	Du zeichnest …	**II**				×			×		**2**		
	h)	Du berechnest …	**III**					×		×		**4**		
		Punktzahl (Teil 1)										**23**		
2	a)	Du gibst an …	**I**			×						**2**	**20**	
	b)	Du berechnest …	**II**			×		×		×		**3**		
	c)	Du ermittelst … und gibst an …	**IV**	×		×		×		×		**6**		
	d)	Du zeichnest ein … und liest ab …	**I**			×	×					**2**		
	e)	Du begründest …	**IV**			×		×		×		**3**		
	c)	Du zeichnest ein … bestimmst … und gibst an …	**IV**			×	×			×		**4**		
3	a)	Du gibst an ... und bestimmst …	**II**			×				×		**2**	**10**	
	b)	Du gibst an … und begründest …	**II**			×				×		**3**		
	c)	Du zeigst … und erklärst …	**IV**	×		×		×	×	×		**5**		
4	a)	Du notierst …	**II**					×		×		**3**	**15**	
	b)	Du zeigst …	**III**			×		×		×		**4**		
	c)	Du begründest …	**III**			×		×		×		**3**		
	d)	Du untersuchst …	**V**	×		×		×		×		**5**		
		Punktzahl (Teil 2)										**45**		
F		**Umgang mit Maßeinheiten**										**2**	**7**	
		Darstellungsleistung (genaues Zeichnen, äußere Form, übersichtliche Darstellung, begleitender Kommentar)										**5**		

Punktzahl (Teil 1)	**23**	
Punktzahl (Teil 2)	**45**	
Formpunkte (Umgang mit Einheiten + Darstellungsleistung)	**7**	
Gesamtpunktzahl (75-63 = 1, 62-52 = 2, 51-41 = 3, 40-30 = 4, 29-8 = 5, <8 = 6)	**75**	
Solingen, den 24.02.2015	Note	