2016

Fibonacci-Zahlenfolge und der Goldene Schnitt

Julian Neumann

Klasse 12 B

24.02.2016

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Immer wieder stößt man in seinem alltäglichen Leben auf die Fibonacci-Zahlen oder den Goldenen Schnitt. Man findet die Fibonacci-Zahlen bei den Blüten von Sonnenblumen oder bei Früchten, wie zum Beispiel die der Ananas. Den Goldenen Schnitt hingegen entdeckt man bei Bauwerken oder in der Kunst. Genau das ist der Grund warum ich mich für dieses Thema entschieden habe.

Das Ziel dieser Facharbeit ist es den Goldenen Schnitt und die Fibonacci-Zahlen darzustellen und zu erklären. Außerdem geht es um die Herleitung der Zahl φ über den Goldene Schnitt und die Fibonacci-Zahlen. Des Weiteren werde ich einen Beweis liefern, welcher belegen wird, dass dieZahl φ auf beide Wege hergeleitet werden kann und auch bei beiden Wegen dieselbe Zahl herauskommt.

2 Sachdarstellung

Historisches zu Fibonacci:

Der eigentliche Name von Fibonacci lautete Leonardo von Pisa, dennoch war er hauptsächlich unter dem Name Fibonacci bekannt. Dieser ist eine Kurzform von „Filius Bonacci“. Er wurde vermutlich zwischen 1170 und 1180 in Pisa geboren, sein genaues Geburtsdatum ist jedoch nicht bekannt. Fibonacci war ein italienischer Mathematiker und gehörte zu den Bedeutendsten des Mittelalters. Da sein Vater ein Pisaer Kaufmann war und viel Handel mit arabischen Ländern trieb, war Fibonacci auf vielen Handelsreisen nach Ägypten, Algerien, Syrien, Griechenland und Sizilien dabei und lernte hier bis zu der damaligen Zeit alle bekannten Rechenverfahren kennen.

In seinem 459 Seiten langem selbst verfassten Buch „Liber Abaci“, welches 1202 veröffentlicht wurde, stellte er neben dem sehr berühmten Kaninchenproblem auch noch viele weitere Probleme dar. Außerdem geht er hier auf die nach ihm benannte „Fibonacci-Zahlenfolge“ ein. Des Weiteren beschreibt er in diesem Buch die arabischen Zahlen, welche später auch eingeführt wurden. Weiterhin geht es in diesem Buch um die indische Rechenkunst.

Seine zweite Edition „Liber Abaci“, welche 1228 erschienen ist, ist das bekannteste Buch von ihm. Weitere Werke von ihm sind die Bücher „Flos“ aus dem Jahr 1225, „Liber quadratorum“ ebenfalls aus dem Jahr 1225 und „Practica geometriae“ aus dem Jahr 1220. Alles was Fibonacci in diesen Bücher niederschrieb war bis zu dieser Zeit noch unbekannt und konnte von den meisten nicht verstanden werden.

Unbekannte Begriffe:

Rekursion/rekursiv = Man bezeichnet etwas als rekursiv, wenn man das nächste Glied einer Zahlenfolge durch die beiden Glieder davor erlangt.

konvergieren = konvergieren bedeutet, dass sich Zahlen an einen Wert annähren.

http://geboren.am/person/fibonacci (IQ-13)

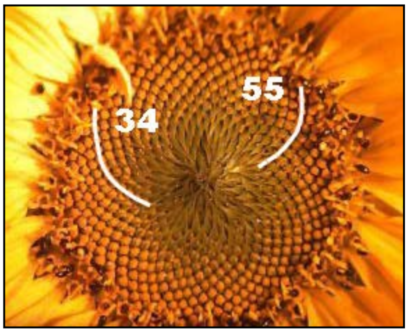
http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/fibonacci.html (IQ-14)

http://www.ijon.de/mathe/fibonacci/node8.html (IQ-15)

3 Die Fibonacci-Zahlen

Auf die Fibonacci-Zahlen stößt man immer wieder in der Natur. Zum Beispiel wenn man die Spiralen einer Sonnenblume zählt, kommt man zu einer überraschenden Erkenntnis. Alle rechtsdrehenden Spiralen ergeben zusammen 34, während man bei den linksdrehenden Spiralen auf 55 kommt. Beides sind unmittelbar aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen. (Siehe **Abb 1**)

Doch dies ist nicht das einzige Beispiel, wo die Fibonacci-Zahlen eine Rolle spielen und vorkommen. Auch bei den Mustern von Früchten und Blütenständen, wie zum Beispiel die, der Ananas entdeckt man diese Zahlen ebenfalls. (Siehe **Abb. 2**)



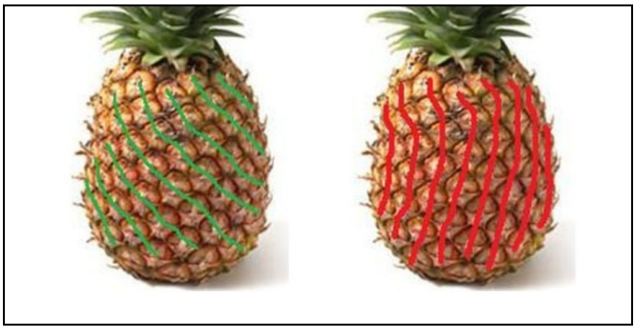


Abb. 1: Sonnenblume (IQ-1)

Abb. 2: Ananas (IQ-2)

Des Weiteren kann man sagen, dass die Fibonacci-Zahlen in einer engen Verbindung mit dem Goldenen Schnitt stehen, doch dazu im weiteren Verlauf dieser Facharbeit mehr. Erst einmal muss geklärt werden, wie die Fibonacci-Zahlen definiert werden.

Definition:

Die Fibonacci-Zahlenfolge ist eine unendlich lange Folge von reelen Zahlen.

$$1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , \ldots$$

Das jeweils nächste Glied dieser Fibonacci-Zahlenfolge erhält man, wenn man die beiden Glieder davor miteinander addiert. Da sich das nächste Glied durch die Vorwerte ableitet, bezeichnet man dies auch als Rekursion.

Ausführlicher schreibt man die Zahlenfolge so:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13$$

Jede einzelne Zahl in dieser Zahlenfolge wird nummeriert.
Als allgemeine Formel zur Berechnung einer beliebigen Fibonacci-Zahl schreibt man:

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ unter der Bedingung $F_1 = 1$ und $F_2 = 1$

Das ist das Bildungsgesetz. Es besagt nichts anderes, als das die nächste Fibonacci-Zahl sich aus der Addition der beiden vorhergegangenen Fibonacci-Zahlen ergibt.

→Erklärung zur Formel:
Wie schon oben gesagt wurde jedes einzelne Glied dieser Zahlenfolge durchnummeriert. Da es eine Zahlenfolge aus reelen Zahlen ist, steht F_n für eine reele Zahl. „n“ gibt also die Zahl an der n -ten Stelle in der Zahlenfolge an. F_{n-1} gibt dementsprechend den Vorgänger von F_n an und F_{n+1} folglich den Nachfolger von F_n.

Ellenbracht, F., B. Langenbruch: Architektur des Lebens. Cornelsen Verlag, Berlin 2003, S. 44-49

3.1 Kaninchenproblem

Anhand einer Aufgabe, welche Fibonacci 1202 in seinem ersten Buch „Liber abaci“, stellte, lässt sich die Fibonacci-Zahlenfolge etwas leichter verstehen.Bei dieser Aufgabe hat man als Ausgangssituation ein junges Kaninchenpaar. Alle Kaninchen in dieser Aufgabe sind unsterblich und sind ab dem zweiten Monat fruchtbar. Nachdem die Kaninchen reif sind, werfen sie jeden Monat ein weiteres Kaninchenpaar, welches zwei Monate später ebenfalls weitere werfen wird. (Siehe **Abb. 3**)

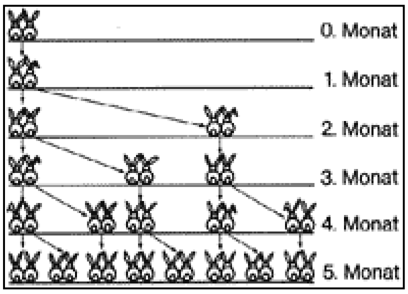


Abb. 3: Stammbaum der Kaninchen (IQ-3)

Monat 0: 1 Kaninchenpaar → Im ersten Monat gibt es nur ein Kaninchenpaar, da dies die Ausgangssituation ist.

Monat 1: 1 Kaninchenpaar → Erst ab dem zweiten Monat ist das Kaninchenpaar fruchtbar, davor ist es noch nicht in der Lage Junge zu werfen.

Monat 2: 2 Kaninchenpaare → Aufgrund der zwei vergangenen Monate ist das Kaninchenpaar reif und wirft deshalb ein weiteres Paar.

Monat 3: 3 Kaninchenpaare → Das erste Kaninchenpaar wirft ein weiteres Paar, das 2. Kaninchenpaar kann jedoch noch kein weiteres werfen, deshalb kommt nur ein weiteres dazu.

Monat 4: 5 Kaninchenpaare → Das erste Kaninchenpaar wirft erneut ein weiteres Paar. Mittlerweil ist das 2. Kaninchenpaar fruchtbar geworden und wirft ebenfalls ein Paar. Das 3. Kaninchenpaar ist noch unfruchtbar. Zu den vorher 3 Kaninchenpaaren kommen also 2 weitere dazu.

Je mehr Monate vergehen, desto unübersichtlicher wird es für einen den Überblick zu behalten, welches Kaninchenpaar schon Junge werfen kann und welches nicht.
Im Prinzip ist es jedoch relativ einfach die Zahl der Kaninchenpaare zu ermitteln. Man weiß, dass die Kaninchen ab dem zweiten Monat an erst fruchtbar werden. Aus diesem Grund werden die Kaninchenpaare, die zwei Monate vor dem gesuchten Monat vorhanden waren zu den Kaninchenpaaren einen Monat vor dem gesuchten Monat dazu addiert. Das liegt daran, dass genau die Kaninchen, zwei Monate vor dem gesuchten Monat, die Kaninchen sind, die in dem Monat vor dem gesuchten Monat, in der Lage sind weitere Kaninchenpaare zu werfen. Da die Kaninchenpaare die werfen können in dem Monat vor dem gesuchten Monat schon mit berücksichtigt wurden, muss man nur noch ihre Anzahl einmal dazu addieren, da diese der Anzahl der neugeborenen Kaninchenpaare im gesuchten Monat entspricht.

Man kann auch folgende Formel zur Berechnung der Kaninchenpaare in einem beliebigen Monat verwenden:

$$Kp_n = Kp_{n-1} + Kp_{n-2}$$

Wie man unschwer erkennt, entspricht diese Formel auch der Formel, die zur Berechnung einer beliebigen Fibonacci-Zahl an der n -ten Stelle verwendet wird.

Ellenbracht, F., B. Langenbruch: Architektur des Lebens. Cornelsen Verlag, Berlin 2003, S. 48

3.2 Herleitung der Zahl φ über die Fibonacci-Zahlenfolge

Teilt man zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen, also $\frac{F_n}{F_{n-1}}$, so erhält man als Ergebnis ungefähr die Zahl φ. Es gilt also $\varphi \approx \frac{F_n}{F_{n-1}}$. Hierbei gilt, umso größer die Fibonacci-Zahlen sind, umso genauer kommt man an die Zahl φ heran. Dazu sagt man auch in der Mathematik, dass die Quotienten der Fibonacci-Zahlen Richtung φ konvergieren, umso größer sie werden.

Die Zahl φ lässt sich wie folgt ermitteln:

<u>Allgemein gilt:</u>

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ | $\div F_{n-1}$

$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}$ | Andere Schreibweise

$\varphi = 1 + \frac{1}{\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}}$ | für $\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}$ gilt ebenfalls dasselbe, wie für $\frac{F_n}{F_{n-1}}$.

Es gilt jedoch **<u>nicht</u>**, $\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}$, sondern $\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} = 1 + \frac{F_{n-3}}{F_{n-2}}$, da weiterhin alles im Verhältnis zueinander bleiben muss

$\varphi = 1 + \frac{1}{1+\frac{F_{n-3}}{F_{n-2}}}$ | Andere Schreibweise

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{F_{n-2}}{F_{n-3}}}}$$

$$\varphi = \cdots$$

Das ganze kann man nun unendlich lange fortführen, da für $\frac{F_{n-2}}{F_{n-3}}$ gilt $\frac{F_{n-2}}{F_{n-3}} = 1 + \frac{F_{n-4}}{F_{n-3}}$. Für jeden weiteren Bruch würde dasselbe gelten, außer, dass das n jeweils um einen subtrahiert wird.

Anhand folgender Beispiele wird es klarer, dass die Quotienten Richtung φ konvergieren.

Beispiele :

$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ 1,500

$\frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ $\rightarrow$ 1,666

$\frac{8}{5} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$ $\rightarrow$ 1,600

$\frac{13}{8} = \cdots$ $\rightarrow$ 1,625

$\frac{21}{13} = \cdots$ $\rightarrow$ 1,615

Wie man an diesen Beispielen schon erkennen kann, nähert man sich hier einem Wert, der immer genauer wird, umso größer die Fibonacci-Zahlen werden. Bei diesem Wert handelt es sich, wie schon oben erwähnt um die Zahl φ. Dennoch kann man mithilfe von diesen Beispielen nicht den exakten Wert für φ ermitteln.

Um nun genau an den Wert von φ zu gelangen, setzen wir φ gleich x. Wenn man den Bruch unendlich lange fortführen würde, so würde man den exakten Wert für φ herausbekommen. Deshalb kann man schreiben:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\vdots}}}}}$$

Diese Gleichung kann man auch etwas anders schreiben:
Das liegt daran, dass unter dem Bruchstrich von 1 genau dasselbe steht, wie bei der Gleichung von x, da beides unendlich lang ist.

$$x = 1 + \frac{1}{\underbrace{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\vdots}}}}}_{x}}$$

Man setzt also für $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\vdots}}}}$ nur x ein.

Daraus ergibt sich folgende Gleichung:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Nun rechnet man mit $x = 1 + \frac{1}{x}$ weiter und wendet letztlich die pq-Formel an:

Schritt 1:

Als erstes versucht man alle Komponenten auf eine Seite zu bringen und und multipliziert anschließend mit x, um das x unter dem Bruchstrich weg zubekommen.

$x = 1 + \frac{1}{x}$ | -1

$x - 1 = \frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{2}$

$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$ | $\cdot x$

Schritt 2:

Anschließend kann man die pq-Formel anwenden und löst diese auf.

$x^2 - 1x - 1 = 0$ | pq-Formel anwenden

$x_{1/2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-1)}$ | zusammenfassen

$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$ | auf denselben Nenner bringen

$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}}$ | weiter zusammen fassen

$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$

$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\boldsymbol{x_1 = 1,618033989}$ → Dieses Ergebnis gibt uns den genauen Wert für φ an.

$\boldsymbol{x_2 = -0,6180339887}$ → Dieses Ergebnis ignoriert man, da auch die Nährungswerte, sowie der Kettenbruch von der Zahl φ jeweils ein positives Ergebnis ergeben.

Mithilfe dieser Berechnung kann man den Wert der Zahl φ exakt bestimmen. Außerdem kann man nun besser erkennen, dass je größer die Fibonacci-Zahlen werden, sie immer näher an diesen Wert herankommen.

http://www.mathe-seiten.de/fibonacci.pdf (IQ-16)

https://www.youtube.com/watch?v=Eo-IDtor1hg (IQ-17)

3.3 Berechnung der Fibonacci-Zahlen mithilfe der Formel von Binet

Die Fibonacci-Zahlenreihe ist bekannt. Jede Fibonacci-Zahl ergibt sich aus den vorherigen Fibonacci-Zahlen. Mithilfe der Formel, auf die man im Laufe dieses Kapitels kommen wird, ermöglicht es einem eine Fibonacci-Zahl zu berechnen, ohne die Vorgänger zu kennen. Bei dieser Herleitung geht man davon aus, dass die Zahl „0“ das F_0-Glied der Fibonacci-Zahlenfolge ist. Grundsätzlich zur Berechnung einer Fibonacci-Zahl gilt $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ Da man bei der Suche nach einer möglichen Formel anfangs nur mit Vermutungen arbeitet, schreibt man statt F_n nur noch g_n.

Binet probiert den Ansatz, die Fibonacci-Zahlenfolge als Potenzen, mit einer noch unbekannten Base zu berechnen: $g_n = a^n$. Da $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$ gilt, gilt auch $a^n = a^{n-1} + a^{n-2}$.Um nun letztlich auf die gesuchte Formel zu kommen, muss man folgendes tun:

<u>Schritt 1:</u>

Als erstes wendet man die pq-Formel an, um für die Base a einen konkreten Wert zu bekommen.

$a^n = a^{n-1} + a^{n-2}$	|	$\div a^{n-2}$
$a^2 = a + 1$	|	$-(a+1)$
$a^2 - a - 1 = 0$	|	pq-Formel anwenden

Nach Anwendung der pq-Formel erhält man zwei mögliche Ergebnisse $\boldsymbol{a_1 = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$

$\boldsymbol{a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

<u>Schritt 2:</u>

Da man nun jedoch zwei Ergebnisse als mögliche Basen erhalten hat, fertigt man nun eine Tabelle an.

$n =$	0	1	2
$a_1^n =$	1	a_1	a_1^2
$a_2^n =$	1	a_2	a_2^2
$F_n =$	0	1	1

Diese Tabelle zeigt uns in der ersten Zeile die Werte für n,die man in die Gleichung einsetzen kann. In der untersten Zeile sind die 0-te, 1-te und 2te Fibonacci-Zahl angegeben. Die Zeilen in der Mitte geben einem die Werte an, wenn man n in a_1^n bzw. a_2^n einsetzt. Wie man erkennen kann stimmen diese Werte nicht mit den Werten von F_n überein.

Schritt 3:

Nun schaut man sich zuerst die erste Spalte an. Man muss sich überlegen, wie man a_1^nund a_2^n miteinander kombiniert, dass letztlich 0 herauskommt. Eine Möglichkeit wäre beide voneinander zu subtrahieren.

Die Funktionsgleichung muss also lauten:

$g_n = a_1^n - a_2^n$

$g_0 = a_1^0 - a_2^0$

$g_0 = 1 - 1$

$g_0 = 0$

Schritt 4:

Für die erste Spalte ($n = 0$) stimmt diese Formel also schon mal. Doch stimmt sie auch für die Zweite?

$g_n = a_1^n - a_2^n$

$g_1 = a_1^1 - a_2^1$

$g_1 = a_1 - a_2$

$a_1 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ und $a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ in die Formel einsetzen

$g_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ | zusammenfassen

$g_1 = \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}$

$g_1 = \frac{2\sqrt{5}}{2}$ | den Bruch kürzen

$g_1 = \sqrt{5}$ → Ergebnis ist zwar richtig, allerdings sollte eigentlich 1 herauskommen, da in der zweiten Spalte als Wert ebenfalls 1 herauskam.

Um Nun auf den Wert 1 zu kommen, muss man die gesamte Formel durch $\sqrt{5}$ dividieren. Bei dem Ergebnis aus der ersten Spalte ($n = 0$) verändert sich nichts, da man 0 durch $\sqrt{5}$ problemlos dividieren kann, ohne dass sich etwas verändert.

Die neue Formel lautet also:

$g_n = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}$

Schritt 5:

Dies ist nun die entstandene Formel:

$$g_n = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}$$

Es kommt jedoch die Frage auf, ob diese Formel auch für alle anderen Zahlen für n gilt? Wenn das Bildungsgesetz, wie für die Fibonacci-Zahlen, bei dieser Formel gilt, dann wäre das der Beweis dafür. Demnach müsste folgendes gelten:

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$$

Folglich gilt dann auch:

$$a_1^n = a_1^{n-1} + a_1^{n-2}$$
$$a_2^n = a_2^{n-1} + a_2^{n-2}$$

Der Ansatz war:

$$g_n = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}$$

Nun setzt man $a_1^{n-1} + a_1^{n-2}$ in den Ansatz für a_1^n ein und $a_2^{n-1} + a_2^{n-2}$ für a_2^n und löst anschließend die Gleichung auf.

$$\frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^{n-1} + a_1^{n-2} - (a_2^{n-1} + a_2^{n-2})}{\sqrt{5}} \qquad | \quad \text{Ausklammern}$$

$$\frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^{n-1} + a_1^{n-2} - a_2^{n-1} - a_2^{n-2}}{\sqrt{5}} \qquad | \quad \text{neu sortieren}$$

$$\frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^{n-1} - a_2^{n-1} + a_1^{n-2} - a_2^{n-2}}{\sqrt{5}} \qquad | \quad \text{Bruch aufteilen}$$

$$\frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^{n-1} - a_2^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{a_1^{n-2} - a_2^{n-2}}{\sqrt{5}}$$

Also gilt $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$

Dies ist der Beweis dafür, dass die Formel $\frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$ für alle Werte für n gilt.

Da man Werte für a_1 und $a_2$ausgerechnet hat, kann man diese noch einsetzen und erhält so eine Formel mit den Werten.

$$\boldsymbol{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}$$

Wie schon oben erwähnt kann man mithilfe dieser Formel eine beliebige Fibonacci-Zahl berechnen ohne die Vorgänger zu wissen.

http://www.staff.uni-oldenburg.de/daniel.grieser/wwwlehre/Schriebe/fibonacci Binet-Formel.pdf (IQ-18)

3.4 Anwendungsaufgaben zu der Fibonacci-Zahlenfolge

Als Anwendungsaufgabe bei der Fibonacci-Zahlenfolge geht man zurück zu der Kaninchenaufgabe. Um die Anzahl der Kaninchen im n-ten Monat berechnen zu können benutzte man folgende Formel $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Die Glieder der Fibonacci-Zahlenfolge geben einen also die Anzahl der Kaninchen nach einem bestimmten Monat an.

Aufgaben:

1. Berechne wie viele Kaninchen sich am Ende des Jahres in dem Stall befinden befinden.

   Formel:
   $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

   Rechnung:
   $F_{12} = F_{11} + F_{10}$
   $F_{12} = 89 + 55$
   $F_{12} = 144$ → A: Nach genau 12 Monaten hat man 144 Kaninchen in seinem Stall

2. Wie viele Kaninchen können in dem 10. Monat Junge werfen, wenn zu dieser Zeit 55 Kaninchen in dem Stall sind und es 34 Kaninchen in dem Monat davor vorhanden waren? → Berechne diese Aufgabe nur mithilfe der Formel.

   Formel:
   $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

   Rechnung:
   $F_{10} = F_9 + F_8$
   $55 = 34 + F_8 \quad | \quad -34$
   $21 = F_8$ → A: In dem 10. Monat können genau 21 Kaninchenpaare Junge werfen.

Ellenbracht, F., B. Langenbruch: Architektur des Lebens. Cornelsen Verlag, Berlin 2003, S. 48

4 Goldener Schnitt

Was ist der Goldene Schnitt überhaupt?

Der Goldene Schnitt gilt als ein sehr harmonisches Verhältnis und ist für den Menschen sehr ansprechend. Das ist auch der Grund warum der Goldenen Schnitt in Gemälden oder Bauwerken oft genutzt wird, doch dazu komme ich später.

Wenn man zum Beispiel ein Bild mit seiner Kamera von einer Person machen möchte, so platziert man diese Person auch nicht direkt in der Mitte oder irgendwo rechts unten in der Ecke. Man richtet die Kamera so aus, dass die Augen der Person etwas über der Mitte des Bildes liegen, in dem Goldenen Schnitt. Dies ist zwar nicht immer exakt der Wert des Goldenen Schnittes, aber man kommt zumindest mit dem Wert in seine Umgebung.

In **Abb. 4** sieht man eine Gerade, die im goldenen Schnitt geteilt wurde. Die gesamte Länge dieser Geraden ist „a“ groß. Die kürzere Strecke dieser geteilten Gerade hat die Länge „x“ und wird auch „Minor“ genannt und wird mit „m“ abgekürzt. Die im Gegenzug längere Strecke hat folglich die Länge „a-x“ und wird „Maior“ genannt und mit „M“ abgekürzt. Der Punkt „S“ gibt den Punkt an, wo der Goldene Schnitt die Gerade teilt.

Das besondere des Goldenen Schnitts ist, dass das Verhältnis von „a“ zu „a-x“ genauso groß ist, wie das Verhältnis von „a-x“ zu „x“.

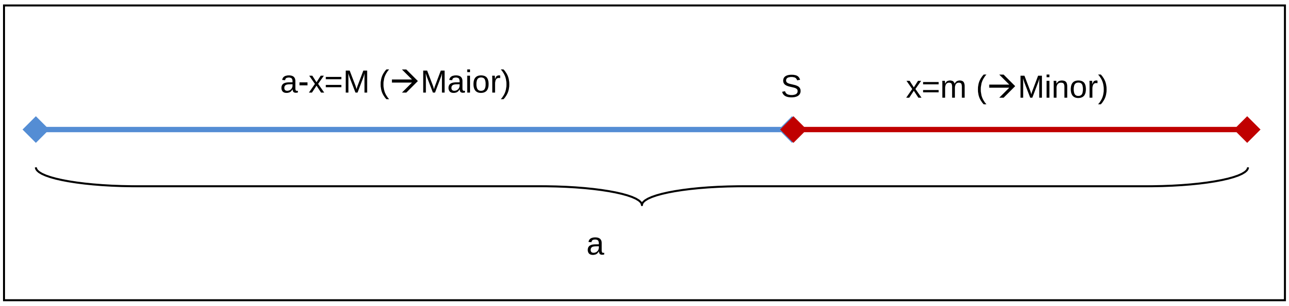


Abb. 4: Goldener Schnitt

Es gilt also:

$\frac{a-x}{x} = \frac{a}{a-x}$ bzw. $\frac{x}{a-x} = \frac{a-x}{a}$

Nun möchte man jedoch Minor „m“ und Maior „M“ mithilfe von der obigen Gleichung berechnen. Dazu muss man folgendes tun.

Schritt 1:

Als ersten Schritt muss man die Gleichung mit $(a-x)$ und anschließend mit x multiplizieren.

$\frac{a-x}{x} = \frac{a}{a-x}$ | $\cdot (a-x)$

$\frac{(a-x)^2}{x} = a$ | $\cdot x$

$(a-x)^2 = ax$

Aus dieser quadratischen Gleichung erhält man letztendlich den Minor „m“ in Abhängigkeit von a und folglich auch den Maior „M“.

Schritt 2:

Als nächstes löst man die binomische Formel auf.

$(a-x)^2 = ax$

$a^2 - 2ax + x^2 = ax$

Schritt 3:

Nun dividiert man als erstes ax und wendet im Anschluss die pq-Formel an.

$a^2 - 2ax + x^2 = ax$ | $-ax$

$x^2 - 3ax + a^2 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{3a}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{(3a)}{2}\right)^2 - a^2}$$

$x_{1/2} = \frac{3a}{2} \pm \sqrt{\frac{9a^2}{4} - a^2}$ | a^2 auf denselben Nenner bringen

$$x_{1/2} = \frac{3a}{2} \pm \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \frac{4a^2}{4}}$$

$$x_{1/2} = \frac{3a}{2} \pm \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$$

$$x_{1/2} = \frac{3a}{2} \pm \frac{\sqrt{5}a}{2}$$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a}$ → Das muss die richtige Lösung sein, da die andere Lösung nicht richtig sein kann und hier x kleiner als a ist.

$\boldsymbol{x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}a}$ → Diese Lösung kann nicht richtig sein, da x ein Teil von a sein muss und somit nicht größer als a sein darf.

Aus dieser Lösung folgt:

$$m = x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a = \frac{1}{2}a\left(3-\sqrt{5}\right)$$

Nun muss nur noch der Maior berechnet werden. Da man weiß, dass der Maior $a - x$ groß ist, setzt man für x das obige Ergebnis von dem Minor in die Gleichung ein.

$$M = a - x$$

$$M = 1a - \frac{3-\sqrt{5}}{2}a \qquad | \qquad \text{ausklammern und auf denselben Nenner bringen}$$

$$M = \left(\frac{2}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)a$$

$$M = \left(\frac{2-\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right)a$$

$$\boldsymbol{M = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)a}$$

Aus dieser Lösung folgt:

$$M = a - x = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)a = \frac{1}{2}a\left(\sqrt{5}-1\right)$$

Ellenbracht, F., B. Langenbruch: Architektur des Lebens. Cornelsen Verlag, Berlin 2003, S. 24

4.1 Herleitung der Zahl φ über den Goldenen Schnitt

Die Länge des Maiors, sowie des Minors kann man über die oben genannte quadratische Gleichung berechnen. Doch wofür braucht man diese beiden Längen?
Mithilfe dieser beiden Längen lässt sich nun die Zahl φ ermitteln. Sie ist das Verhältnis von Maior zu Minor.

Man schreibt auch:

$$\varphi = \frac{M}{m} = \frac{\frac{1}{2}a\left(\sqrt{5}-1\right)}{\frac{1}{2}a\left(3-\sqrt{5}\right)}$$

<u>Schritt 1:</u>

Als ersten Schritt multipliziert man zu dem Zähler und dem Nenner $\left(3+\sqrt{5}\right)$ und kürzt die $\frac{1}{2}a$ jeweils weg.

$$\varphi = \frac{\frac{1}{2}a\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}{\frac{1}{2}a\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}$$

$$\varphi = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}$$

<u>Schritt 2:</u>

Anschließend multipliziert man die Klammern aus und fasst diese zusammen.

$$\varphi = \frac{3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5}}{9+3\sqrt{5}-3\sqrt{5-5}}$$

$$\varphi = \frac{2\sqrt{5}+2}{4}$$

<u>Schritt 3:</u>

Zum Schluss muss man den Bruch ein letztes Mal kürzen und man erhält letztendlich Die Zahlφ.

$$\boldsymbol{\varphi = \frac{1\sqrt{5}+1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right) = 1{,}618033989}$$

Ellenbracht, F., B. Langenbruch: Architektur des Lebens. Cornelsen Verlag, Berlin 2003, S. 24

4.2 Konstruktion des Goldenen Schnittes

Da man oben die Zahl φ ausgerechnet hat, könnte man theoretisch den Goldenen Schnitt jeweils ausrechnen. Dazu multipliziert man eine beliebige Zahl mit der Zahl φ und bekommt die dazu entsprechende Länge in dem Verhältnis des Goldenen Schnittes. Allerdings kann man den Goldenen Schnitt auch konstruieren ohne rechnen zu müssen.

Wie man in **Abb. 5** sehen kann geht man davon aus, dass die Strecke AB mit der Länge „a" gegeben ist und man diese im Goldenen Schnitt teilen möchte.
Dazu zeichnet man eine Gerade mit der Länge $\frac{a}{2}$ von dem Punkt „B" aus im rechten Winkel nach oben.
Nachdem man dies erledigt hat, verbindet man das Ende dieser Geraden, also den Punkt „C" mit dem Punkt „A". Nun ist die Strecke AC entstanden.
Als nächsten Schritt zeichnet man von „C" aus einen Kreis mit dem Radius $\frac{a}{2}$. Dieser Kreisbogen schneidet nun die Strecke AC an dem Punkt „D".
Im Anschluss zeichnet man einen weiteren Kreis von dem Punkt „A" aus mit dem Radius der Länge der Strecke AD. Dieser Kreisbogen schneidet die Strecke AB in dem Punkt „E". „E" gibt uns den Punkt an, wo man die Strecke im Goldenen Schnitt teilen muss.

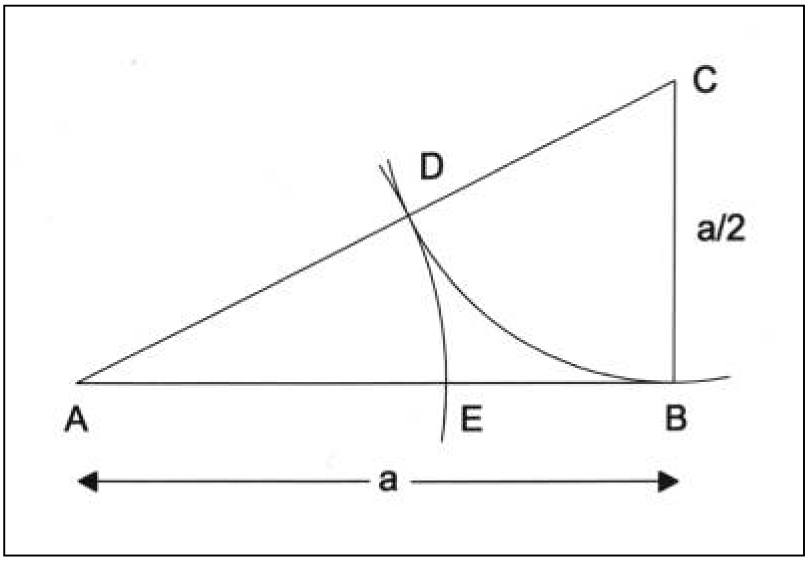


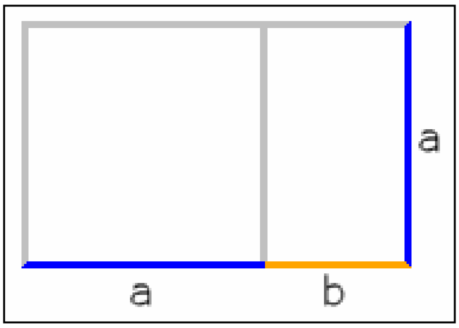
Abb. 5: Konstruktion des Goldenen Schnittes (IQ-4)

Ellenbracht, F., B. Langenbruch: Architektur des Lebens. Cornelsen Verlag, Berlin 2003, S. 25

4.3 Vorkommen des Goldenen Schnitts

Wie schon oben gesagt, wird der Goldene Schnitt sehr gerne aufgrund seines harmonischen Verhältnisses in der Kunst aber auch in der Architektur verwendet. Aber auch in der Natur gibt es Vorkommnisse des Goldenen Schnittes.
Doch um dies besser verstehen zu können, muss man erst mal klären, was Goldene Vielecke sind und was das Reguläre Fünfeck ist.

Goldene Vielecke:
Goldene Vielecke sind unter anderem Rechtecke deren Seitenlängen im Verhältnis des Goldenen Schnittes stehen wie man in **Abb. 6** erkennen kann. Mithilfe der Zahl φ kann man die Seitenlänge solcher Rechtecke ganz leicht berechnen.
Goldene Dreiecke gehören jedoch auch zu den Goldenen Vielecken. Diese Dreiecke sind immer gleichschenklig und entweder ist die Grundseite Der Minor und die Schenkel sind der Maior oder genau umgekehrt. Siehe **Abb. 7**



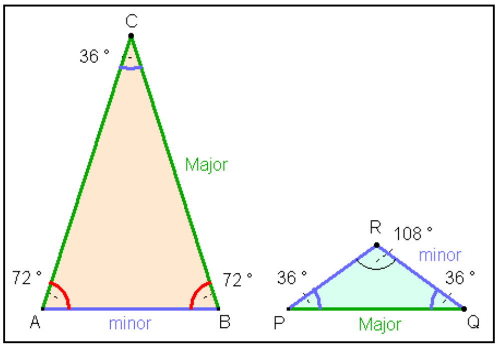


Abb. 6: Goldenes Rechteck (IQ-5)

Abb. 7: Goldenes Dreieck(IQ-6)

Diese Goldenen Rechtecke wurden zum Beispiel bei dem Bauwerk „Bauhaus in Dessau“ verwendet und gezielt eingesetzt, da die Seitenlängen von diesem Bauwerk im Goldenen Schnitt zueinander stehen. (Siehe **Abb. 8**)
Ein ganz berühmtes Beispiel für die Goldenen Dreiecke ist das Gemälde „Mona Lisa“ von Pablo Picasso, welcher sehr viel mit Goldenen Dreiecken arbeitete, wie man bei den weißen Strichen in **Abb. 9** erkennen kann.

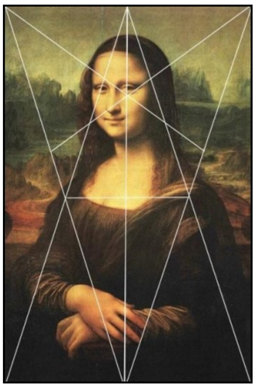


Abb. 8: Bauhaus in Dessau (IQ-7)

Abb. 9: Mona Lisa mit Goldenen Dreiecken (IQ-8)

Reguläres Fünfeck:

Das Besondere am regulären Fünfeck ist, dass jede Diagonale im Verhältnis von φ geteilt wird. Jede Diagonale wird insgesamt durch zwei weiter geteilt. Des Weiteren ist das Verhältnis der Diagonallänge zu der Seitenlänge ebenfalls φ.

Außerdem entstehen Goldene Dreiecke und alle Diagonalen bilden zusammen einen Stern. (Siehe **Abb. 10**)

Dieses Goldene Fünfeck, welches aus vielen Goldenen Dreiecken besteht kommt in der Natur sehr häufig vor.

Zum Beispiel hat der Seestern die Form eines Goldenen Fünfecks. (Siehe **Abb.11**)

Aber auch bei den Pflanzen entdeckt man diese Form immer wieder, hauptsächlich jedoch in den Blüten, wie zum Beispiel der Akelei, der Heckenrose, der Glockenblume, der Kirsch- und der Apfelblüte. (Siehe **Abb. 12**)

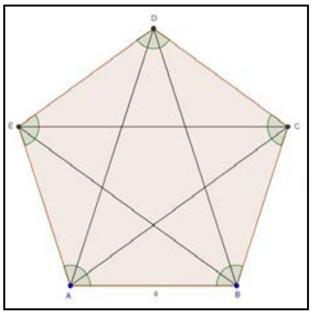


Abb. 10: Reguläres Fünfeck (IQ-9)

Abb. 11: Seestern (IQ-10)

Abb. 12: Glockenblume (IQ-11)

Ellenbracht, F., B. Langenbruch: Architektur des Lebens. Cornelsen Verlag, Berlin 2003, S. 25

4.4 Anwendungsaufgabe zu dem Goldenen Schnitt

Konstruiere ein Feuerzeug welches eine maximale Höhe von 5 cm hat und eine Breite von 1 cm. Des Weiteren muss das Feuerzeug einen aufklappbaren Deckel besitzen, welcher so groß sein soll, dass das Verhältnis zwischen dem Deckel und der unteren Basis den Goldenen Schnitt ergibt.

Es gilt:

I $\varphi = \frac{M}{m}$ und

II $m + M = 5$

Rechnung:

$m + M = 5$	|	$-M$
$m = 5 - M$		

m in Gleichung I

$\varphi = \frac{M}{5-M}$	|	$\cdot\,(5 - M)$
$\varphi\,(5 - M) = \mathrm{M}$	|	Klammer mit φ multiplizieren
$\varphi 5 - \varphi M = \mathrm{M}$	|	$+\,\varphi M$
$\varphi 5 = \mathrm{M} + \varphi M$	|	ausklammern
$\varphi 5 = \mathrm{M}(1 + \varphi)$	|	$\div\,(1 + \varphi)$
$\frac{\varphi 5}{(1+\varphi)} = \mathrm{M}$		
$M = 3{,}09$ cm		

M in Gleichung II

$m + 3{,}09 = 5$	|	$-3{,}09$
$m = 1{,}91$ cm		

- ➔ A: Die Basis des Feuerzeuges muss eine Höhe von 3,09 cm besitzen und der Deckel eine Höhe von 1,91 cm, wenn das gesamte Feuerzeug nicht größer als 5 cm sein soll und der Deckel, sowie die untere Basis im Verhältnis des Goldenen Schnitts zueinander stehen sollen.

5 Zusammenhang zwischen den Fibonacci-Zahlen und dem Goldenen Schnitt

Der Zusammenhang zwischen den Fibonacci-Zahlen und dem Goldenen Schnitt liegt darin, dass man sowohl über den Goldenen Schnitt, als auch über die Fibonacci-Zahlen die Zahl φ herleiten kann. Dies habe ich im Laufe meiner Facharbeit gezeigt. Doch der Beweis, dass es sich wirklich um dieselbe Zahl handelt und nicht nur ein Nährungswert ist, fehlt noch. Es kann doch sein, dass die Herleitung der Zahl φ über die Fibonacci-Zahlen gar nicht die Herleitung der Zahl φ ist. Es könnte genauso gut die Herleitung einer anderen Zahl sein, die auf den ersten Blick nur aussieht wie φ, allerdings sich nach einigen Zahlen hinter dem Koma von ihr unterscheidet.
Nun folgt jedoch der Beweis, dass dem nicht so ist.
Als man die Zahl φ über Fibonacci-Zahlen hergeleitet hat, benutzte man die pq-Formel, um letztlich den Wert von ihr zu bekommen. (Siehe Seite 11)
Die Berechnung von der Zahl φ beim Goldenen Schnitt, ging über einen komplett anderen Rechenweg. (Siehe Seite 18) Wenn man auch hier nun die Zahl φ über die pq-Formel herleiten würde, könnte man sehen, ob es sich um dieselbe Zahl handelt.
Wenn jetzt die pq-Formeln von beiden Wegen identisch sind, dann ist das der Beweis dafür, dass es sich um dieselbe Zahl handelt.
Doch wie kommt man nun auf die pq-Formel von dem Goldenen Schnitt.
Zuerst nochmal ein kurzer Überblick zu dem Verhältnis des Goldenen Schnitts.
Das Verhältnis des Goldenen Schnitts lautet (Siehe **Abb. 13**):

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

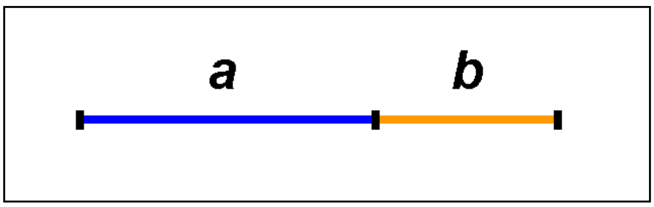


Abb. 13: Goldener Schnitt (IQ-12)

Um nun auf die pq-Formel zu kommen, muss man folgendes tun:

Schritt 1:

Zuerst bringt man alle Komponenten auf eine Seite. Danach schreibt man die Formel anders wieder auf, da es mit dieser neuen Schreibweise einfacher ist weiter zurechnen.

$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ | $-\frac{a+b}{a}$

$\frac{a}{b} - \frac{a+b}{a} = 0$ | andere Schreibweise

Schritt 2:

Nun setzt man $\frac{a}{b} = x$ um die pq-Formel anwenden zu können. Bevor man die pq-Formel jedoch anwenden kann muss man die Gleichung mit x multiplizieren, um x unter dem Bruch weg zu kriegen.

$\frac{a}{b} - 1 - \frac{b}{a} = 0$ | Nun setzt man $\frac{a}{b} = x$ → x steht hier für die Zahl φ

$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$ | $\cdot x$

$\boldsymbol{x^2 - 1x - 1 = 0}$ → Dies ist die pq-Formel, die sich aus dem Goldenen Schnitt ableiten lässt.

$\boldsymbol{x^2 - 1x - 1 = 0}$ → Zum Vergleich die sich ergebende pq-Formel, die sich aus der Fibonacci-Zahlenfolge ergibt. (Herleitung siehe Seite 11)

Beide pq-Formeln sind also identisch. Das ist der Beweis dafür, dass sowohl bei dem Goldenen Schnitt, als auch bei den Fibonacci-Zahlen das selbe Ergebnis, bzw. die selbe Zahl φ herauskommen muss.

https://www.youtube.com/watch?v=Eo-IDtor1hg (IQ-18)

6 Fazit

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sowohl der Goldene Schnitt als auch die Fibonacci-Zahlenfolge einem im alltäglichen Leben immer wieder begegnen. Es konnte gezeigt und bewiesen werden, dass man über den Goldenen Schnitt aber auch über die Fibonacci-Zahlenfolge an die Zahl φ gelangt. Des Weiteren konnte man letztlich auch eine beliebige Fibonacci-Zahl berechnen, ohne dass man ihre Vorgänger kennt und benötigt.

7 Erklärung des Verfassers

Ich habe die vorliegende Facharbeit selbstständig verfasst, keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt und die Stellender Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, in jedem einzelnen Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht. (Ort, Datum, Unterschrift des Verfassers)

8 Literatur und Quellen

Internetquellen für die Bilder

IQ-1 https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b6/Goldener_Schnitt_Bluetenstand_Sonnenblume.jpg

IQ-2 http://freiflug.tssteinfurt.de/images/P2_Mathe/Fotos/Ananas.jpg

IQ-3 http://mawa.heimat.eu/inf/fib/kaninchen.gif

IQ-4 http://www.marcus-frings.de/bilder/frings-gs-abb2.jpg

IQ-5 http://lemats.net/tech/_media/goldener-schnitt_rechteck.png

IQ-6 http://www.michael-holzapfel.de/themen/goldenerschnitt/gs-konstruktion/gs-dreieck.gif

IQ-7 http://www.bauhaus-dessau.de/assets/img/opengraph-default.png

IQ-8 http://www.saxoprint.de/blog/wp-content/uploads/2009/11/mona-lisa-goldener-schnitt.jpg

IQ-9 http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/regelmaessiges_fuenfeck.jpg

IQ-10 http://www.spasslernen.de/spiele/images/seestern.jpg

IQ-11 https://www.was-darwin-nicht-wusste.de/images/glockenblume_penta_thumb.jpg

IQ-12 https://upload.wikimedia.org/wikipedia/bar/d/d3/Goldener_Schnitt_Streckenteilung.png

Internetquellen

IQ-13: Erklärung zur Seite http://geboren.am/person/fibonacci (20.02.2016, 17:00 Uhr)

IQ-14: Erklärung zur Seite http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/fibonacci.html (20.02.2016, 17:30 Uhr)

IQ-15: Erklärung zur Seite http://www.ijon.de/mathe/fibonacci/node8.html (20.02.2016, 17:45 Uhr)

IQ-16: Erklärung zur Seite http://www.mathe-seiten.de/fibonacci.pdf (12.02.2016, 17:00 Uhr)

IQ-17: Erklärung zur Seite https://www.youtube.com/watch?v=Eo-IDtor1hg (12.02.2016, 18:00 Uhr)

IQ-18: Erklärung zur Seite http://www.staff.uni-oldenburg.de/daniel.grieser/wwwlehre/Schriebe/fibonacci Binet-Formel.pdf (23.02.2016, 16:30 Uhr)

Literaturquellen

Ellenbracht, F., B. Langenbruch: Architektur des Lebens. Cornelsen Verlag,Berlin 2003