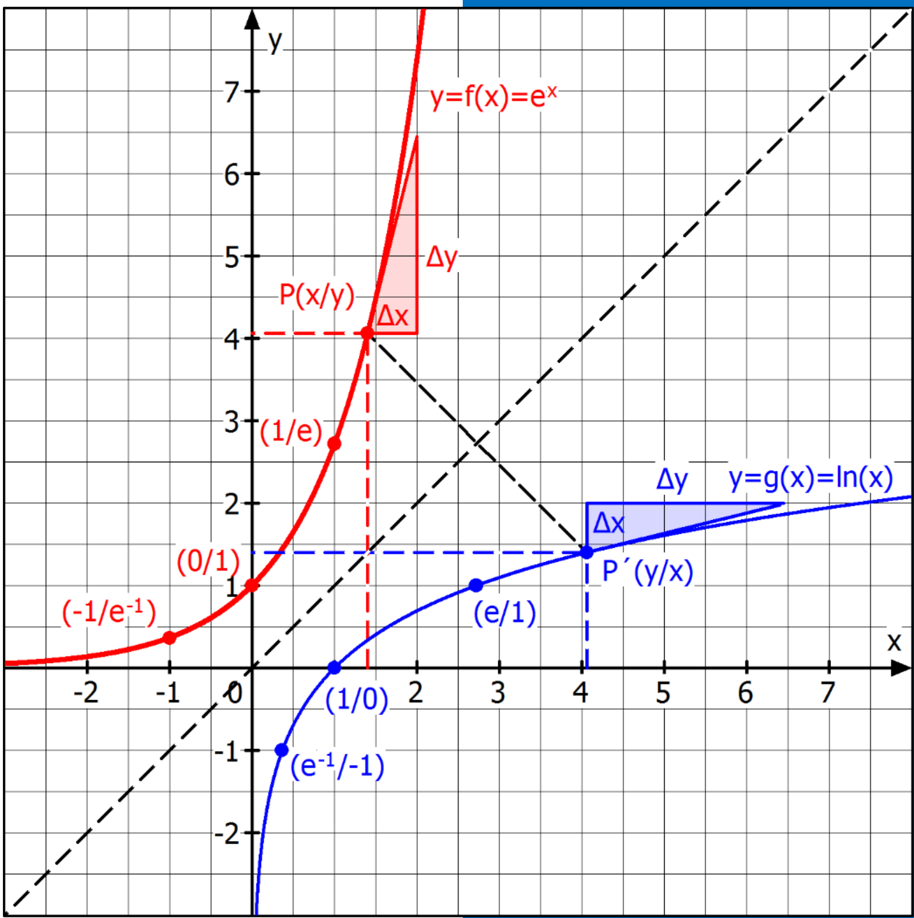
1. Unterrichtsvorhaben in der Q2-Phase

Exponential- und Logarithmusfunktion



Jörn Meyer

j.meyer@fals-solingen.de

www.maspole.de

Inhaltsverzeichnis

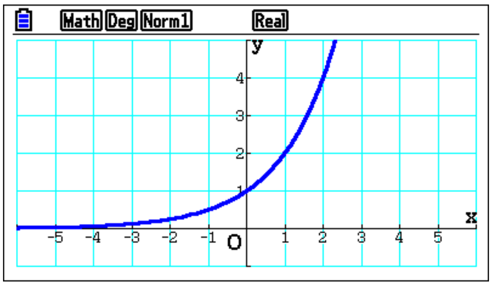
1 Grundwissen rund um Exponentialfunktionen

Aufgabe 1: Eigenschaften der Exponentialfunktionen

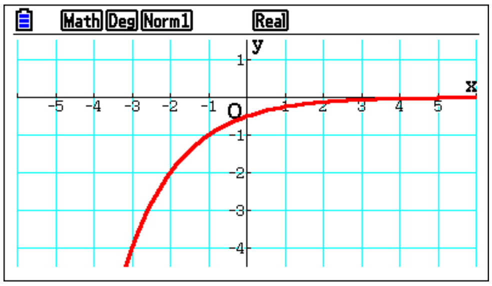
Die Funktion mit der Gleichung $f(x) = c \cdot a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$ und $c \in \mathbb{R}$) wird für verschiedene Werte a und c mithilfe Hilfe des GTR als Graf (MENU 5) und als Tabelle (MENU 7) dargestellt.

(1) **Ermittle** die Funktionsgleichungen der Form $f(x) = c \cdot a^x$ für die folgenden vier Grafen.

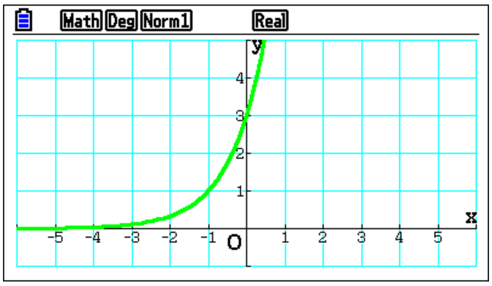
1



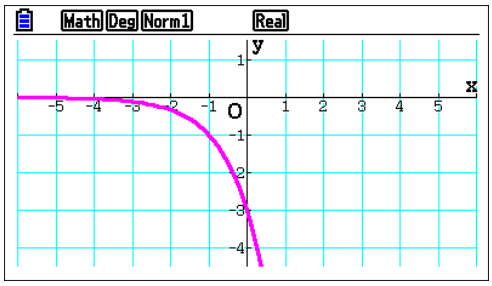
2



3



4



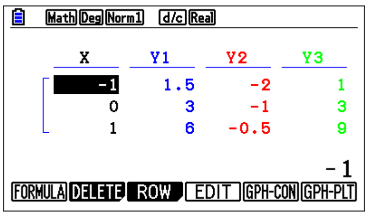
(2) **Gib** die fehlenden Werte in der nachfolgenden Tabelle **an** und **beschreibe** die exponentielle Zunahme (Funktion f) bzw. die exponentielle Abnahme (Funktion g), indem Du Merksätze der Form „Wenn der x-Wert sich um k vergrößert (verkleinert), dann … sich der Funktionswert der Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ um …“.

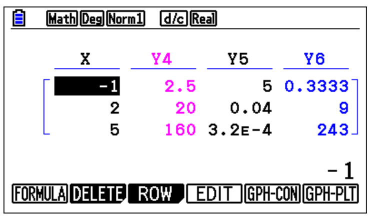
x	-3	-2	-1	0	0,5	1	2	3
$f(x) = 4 \cdot 2^x$								
$g(x) = 2 \cdot 0{,}5^x$								

(3) **Erläutere**, wie man am Funktionsterm erkennen kann, ob es sich um eine exponentielle Zunahme bzw. um eine exponentielle Abnahme handelt. **Nenne** Anwendungsbeispiele für exponentielle Zu- und Abnahme.

(4) **Erkläre** anschaulich am Beispiel der Funktionen $y = 2^x$ und $y = x^2$, wie sich exponentielle Zunahme vom Wachstum einer Potenzfunktion unterscheidet. Vielleicht hilft Dir für ganzzahlige und positive x die Aussage: „Exponentielles Wachstum ist durch die besondere Eigenschaft gekennzeichnet, dass der letzte Eintrag größer ist als die Summe aller vorherigen Einträge.“

(5) **Bestimme** die sechs exponentiellen Funktionsgleichungen mit der Darstellung $f(x) = c \cdot a^x$ ($a > 0$ und $c \in \mathbb{R}$), die zu den sechs Spalten gehören, welche mit dem GTR unter MENU 7 erzeugt worden sind.





(6) **Begründe** mithilfe der Potenzgesetze[1] folgende Gleichheit:

(1) $2^{-x} = 0{,}5^x$ (2) $3^{x-1} = \frac{1}{3} \cdot 3^x$ (3) $(3^x)^2 = 9^x$ (4) $3^{2x+2} = 9 \cdot 9^x$ (5) $25^{0{,}5x-0{,}5} = 0{,}2 \cdot 5^x$

(7) **Übertrage** mit Beispielen in Dein Heft und **erkläre**, warum $a > 0$ und $a \neq 1$ sein muss.

Merksätze:

(1) Eine Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$ und $c \in \mathbb{R}$) heißt **Exponentialfunktion.**

(2) Wenn eine Exponentialfunktion einen Wachstumsvorgang beschreibt, handelt es sich für …

$a > 1$ um eine **exponentielle Zunahme**.

$a < 1$ um eine **exponentielle Abnahme.**

(3) Der Faktor a heißt **Wachstumsfaktor.**

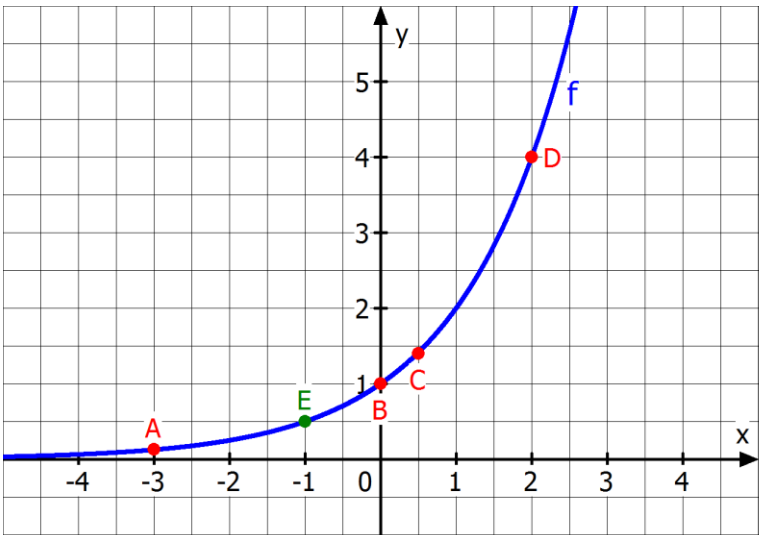
(4) Der Faktor c entspricht dem **Startwert bei x = 0.**

Aufgabe 2: Logarithmus und Exponentialgleichungen[2]

Gegeben sind 8 Kärtchen und 4 Punkte auf dem Grafen einer Exponentialfunktion.

a) **Gib** die Funktionsgleichung von f **an** und **untersuche** mithilfe des GTR, welche beiden Kärtchen zu den Punkten A, B, C bzw. D gehören.

$2^x = 4$
$x = \log_2\left(\frac{1}{8}\right)$
$x = \log_2(4)$
$2^x = 1$
$x = \log_2(1)$
$2^x = \sqrt{2}$
$x = \log_2(\sqrt{2})$
$2^x = \frac{1}{8}$



b) **Gib** die beiden entsprechenden Gleichungen für den Punkt E **an** und **erkläre** die Bedeutung des Ausdrucks $\log_2(b)$.

c) **Gib** die Lösungen der folgenden 8 Exponentialgleichungen als Logarithmus an und **ordne** sie ohne GTR der Größe nach. **Gib** dabei jeweils den Lösungssatz **an**.

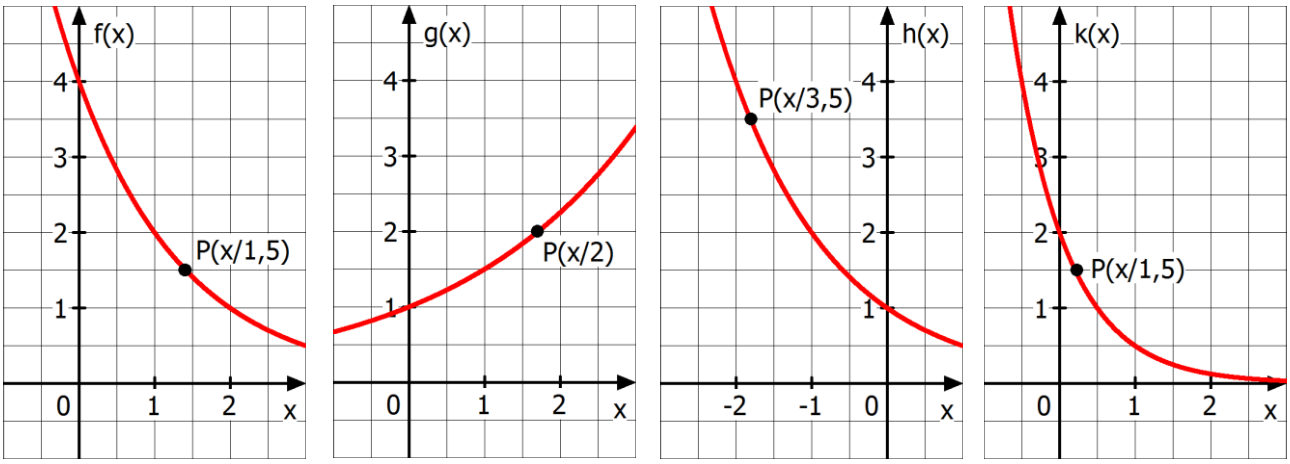
E: $15 \cdot 1{,}3^x = 30$	H: $0{,}125 \cdot 0{,}5^x = 0{,}25$	U: $4 + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 6$	A: $1 = \left(\frac{1}{9}\right)^x \cdot 8$
S: $10 \cdot 2^{x+1} = 50$	D: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 10^3$	S: $2{,}5^{x-2} \cdot 2{,}5^2 = 99$	T: $1{,}95^{2-x} = 1$

[1] $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; $a^r : a^s = a^{r-s}$; $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$; $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$;

[2] Ideen modifiziert nach Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

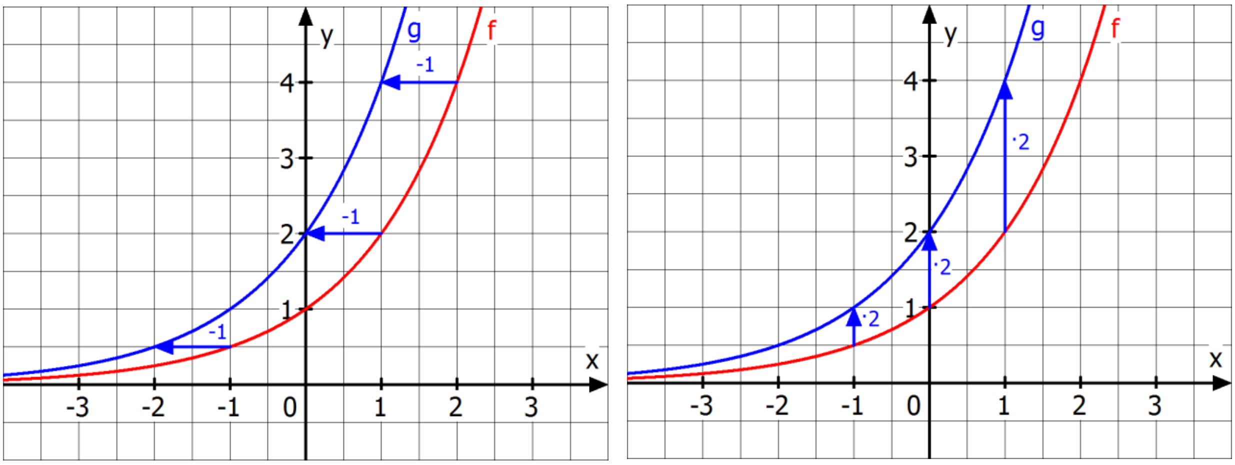
Aufgabe 3: Ermitteln von Funktionsterm und x-Wert

Ermittle den Funktionsterm für die folgenden 4 Exponentialfunktionen und **gib** den x-Wert des Grafenpunktes P als Logarithmus und als Lösung einer Exponentialgleichung an. **Überprüfe** Deine Rechnungen mit dem GTR.



Aufgabe 4: Transformationen von Exponentialfunktionen

a) Der Graf zur Funktion f mit $f(x) = 2^x$ wird auf zwei Weisen transformiert. In der linken Abbildung wird der Graf von f um 1 Einheit nach links verschoben. In der rechten Darstellung erfolgt eine Streckung des Grafen von f von der x-Achse aus um den Faktor 2.



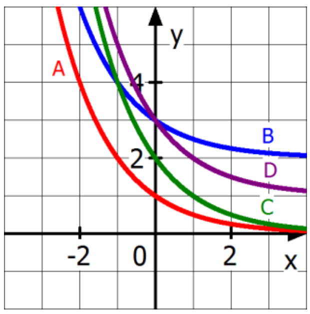
Zeige rechnerisch, dass in beiden Fällen derselbe Graf entsteht.

b) Gegeben sind die Funktionen f, g und h mit $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^{x+2}$ und $h(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^x$.

Begründe grafisch mit den Funktionsgrafen und rechnerisch mit den Funktionstermen, dass die Grafen von g und h sowohl durch eine Verschiebung als auch eine Streckung aus dem Grafen von f hervorgehen können.

c) **Ordne** die folgenden Funktionsgleichungen den Grafen A bis D in der Abbildung rechts zu. **Begründe** Deine Zuordnungen.

$f(x) = 0{,}5^x$ $\quad g(x) = 0{,}5^x + 2$ $\quad h(x) = 0{,}5^{x-1}$ $\quad k(x) = 0{,}5^{x-1} + 1$



Aufgabe 5: Kaninchenwachstum[3]

Auf einer unbewohnten Insel wurden zu Beginn des Jahres 2012 sechs Kaninchen ausgesetzt. Nach 42 Monaten zählte man 77 Tiere. Man geht davon aus, dass sich die Population exponentiell entwickelt.

a) **Beschreibe** die Entwicklung der Kaninchenpopulation in Abhängigkeit von der Zeit (in Jahren) durch eine Exponentialfunktion und **skizziere** den dazugehörigen Grafen für $0 \leq t \leq 5$.

b) **Ermittle** die zu erwartene Anzahl der Tiere am 1.1.2016, 1.2.2018 und 1.10.2022.

c) Ab einer Population von 12000 Kaninchen wird diese zwecks Reduzierung zum Abschuss freigegeben. **Bestimme** den Zeitpunkt der ersten Abschussfreigabe.

d) **Erläutere**, welche Modellannahmen in Aufgabenteilen a) bis c) gemacht werden müssen.

Aufgabe 6: Gilt immer – gilt nie – kommt darauf an[4]

Entscheide begründend, ob die 4 Aussagen immer, nie oder unter bestimmten Bedingungen gelten.

(1) Eine Exponentialfunktion ist nicht symmetrisch.
(2) Eine Exponetialgleichung besitzt immer genau eine Lösung.
(3) Der Graf einer Exponentialfunktion nähert sich immer der x-Achse an.
(4) Ein und derselbe Wachstumsvorgang kann mit unterschiedlichen Wachstumsfunktionen beschrieben werden.

Infoblock: Was bedeutet Logarithmus und wie rechnet man damit?

Das Wort Logarithmus stammt aus dem Griechischen von lógos („Verständnis, Lehre, Verhältnis“) arithmós („Zahl“) ab. Der Logarithmus einer Zahl bezeichnet den Exponenten x (Hochzahl, Verhältniszahl), mit dem die Basis a potenziert werden muss, um die gegebene Zahl b zu erhalten. Fasst man diese Definition in Gleichungen, erhält man:

Unter dem **Logarithmus von b zur Basis a** (a, b > 0) versteht man die eindeutig bestimmte Lösung der Exponentialgleichung $\mathbf{a^x = b}$. Man schreibt $\mathbf{x = \log_a(b)}$. Damit sind Logarithmieren und Potenzieren gegenseitige Umkehroperationen. Zum Beispiel ist $\log_2(0{,}125) = -3$, da $2^{-3} = 0{,}125$.

Zur Erinnerung: Der Ausdruck $\sqrt[n]{\mathbf{a}}$ ($a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$) ist definiert worden als nichtnegative Lösung der Gleichung $\mathbf{x^n = a}$. Während beim Logarithmus die Hochzahl gesucht ist, ist bei der Wurzel die Basis die gesuchte Zahl.

Die **Logarithmusgesetze** lauten ($a, u, v > 0$; $r \in \mathbb{R}$):
(1) **Produktregel**: $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
(2) **Quotientenregel**: $\log_a(u : v) = \log_a(u) - \log_a(v)$
(3) **Potenzregel**: $\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)$

Erläutere den Beweis zur Produktregel und **beweise** analog die Quotienten- und Potenzregel.

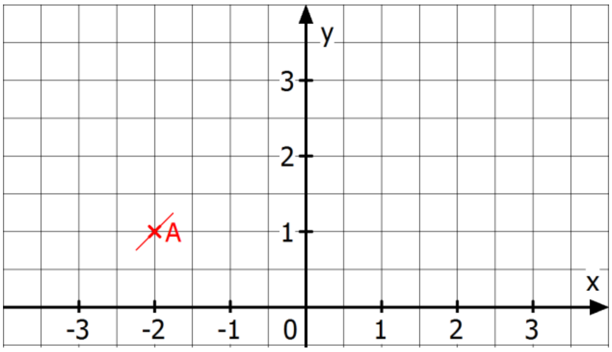
Beweis der Produktregel:
Setze $x = \log_a(u)$, $y = \log_a(v)$
Dann gilt: $a^x = u$; $a^y = v$
Also: $\log_a(u \cdot v)$
$= \log_a(a^x \cdot a^y)$
$= \log_a(a^{x+y})$
$= x + y = \log_a(u) + \log_a(v)$

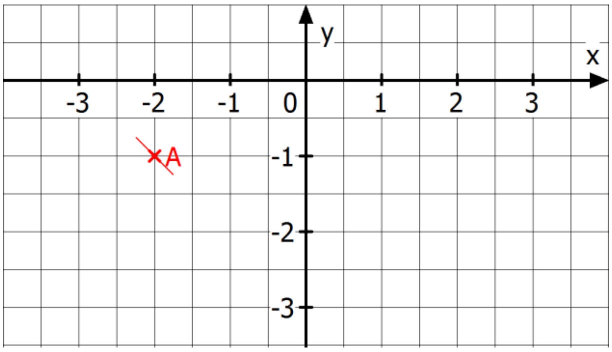
[3] Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)
[4] Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

2 Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung

Aufgabe 1: Graf zeichnen mit der Eigenschaft f´(x) = f(x)[5]

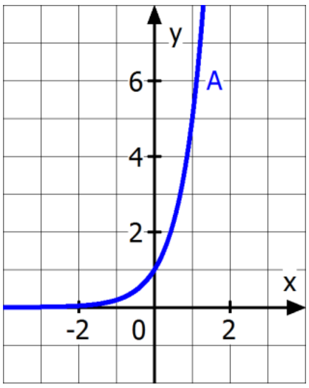
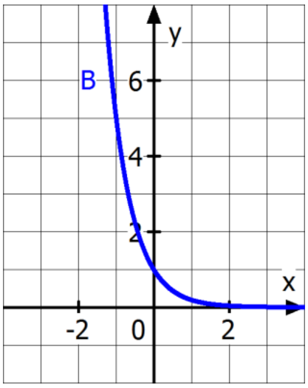
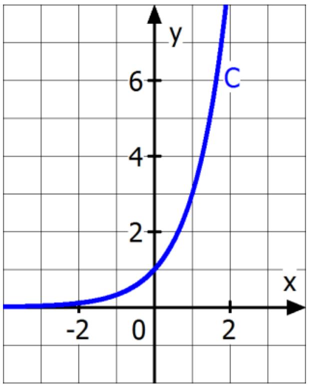
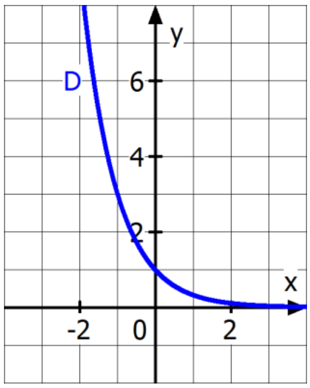
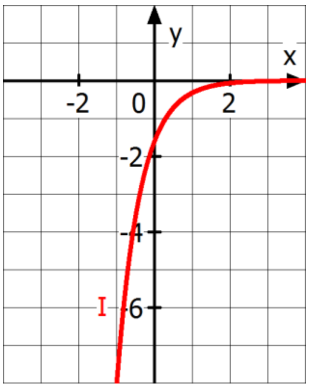
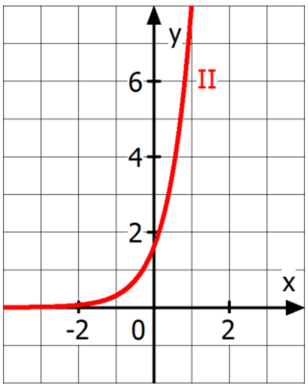
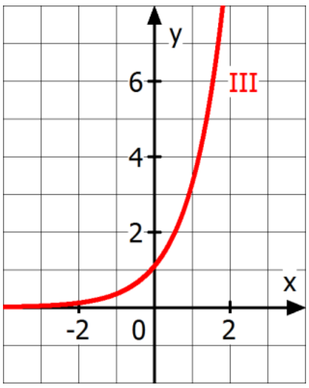
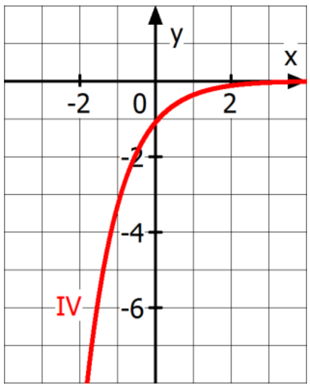
Zeichne einen beliebigen Startpunkt mit einem positiven y-Wert in ein Koordinatensystem. **Zeichne** nun einen Grafen durch A, dessen Steigung an jeder Stelle x genau dem y-Wert an der Stelle x entspricht. **Untersuche**, wie sich der Graph verändert, wenn der Startpunkt auf oder unterhalb der x-Achse liegt. **Vergleiche** die Ergebnisse mit Deinem Nachbarn.





Aufgabe 2: Graf von Exponentialfunktionen und deren Ableitungen

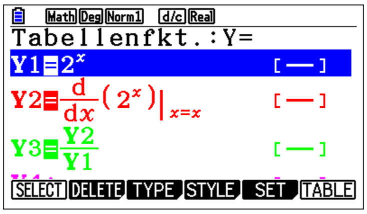
Ordne jedem der Funktionsterme f, g, h und k den passenden Grafen A, B, C bzw. D sowie den Grafen der Ableitungsfunktion I, II, III und IV zu. **Begründe** Deine Zuordnungen.

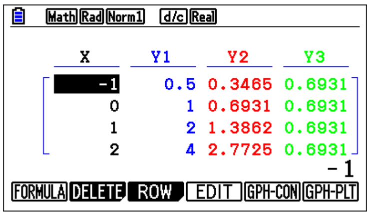
$f(x) = 3^x$	$g(x) = 5^x$	$h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$k(x) = 0{,}2^x$
			
			

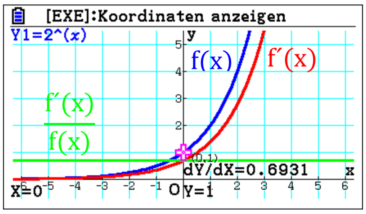
[5] Aufgabe aus Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

Aufgabe 3: Ableitung der Exponentialfunktionen

Bisher haben wir nur die Ableitungen für ganzrationale Funktionen und Potenzfunktionen berechnen können. Für Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a^x$ ist noch keine Ableitung bekannt. Wir betrachten zunächst die Funktion f mit $f(x) = 2^x$. Mithilfe des GTR sind Grafen und Wertetabellen zur Funktion f, f´ und $\frac{f'}{f}$ dargestellt. Mit der Trace-Funktion ist darüber hinaus $f'(0)$ angegeben.







a) **Beschreibe** deine Beobachtungen und **begründe**, dass $f'(x) = f'(0) \cdot f(x) \approx 0{,}6931 \cdot 2^x$ gilt.

b) **Zeichne** zu f mit $f(x) = a^x$ mit dem GTR Grafen von f, f´ und $\frac{f'}{f}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem und **ermittle** die Ableitung von f an der Stelle 0. **Variiere** die Basis a und **beschreibe** deine Beobachtungen.

c) Es gibt eine Zahl e, die sogenannte **eulersche Zahl**, für die der Ableitungsgraf mit dem Funktionsgraf f mit $f(x) = e^x$ exakt übereinstimmt. Es gilt dann $f'(x) = f(x)$. **Ermittle** durch Variation der Werte von a eine Näherung für dieses Zahl e.

d) Im Folgenden sind Beweisschritte eines Nachweises angegeben, dass für eine Exponentialfunktion des Typs $f(x) = a^x$ gilt: $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$. **Bringe** die folgenden 8 Rechenschritte und Schlussfolgerungen in die logisch richtige Reihenfolge und **begründe** jede einzelne Termumformung und Schlussfolgerung. **Fülle** dazu die nachfolgende Tabelle **aus**.[6]

$a^x \cdot \frac{a^{0+h} - a^0}{h} =$	$\frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} =$	Für die Ableitung einer Exponentialfunktion von der Form $f(x) = a^x$ gilt: $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$	$a^x \cdot f'(0) = f'(0) \cdot a^x$
$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$	$a^x \cdot \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{}$	$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} =$	$\frac{a^x \cdot (a^h - 1)}{h} =$

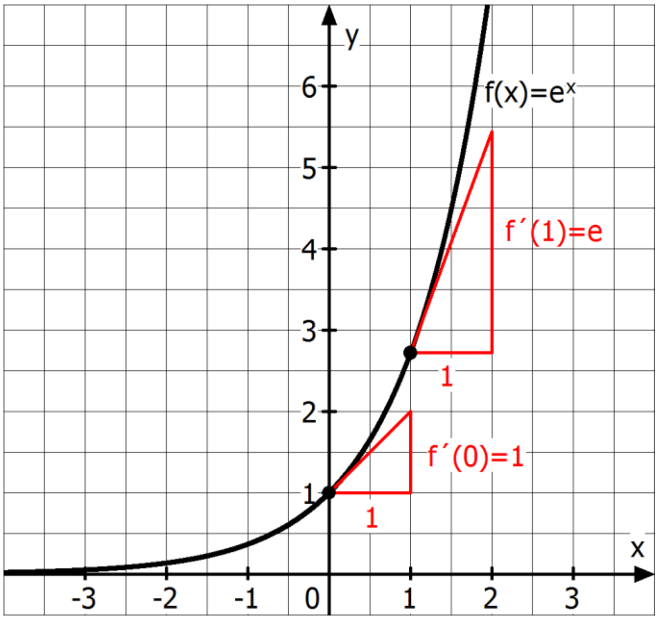
Begründung			
Begründung			

Merksatz zur Ableitung einer Exponentialfunktion: Für die Ableitung einer Exponentialfunktion vom Typ $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ gilt für die Ableitungsfunktion: $\mathbf{f'(x) = f'(0) \cdot a^x}$. Die Ableitungsfunktion einer Exponentialfunktion ist somit proportional zur Ausgangsfunktion.

[6] Aufgabenidee aus dem Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

Aufgabe 4: Natürliche Exponentialfunktion und eulersche Zahl e

Die Zahl e, für die **f´(x) = f(x) = e^{x}** gilt, heißt **eulersche Zahl** (Leonard Euler lebte von 1707 bis 1783). Die Zahl e ist irrational (und transzendent, d. h. lässt sich nicht als Lösung einer Gleichung ausdrücken) und beträgt ungefähr 2,71828. Die dazugehörige Funktion mit der Funktionsgleichung **f(x) = e^{x}** heißt **natürliche Exponentialfunktion**. Insbesondere ist F mit **F(x) = e^{x}** eine Stammfunktion von f. Der **Graf der natürlichen Exponentialfunktion** verläuft komplett oberhalb der x-Achse, ist linksgekrümmt, streng monoton wachsend und besitzt keine Null- und Extremstellen. Für $x \to +\infty$ streben die Funktionswerte gegen Unendlich. Für $x \to -\infty$ nähert sich der Graf der x-Achse an.



a) **Erkläre,** warum die natürliche Exponentialfunktion an der Stelle 0 die Steigung 1 hat.

b) **Begründe**, warum man mit dem Term $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für $n \to \infty$ einen Näherungswert für e berechnen kann. **Bringe** die folgenden Rechenschritte in die richtige Reihenfolge, **erläutere** die jeweiligen Äquivalenzumformungen und **bilde** abschließend den Grenzwert für $h \to 0$ bzw. $n \to \infty$.[7]

$e = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \approx 1$	$\frac{e^{0+h}-e^{0}}{h} \approx 1$	$e^{\frac{1}{n}} \approx 1+\frac{1}{n}$	Mit $h = \frac{1}{n}$ erhält man:	$e^{\frac{1}{n}} - 1 \approx \frac{1}{n}$

Begründung					

c) **Zeige**, dass der Graf der Exponentialfunktion linksgekrümmt ist, keine Wende-, Extrem- und Nullstellen besitzt und streng monoton wachsend ist.

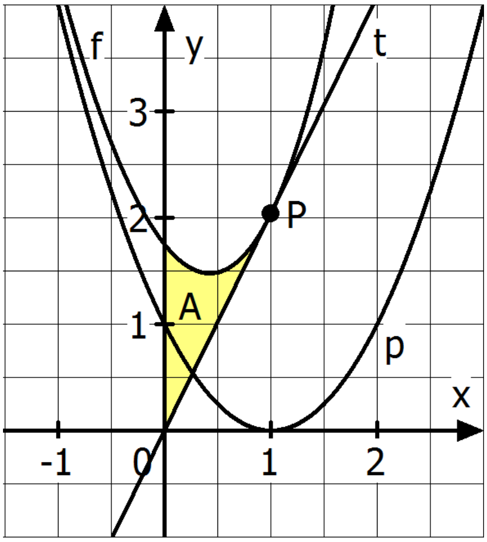
[7] Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

d) **Bestimme** den Flächeninhalt, den der Graf zu f mit $f(x) = e^x$ über folgenden Intervallen mit der x-Achse einschließt: $[0; 1]$; $[-1; 0]$; $[0; \ln(100)]$; $[-\ln(100); 0]$; $]-\infty; 0]$; $[0; +\infty[$.[8]

Merksatz: Es gilt für f mit $f(x) = e^x$ der Zusammenhang $f(x) = f'(x) = F(x) = e^x$.

Aufgabe 5: Berechnung von Ableitung, Tangente und Flächeninhalt

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 0{,}75e^x + x^2 - 2x + 1$. Im Punkt $P(1/f(1))$ wird eine Tangente angelegt. Die Tangente, der Graf von f sowie die beiden Koordinatenachsen schließen einen Flächeninhalt A ein. Darüber hinaus ist eine verschobene Normalparabel p gegeben. Die Gesamtsituation ist rechts dargestellt.



a) **Berechne** die Terme für $f'(x)$ und $f''(x)$ sowie $F(x)$.

b) **Bestimme** die Gleichung der Tangenten t im Punkt P.

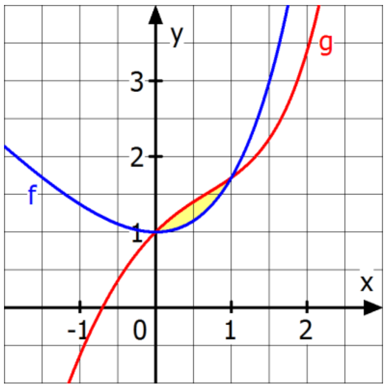
c) **Zeige**, dass der Graf von f linksgekrümmt ist.

d) **Ermittle** den Flächeninhalt des Flächenstücks A.

e) **Beweise**, dass der Graf von f und die Normalparabel p keine gemeinsamen Punkte besitzen.

Aufgabe 6: Flächeninhalt zwischen zwei Kurven und markante Punkte

Es sind Grafen zu den beiden Funktionen f und g mit den dazugehörigen Gleichungen $f(x) = -x + e^x$ und $g(x) = -x^2 + e^x$ gegeben.



a) **Berechne** die Schnittstellen der Funktionsgrafen zu f und g.

b) **Bestimme** rechnerisch den Flächeninhalt, den die beiden Grafen zu f und g einschließen.

c) **Ermittle** den globalen Tiefpunkt des Grafen von f und zeige, dass er durchweg linksgekrümmt ist.

d) **Untersuche** den Grafen von g auf sein Krümmungsverhalten.

Aufgabe 7: Transformation der natürlichen Exponentialfunktion[9]

a) **Skizziere** die Grafen zu den Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 und f_5 mit den dazugehörigen Funktionsgleichungen $f_1(x) = e^x, f_2(x) = e^x + 1, f_3(x) = -e^x, f_4(x) = e^{x+2}$ und $f_5(x) = e^{-x}$.

b) **Beschreibe** begründend, wie die Grafen von f_2, f_3, f_4 und f_5 aus dem Grafen der natürlichen Exponentialfunktion hervorgehen.

c) **Begründe** anhand der Ergebnisse aus a) und b), dass $f_5{}'(x) = -e^{-x}$ sein muss.

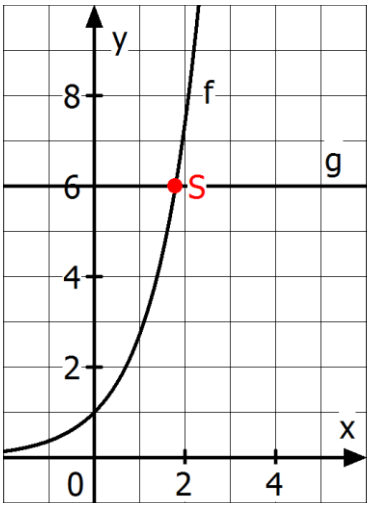
---

[8] $\ln(b)$ bezeichnet den Logarithmus von b zur Basis e, d. h. $\ln(b) = \log_e(b)$ (vgl. Kap. 5)

[9] Modifiziert nach Aufgaben aus dem Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

3 Natürlicher Logarithmus – Ableitung der Exponentialfunktion

Aufgabe 1: Natürlicher Logarithmus



a) **Bestimme** zeichnerisch den Schnittpunkt S des Graphen der natürlichen Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ und der Geraden g mit $g(x) = 6$. **Überprüfe** Deine Ablesung durch eine Rechnung.

b) Wenn die Lösung der Gleichung $e^x = b$ $(b > 0)$ gesucht ist, hilft uns der Logarithmus zur Basis e weiter. Denn $x = \log_e(b)$ ist Lösung genau dieser Gleichung. Hierfür schreiben wir zukünftig kürzer $\mathbf{ln(b)}$ und nennen diesen Ausdruck den **natürlichen Logarithmus von b**.

(1) **Überprüfe** die Ablesung aus a) geeignet mit dem natürlichen Logarithmus.

(2) **Begründe**: $e^{\ln(b)} = b$ $(b > 0)$ und $\ln(e^b) = b$ $(b \in \mathbb{R})$

(3) **Zeige:** $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$ und $\ln(x) \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} 0$ für $x \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} 1$.

(4) **Weise nach**: Jede Exponentialfunktion lässt sich durch $f(x) = a^x = e^{\ln(a)\cdot x}$ als Exponentialfunktion zur Basis e darstellen.

Definition:

Für eine positive reelle Zahl b heißt die Lösung x der Exponentialgleichung $e^x = b$ der **natürliche Logarithmus von b**. Man schreibt $\mathbf{x = ln(b)}$.

Merksätze:

(1) Es gilt: $\mathbf{e^{ln(b)} = b}$ $(b > 0)$ und $\mathbf{ln(e^c) = c}$ $(c \in \mathbb{R})$**.** Die Rechenoperationen $e^{\cdots}$ und $\ln(\ldots)$ heben sich gegenseitig auf, sind also Umkehroperationen zueinander.

(2) Jede Exponentialfunktion lässt sich zur Basis e schreiben durch $\mathbf{f(x) = a^x = e^{ln(a)\cdot x}}$.

c) **Schreibe** die Funktionen f, g, und h mit $f(x) = 3^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ und $h(x) = 0{,}2^x$ zur Basis e.

d) **Gib** die Lösungen mithilfe des natürlichen Logarithmus **an** und **bestimme** dann einen Näherungswert.[10]

(1) $e^x = 15$ (2) $e^x = 2{,}4$ (3) $e^{2x} = 7$ (4) $3 \cdot e^{4x} = 16{,}2$

(5) $e^{-x} = 10$ (6) $e^{4-x} = 1$ (7) $e^{4-4x} = 5$ (8) $2 \cdot e^{-x} = 5$

(9) $e^{2x+1} = 10$ (10) $3 \cdot e^{0,5x-1} = 1$ (11) $\frac{1}{3} \cdot e^{\frac{1}{4}x-1} = \frac{1}{5}$ (12) $-\frac{6}{7} \cdot e^{-\frac{2}{3}x+0,5} = \frac{7}{6}$

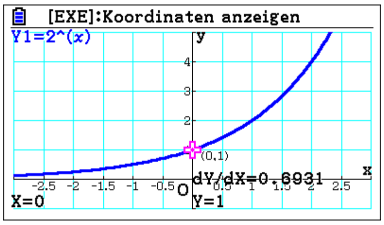
e) **Gib** die Lösungen mithilfe des natürlichen Logarithmus **an.** [Hinweis: Substituiere $u = e^x$, löse die quadratische Gleichung, bevor du x zurücksubstituierst.]

(1) $e^{2x} - 2 \cdot e^x = 0$ (2) $e^{2x} - 2 \cdot e^x = -1$ (3) $\frac{1}{10} \cdot e^{2x} - e^x = -\frac{12}{5}$ (4) $e^{4x} + e^{2x} + 1 = 0$

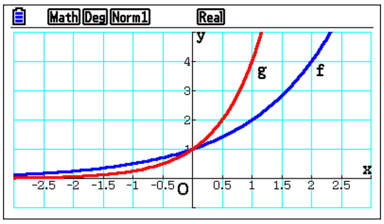
[10] Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

Aufgabe 2: Ableitung und Stammfunktion einer beliebigen Exponentialfunktion

In Kapitel 3 haben wir gezeigt, dass für eine beliebige Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ für den Term der Ableitung $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$ gilt. Wir wollen nun herausfinden, welchen Wert in Abhängigkeit von a der Proportionalitätsfaktor $f'(0)$ annimmt. Mithilfe des GTR[11] kann die Steigung an der Stelle Null bestimmt werden. Für die Funktion f mit $f(x) = 2^x$ ist dies in der Abbildung rechts dargestellt.



a) **Überprüfe** mit dem GTR die folgenden drei Aussagen für die beiden Funktionen f und g mit $f(x) = 2^x$ und $g(x) = 4^x$ (vgl. Abbildung rechts):[12]



(1) Der Graf G_f ist an der Stelle 0 halb so steil wie der Graf G_g.
(2) Der Graf G_f ist an jeder Stelle x_0 halb so steil wie der Graf G_g.
(3) G_f ist an der Stelle x_0 halb so steil wie G_g bei $x_1 = \frac{1}{2} \cdot x_0$.

b) **Zeichne** mit dem GTR verschiedene Grafen von Exponentialfunktionen und **notiere** in der folgenden Tabelle $f'(0)$. **Stelle** einen funktionalen Zusammenhang zwischen a und $f'(0)$ **her**.

a	e^{-3}	e^{-2}	$e^{-1} = \frac{1}{e}$	0,5	2	$e^1 = e$	3	e^2	e^3
$f'(0) \approx$					0,6931				

c) Wir wollen nun zunächst in zwei Schritten zeigen, dass der Ableitungsterm zur Funktion f mit $f(x) = e^{kx}$ folgendermaßen lautet: $f'(x) = k \cdot e^{kx}$.

(1) **Zeige**, dass die Funktion f mit $f(x) = e^{kx}$ eine Exponentialfunktion vom Typ $f(x) = a^x$ ist und daher für die Ableitung $f'(x) = f'(0) \cdot e^{kx}$ gilt. [Tipp: Potenzregel]

(2) **Weise** mithilfe der h-Methode nach, dass $f'(0) = k$ ist und damit mit (1) die Behauptung erfüllt ist. **Bringe** dazu begründend die folgenden Beweisschritte in die richtige Reihenfolge.

$k \cdot \frac{e^{0+k \cdot h} - e^0}{k \cdot h} =$	$k \cdot \frac{e^{0+t} - e^0}{t} \xrightarrow[t=k \cdot h \to 0]{h \to 0}$	$\frac{e^{k \cdot (0+h)} - e^{k \cdot 0}}{h} =$	$k \cdot 1 = f'(0)$
$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$	$\frac{k}{k} \cdot \frac{e^{0+k \cdot h} - e^0}{h} =$	Für die Ableitung einer Exponentialfunktion von der Form $f(x) = e^{kx}$ gilt: $f'(x) = k \cdot e^{kx}$	$\frac{e^{0+k \cdot h} - e^0}{h} =$

Begründung			
Begründung			

---

[11] Stelle im SET UP Derivative auf ON.

[12] Idee aus Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

Merksatz: Für die Ableitung einer Exponentialfunktion mit $f(x) = e^{kx}$ gilt: $\mathbf{f'(x) = k \cdot e^{kx}}$ ($k \in \mathbb{R}$).

d) Sei f nun eine beliebige Exponentialfunktion mit $f(x) = a^x$. **Beweise**, dass für den Ableitungsterm einer beliebigen Exponentialfunktion $\mathbf{f'(x) = ln(a) \cdot a^x}$ gilt. [Tipp: Schreibe f zur Basis e und wende den obigen Merksatz an.]

Merksatz: Für die Ableitung einer Exponentialfunktion mit $f(x) = a^x$ gilt: $\mathbf{f'(x) = ln(a) \cdot a^x}$.

e) **Begründe**:

(1) Die Stammfunktion einer Exponentialfunktion des Typs $f(x) = a^x$ lautet: $\mathbf{F(x) = \frac{1}{ln(a)} \cdot a^x}$.

(2) Die Stammfunktion einer Exponentialfunktion des Typs $f(x) = e^{kx}$ lautet: $\mathbf{F(x) = \frac{1}{k} \cdot e^{kx}}$.

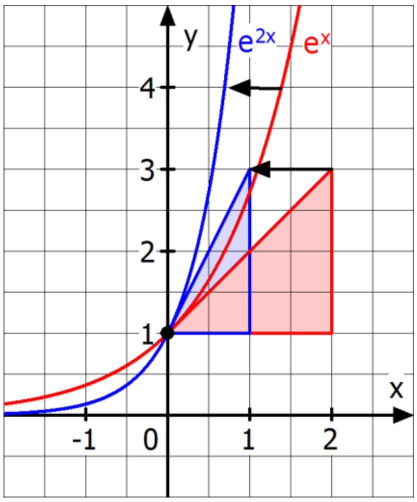
Merksatz: Für die Stammfunktionen der Funktionen f mit $f(x) = a^x$ und g mit $g(x) = e^{kx}$ gilt: $\mathbf{F(x) = \frac{1}{ln(a)} \cdot a^x}$ und $\mathbf{G(x) = \frac{1}{k} \cdot e^{kx}}$.

f) **Schreibe** die Funktionsterme – falls notwendig – zunächst zur Basis e, **berechne** die ersten beiden Ableitungen und die Stammfunktion sowie die Gleichung der Tangente im Punkt P.

(1) $f(x) = 3^x$, $P(1/3)$ (2) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $P(-1/4)$

(3) $f(x) = x^2 - 2^x$, $P(2/f(2))$ (4) $f(x) = e^{-2x} + 4^{-x}$, $P(0/f(0))$

Aufgabe 3: Transformationen der natürlichen Exponentialfunktion



a) In der Abbildung rechts sind der Graf der natürlichen Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ und der Graf einer Exponentialfunktion g mit $g(x) = e^{2x}$ angegeben.

a) **Erläutere** mithilfe der Darstellung, warum an der Stelle 0 die Steigung des Grafen zu g doppelt so groß ist wie die des Grafens von f an der Stelle 0.

b) **Begründe** mit (1) und unter Zuhilfenahme des Merksatzes für beliebige Exponentialfunktionen aus Kapitel 3, dass $g'(x) = 2 \cdot e^{2x}$ gilt.

b) Durch Transformation kann aus dem Graphen der natürlichen Exponentialfunktion ein Graf einer Exponentialfunktion der Form $f_{c,k}(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$ ($c, k \in \mathbb{R}^{\neq 0}$) erzeugt werden.

(1) **Erläutere**, welche Transformationen durch die beiden Parameter c und k erzeugt werden.

(2) **Beschreibe** den Grafenverlauf (Verhalten im Unendlichen, Monotonie, Schnittpunkte mit den Achsen, Krümmungsverhalten) für verschiedene Werte von c und k und **zeichne** mit dem GTR entsprechende Beispielgrafen.

(3) **Gib** erste und zweite Ableitung und Stammfunktion von $f_{c,k}$ an.

(4) **Weise** die Beschreibungen aus (2) in Bezug auf Monotonie und Krümmungsverhalten rechnerisch **nach**.

Aufgabe 4: Skizzieren von Grafen, Flächenberechnung und Tangente

Gegeben seien die Funktion f mit $f(x) = 2^x$ und g mit $g(x) = -2x + 4$.

a) **Skizziere** die Grafen in ein Koordinatensystem.

b) **Weise nach**, dass S(1/2) der einzige Schnittpunkt der beiden Grafen ist.

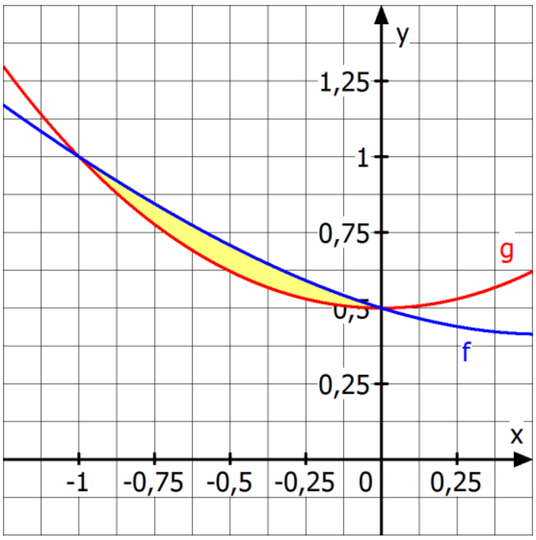
c) **Bestimme** mithilfe der Stammfunktionen zu f und g den Inhalt der Fläche, den die Grafen von f und g und die y-Achse einschließen.

d) **Bestimme** die Gleichung der Tangenten an den Grafen von f im Punkt S.

e) Gesucht ist der Graf einer Exponentialfunktion der Form $f(x) = e^{k \cdot x}$ $(k \in \mathbb{R}^{\neq 0})$, der eine zu g parallele Gerade als Tangente besitzt. **Ermittle** einen Lösungsansatz für die Bestimmung der gesuchten Exponentialfunktion und **begründe**, warum $k < 0$ sein muss.

Aufgabe 5: Flächeninhalt zwischen zwei Kurven und markante Punkte

Es sind Grafen zu den beiden Funktionen f und g mit den dazugehörigen Gleichungen $f(x) = -x + 2^x - 0{,}5$ und $g(x) = 2^x + 2^{-x} - 1{,}5$ gegeben. Die Grafen sind rechts dargestellt.



a) **Zeige** rechnerisch, dass -1 und 0 Schnittstellen der Funktionsgrafen zu f und g sind.

b) **Bestimme** rechnerisch den Flächeninhalt, den die beiden Grafen zu f und g einschließen (vgl. Abb.).

c) **Untersuche** die Grafen von f und g auf lokale und globale Extremstellen.

d) **Untersuche** beide Grafen auf ihr Krümmungsverhalten.

Aufgabe 6: Gilt immer – gilt nie – kommt darauf an

Entscheide begründend, ob die 6 Aussagen immer, nie oder unter bestimmten Bedingungen gelten.

(1) Die Grafen von f mit $f(x) = e^{k \cdot x} (k \in \mathbb{R}^{\neq 0})$ haben weder Hoch- noch Tiefpunkte.
(2) Die Grafen von f mit $f(x) = e^{k \cdot x}$ $(k \in \mathbb{R}^{\neq 0})$ haben mit der Geraden $y = a$ genau 1 Schnittpunkt.
(3) Die Ableitung von f mit $f(x) = e^{k \cdot x}$ $(k \in \mathbb{R}^{\neq 0})$ ist an der Stelle $x = 0$ positiv.
(4) Die Grafen von f und g mit $f(x) = e^{-\ln(a) \cdot x}$ und $g(x) = a^x$ sind für $a > 0$ symmetrisch zueinander.
(5) Der Ableitungsgraf von f mit $f(x) = a^x$ verläuft für $a > 0$ immer oberhalb der x-Achse.
(6) Die Exponentialgleichung $c \cdot e^{k \cdot x} - 1 = 0$ $(c, k \in \mathbb{R}^{\neq 0})$ besitzt genau eine Lösung.

4 Natürliche Logarithmusfunktion

Aufgabe 1: Funktionspartner[13]

Im Folgenden sind 5 Aussagen und 8 Funktionen angegeben. **Ermittle** passende Begründungen für die Aussagen und ermittle fehlende Funktionspartner.

(1) Der Funktionspartner von $y = x^2$ ist $y = \sqrt{x}$.

(2) Der Funktionspartner von $y = x^3$ ist $y = \sqrt[3]{x}$.

(3) Für $f(x) = x + 3$ ist keine Partnerfunktion genannt.

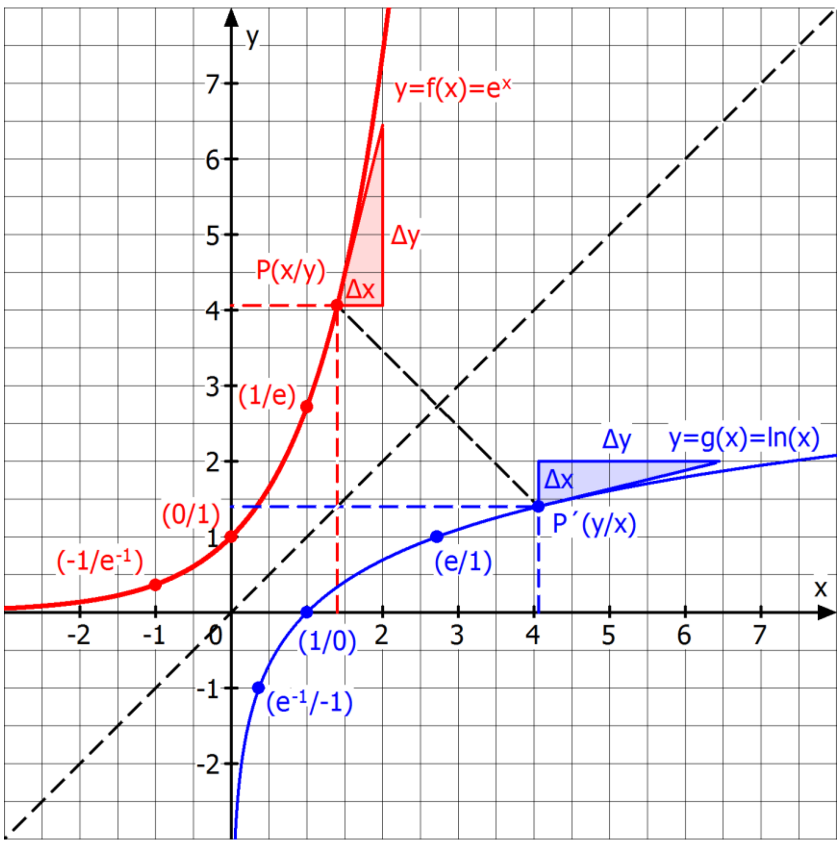
(4) Der Funktionspartner von $y = 3x$ lautet $y = \frac{1}{3}x$.

(5) Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ hat sich selbst als Partnerfunktion.

$y = x^2$	$y = \frac{1}{3}x$	$y = \sqrt{x}$	$y = 3x$	$y = x + 3$	$y = \sqrt[3]{x}$	$y = x^3$	$y = \frac{1}{x}$

Aufgabe 2: Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion

In der folgenden Abbildung siehst du den Grafen der natürlichen Exponentialfunktion f mit der Gleichung $f(x) = e^x$, der an der ersten Winkelhalbierenden $y = x$ gespiegelt wurde. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass der gespiegelte Graf den Grafen der natürlichen Logarithmusfunktion g mit $g(x) = \ln(x)$ darstellt, der die Ableitungsfunktion $g'(x) = \frac{1}{x}$ besitzt und **Umkehrfunktion** („Partnerfunktion" aus Aufgabe 1) zur Funktion f genannt wird.



[13] Aufgabenidee aus Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

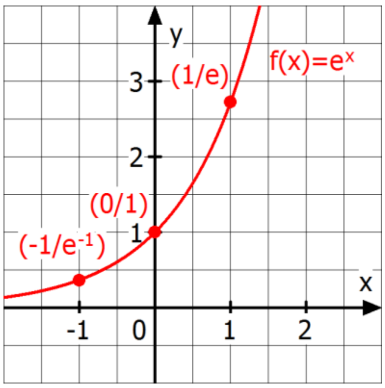
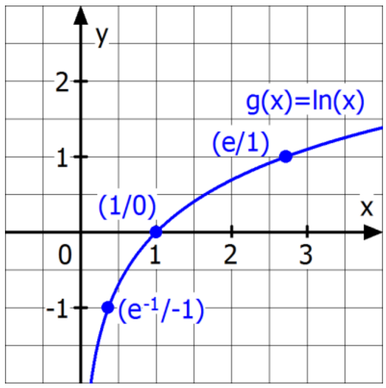
a) **Begründe** mithilfe elementargeometrischer Überlegungen, warum für den Spiegelpunkt eines beliebigen Punktes P(x/y) des Grafen der natürlichen Exponentialfunktion P´(y/x) gilt. [Tipp: Kongruenzsätze für Dreiecke.]

b) In Aufgabenteil a) haben wir gezeigt, dass für einen beliebigen Punkt P des Grafen der natürlichen Exponentialfunktion den dazugehörigen Bildpunkt P´ erhält, indem man x- und y-Wert vertauscht. **Führe** die Gleichung $y = e^x$ geeignet in die Gleichung $y = \ln(x)$ **über**.

c) **Zeige** mithilfe der obigen Abbildung, den beiden Steigungsdreiecken in den Punkten P und P´ sowie den Überlegungen aus a), dass die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion $y' = e^x$ geeignet in die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion $y' = \frac{1}{x}$ überführt werden kann.

Satz und Definition:

Der Graf der Funktion g, die man durch Spiegelung des Grafen der natürlichen Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ an der ersten Winkelhalbierenden erhält, ist der **Graf der natürlichen Logarithmusfunktion** mit der Gleichung $g(x) = \ln(x)$. Man nennt die Funktion g auch eine **Umkehrfunktion** der Funktion f. Das Umkehren eines Grafen einer Funktion f ist nur dann möglich, wenn zu jedem Funktionswert von f **genau ein** x-Wert existiert. Andernfalls würde man beim gespiegelten Graf einem x-Wert des Definitionsbereiches von g (= Wertebereich von f) mehr als ein Funktionswert aus dem Wertebereich von g (= Definitionsbereich von f) zuordnen, was für eine Funktion nicht möglich ist. Die wichtigsten Eigenschaften beider Funktionen sind in folgender Tabelle vergleichend dargestellt:

	Natürliche Exponentialfunktion (EXP)	Natürliche Logarithmusfunktion (LN)
Funktionsgleichung	$f(x) = e^x$	$g(x) = \ln(x)$
Graf		
Definitionsbereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{>0}$
Wertebereich	$\mathbb{R}^{>0}$	$\mathbb{R}$
Monotonie	streng monoton wachsend	streng monoton wachsend
Randverhalten	$x \to +\infty$: $f(x) \to +\infty$	$x \to +\infty$: $f(x) \to +\infty$
	$x \to -\infty$: $f(x) \to 0$	$x \to 0$: $f(x) \to -\infty$
Nullstellen	keine	$x = 1$
y-Achsenschnittstelle	$y = 1$	keine
Krümmungsverhalten	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt
Ableitungsterm	e^x	$\frac{1}{x}$

d) **Zeige** rechnerisch folgende Eigenschaften der natürliche Logarithmusfunktion g mit $g(x) = \ln(x)$:

(1) Die Funktion g ist auf $\mathbb{R}^{>0}$ monoton steigend und besitzt dort keine Extremstellen.
(2) 1 ist einzige Nullstelle von g.
(3) Die Funktion g ist auf $\mathbb{R}^{>0}$ rechtsgekrümmt.
(4) Der Graf der natürlichen Logarithmusfunktion überschreitet jede noch so große Schranke bzw. unterschreitet jede noch so kleine (betragsmäßig große) Grenze.

e) **Gib** Beispiel für Funktionen an, die nicht auf ihrem gesamten Definitionsbereich umkehrbar sind. **Erläutere** bei diesen Funktionen die entsprechende Vorgehensweise für das Umkehren.

Merksatz: Da zu g mit $g(x) = \ln(x)$ für die Ableitung g´ die Gleichung $g'(x) = \frac{1}{x}$ gilt, ist umgekehrt F mit $F(x) = \ln(x)$ für $x > 0$ eine Stammfunktion zu f mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

Aufgabe 3: Flächenberechnung im Kontext der natürlichen Logarithmusfunktion

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und eine Gerade g mit $g(x) = -x + 2{,}5$.

a) **Skizziere** beide Grafen in ein Koordinatensystem.

b) **Berechne** die Schnittpunkte beider Grafen zu f und g.

c) **Bestimme** der Inhalt der Fläche, den die Grafen von f und g vollständig umschließen.

d) **Berechne** den Flächeninhalt, den der Graf der Funktion f über dem Intervall [1; 10] mit der x-Achse einschließt.

e) **Untersuche** die Integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ und $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ auf Existenz und **deute** das Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 4: Flächenberechnung bei zusammengesetzten Funktionen

Berechne mithilfe der Stammfunktion den Inhalt der Fläche, den der Graf der Funktion f über dem Intervall I mit der x-Achse einschließt.

a) $f(x) = \frac{1}{3x} + x$ und I = [1; 3] b) $f(x) = \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}$ und I = [1; 2] c) $f(x) = e^{2x} + \frac{1}{2x}$ und I = [1; 2]

Aufgabe 5: Wahr oder falsch[14]

Begründe die jeweilige Aussage oder **widerlege** sie durch ein Gegenbeispiel.

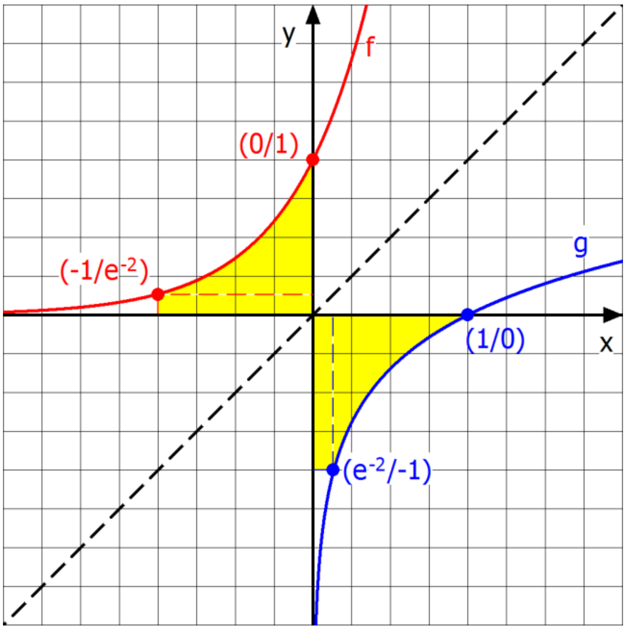
(1) Ist eine ganzrationale Funktion gerade, ist sie nicht umkehrbar.
(2) Ist eine ganzrationale Funktion nicht umkehrbar, dann ist sie gerade.
(3) Hat eine ganzrationale Funktion keine Extremstellen, dann ist sie umkehrbar.
(4) Ist eine ganzrationale Funktion umkehrbar, hat sie keine Extremstellen.
(5) Jede umkehrbare Funktion ist monoton zunehmend oder monoton abnehmend.
(6) Für die Funktion f mit $f(x) = x^2 (x > 0)$ ist g mit $g(x) = \sqrt{x}$ die Umkehrfunktion.

---

[14] Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

Aufgabe 6: Komplexe Aufgabe

Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = e^{2x}$ und g mit $g(x) = \ln(\sqrt{x})$ $(x > 0)$.



a) **Zeige**, dass $g(x) = \frac{1}{2}\ln(x)$ und g für $x > 0$ eine Umkehrfunktion zu f ist.

b) **Weise** folgende Behauptungen **nach**:

(1) Die Funktion g hat die Nullstelle $x = 1$.

(2) $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2}$

(3) $\int_{e^{-2}}^{1} g(x)\,dx = \frac{3}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}$

(4) $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{1} g(x)\,dx = \frac{1}{2}$

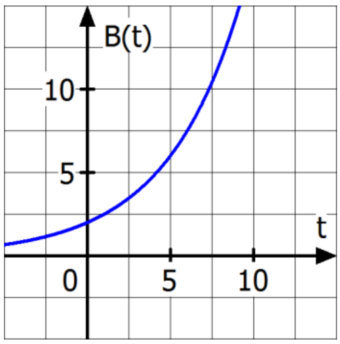
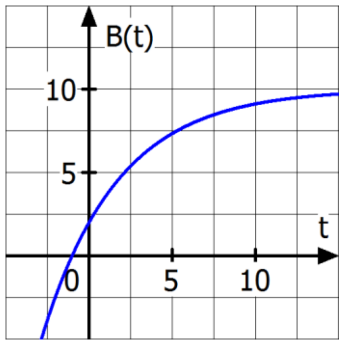
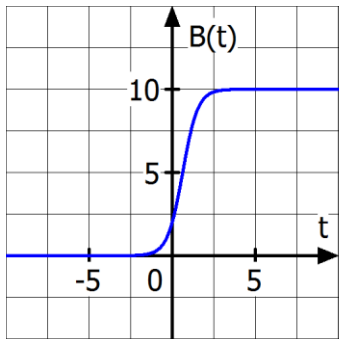
c) **Ermittle** mithilfe von g´ die Gleichung der Tangente t an den Grafen von f im Punkt (1/0). [Kontrollergebnis: $t(x) = 0{,}5x - 0{,}5$]

d) **Bestimme** mithilfe von c) (4) den Inhalt der unbeschränkten Fläche, welche die Tangente t und der Graf von g über dem Intervall [0; 1] und die y-Achse begrenzen.

5 Wachstumsvorgänge

Aufgabe 1: Populationsdynamik

In der **Populationsdynamik** wird die Frage untersucht, wie sich ein Bestand von Individuen B(t) im Laufe der Zeit verändert. Die Wachstumsgeschwindigkeit des Bestands B´(t) ist beim linearen Wachstum zu jedem Zeitpunkt konstant. Im Folgenden sollst du Wachstumsarten untersuchen, bei denen sich die Wachstumsgeschwindigkeit B´(t) zu jedem Zeitpunkt ändert. Die folgende Tabelle benennt drei Wachstumsarten, gibt die Eigenschaft von B´(t) an und zeigt einen möglichen Grafenverlauf für den Bestand B(t).

Wachstumsart	**exponentiell**	**beschränkt**	**logistisch**
Eigenschaften von B´(t)	Die Wachstumsgeschwindigkeit B´(t) ist proportional zum Bestand B(t): $\mathbf{B'(t) = k \cdot B(t)}$	Die Wachstumsgeschwindigkeit B´(t) ist proportional zum Sättigungsmanko S – B(t) (= Differenz aus Sättigungsgrenze S und Bestand B(t)): $\mathbf{B'(t) = k \cdot (S - B(t))}$	Die Wachstumsgeschwindigkeit B´(t) ist proportional zum Bestand und zum Sättigungsmanko: $\mathbf{B'(t) = k \cdot B(t) \cdot (S - B(t))}$
Verlauf des Bestandes B(t)			
Beispiel	**Algenwachstum**	**Leistungszuwachs im 100-m-Sprint**	**Verbreitung eines Gerüchts**

a) **Gib** für alle Wachstumsarten den Anfangsbestand B(0) an und **trage** ihn jeweils in die Abbildungen **ein**.

b) Beim beschränkten und logistischen Wachstum wird für die Population eine Sättigung S angenommen, da es begrenzende Faktoren wie Nahrung, Lebensraum, Nistplätze usw. gibt. **Gib** jeweils die Sättigungsgrenze S **an** und **zeichne** die Werte in die Abbildungen ein.

c) **Erläutere** die angegebenen Beispiele und **gib** weitere Beispiele für die Wachstumsarten **an**. **Ordne** begründend zu jeder Wachstumsart eine der folgenden Prozesse **zu**: Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit, Guthabenzunahme auf einem Sparkonto, Erwärmung eines Tiefkühlprodukts bei Zimmertemperatur.

d) **Untersuche** mit dem GTR, welche der Wachstumsarten welcher der drei Bestandsfunktionen zugeordnet werden kann.

$$\mathbf{B_1(t) = 10 - (10-2)e^{-0,22t}} \qquad \mathbf{B_2(t) = \frac{2 \cdot 10}{2 + (10-2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}}} \qquad \mathbf{B_3(t) = 2 \cdot e^{0,22t}}$$

e) **Zeige**, dass $\mathbf{B_1(t)}$ und $\mathbf{B_3(t)}$ die dazugehörige Differentialgleichung aus Wachstumsgeschwindigkeit B´(t) und Bestand B(t) aus der obigen Tabelle erfüllen.[15]

f) **Entscheide** begründend, zu welcher Wachstumsform die Formulierungen am ehesten passen.[16]

FORMULIERUNG	WACHSTUMSFORM
(1) Marcel ist 9 Jahre alt und erhält 2,50€ Taschengeld pro Woche. Zu jedem Geburtstag erhält er eine Erhöhung des Taschengeldes von 50 Cent. Zu dem Betrag von 5€ „fehlen ihm" noch 5 Jahre.	☐ linear ☐ logistisch ☐ exponentiell ☐ beschränkt ☐ kein Wachstum
(2) Das mobile Kommunikationsgerät „e-banana" wird neu auf dem Markt eingeführt. Die Absatzzahlen hängen linear davon ab, wie viele Geräte schon verkauft sind und wie viele noch verkauft werden können.	☐ linear ☐ logistisch ☐ exponentiell ☐ beschränkt ☐ kein Wachstum
(3) Eine Grünpflanze erreicht eine maximale Wuchshöhe von 2,70 m. Je kleiner die Pflanze, desto schneller wächst sie.	☐ linear ☐ logistisch ☐ exponentiell ☐ beschränkt ☐ kein Wachstum
(4) Frau Wegner legt ihr Geld in einem Rentenfond an, der ihr jährlich einen Zinssatz 3,5 % garantiert.	☐ linear ☐ logistisch ☐ exponentiell ☐ beschränkt ☐ kein Wachstum
(5) Im Verlauf eines Tages steht die Sonne unterschiedlich hoch.	☐ linear ☐ logistisch ☐ exponentiell ☐ beschränkt ☐ kein Wachstum
(6) Stellt man ein 25 °C warmes Getränk in den Kühlschrank, so kühlt es ab, weil es sich seiner Umgebungstemperatur anpasst.	☐ linear ☐ logistisch ☐ exponentiell ☐ beschränkt ☐ kein Wachstum
(7) In einer Herde mit 750 Tieren sterben jährlich 3 % der Tiere; allerdings werden pro Jahr auch 15 Neue geboren.	☐ linear ☐ logistisch ☐ exponentiell ☐ beschränkt ☐ kein Wachstum
(8) Sandra und Maria setzen ein Gerücht in die Welt. Seine Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt zum einen davon ab, wie viele Leute das Gerücht schon vernommen haben; zum anderen davon, wie viele das Gerücht noch erreichen kann.	☐ linear ☐ logistisch ☐ exponentiell ☐ beschränkt ☐ kein Wachstum
(9) Das radioaktive Kohlenstoff-Isotop C-14 zerfällt mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren.	☐ linear ☐ logistisch ☐ exponentiell ☐ beschränkt ☐ kein Wachstum

[15] Der Nachweis, dass B_2 die entsprechende Differenzialgleichung erfüllt, bedarf weiterer Ableitungsregeln (z. B. Kettenregel)

[16] Aus dem Zusatzmaterial des Fokus Mathematik für die Q-Phase, Cornelsen-Verlag (2014)

Aufgabe 2: Exponentielles Wachstum

a) Bei einem Würfelspiel wird eine bestimmte Anzahl von Würfeln geworfen. Alle Sechsen werden aussortiert. Dann werden die übrigen Würfel geworfen und die Sechsen werden aussortiert. So geht es weiter. Leah spielt das Spiel. Nach 10 Würfen hat sie noch 5 Würfel. **Untersuche**, wie viele sie vermutlich zu Beginn hatte.[17]

> **Definition:** Eine Gleichung, die den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen beschreibt, heißt **Differentialgleichung**.

> **Satz:** Eine Bestandsfunktion der Form $\mathbf{B(t) = B(0) \cdot e^{kt}}$ beschreibt exponentielles Wachstum. Sie modelliert für $\mathbf{k > 0}$ eine **exponentielle Zunahme**, für $\mathbf{k < 0}$ eine **exponentielle Abnahme** und erfüllt eine Differentialgleichung der Form $\mathbf{B'(t) = k \cdot B(t).}$

b) **Innermathematische Zusammenhänge:**

(1) **Beweise** die Richtigkeit des Satzes.[18]

(2) **Zeige**, dass folgende Aussage gilt: Ist die Funktion B in der Form $\mathbf{B(t) = B(0) \cdot a^t}$ mit dem Wachstumsfaktor $a > 0$ gegeben, so erhält man durch $\mathbf{k = \ln(a)}$ den Basiswechsel von der Basis a zur Basis e. Es gilt: $\mathbf{B(t) = B(0) \cdot e^{kt} = B(0) \cdot a^t}$.[19]

(3) **Gib** für die Beispielfunktion B_3 die Proportionalitätskonstante k **an** und **bestimme** den Wachstumsfaktor a.

c) **Bevölkerungswachstum:** Im Jahre 1950 lebten 2,5 Milliarden Menschen auf der Erde, 1980 waren es 4,5 Milliarden. Das Bevölkerungswachstum wird durch eine exponentielle Bestandsfunktion B mit $B(t) = B(0) \cdot e^{kt}$ beschrieben.

(1) **Ermittle** die Wachstumskonstante k, den Wachstumsfaktor a.

(2) **Bestimme** die Verdopplungszeit und **interpretiere** das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(3) **Vergleiche** die Ergebnisse der Modellfunktion mit den Daten für 2005 (6,4 Milliarden) bzw. 1920 (1,8 Milliarden) und **berechne** jeweils die prozentuale Abweichung des Modellwertes vom tatsächlichen Wert.

d) **Bakterienwachstum:** In einer Bakterienkultur wird stündlich die Anzahl der Bakterien gezählt.

Zeit t (in h)	0	1	2	3	4	5
Bakterienanzahl B(t)	80	145,9	266,4	482,4	875,7	1597,8
$\mathbf{a = \frac{f(t+1)}{f(t)}}$		1,824	1,826	1,811	1,815	1,825
Wachstumsgeschwindigkeit B´(t)						

(1) **Zeige**, dass es sich um ein exponentielles Wachstum handelt und **bestimme** die Bestandsfunktion B der Formen $B(t) = B(0) \cdot e^{kt} = B(0) \cdot a^t$ (k auf 4 Nachkommastellen).

---

[17] Aus Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)
[18] Für die Funktion B_3 hast du dies in Aufgabe 1 e) bereits erledigt.
[19] Vergleiche Kapitel 4 Merksatz (2) unter Aufgabe 1

(2) **Bestimme** mit dem GTR die Wachstumsgeschwindigkeiten B´(t) zu den Zeitpunkten in der Tabelle.

(3) **Gib** einen Term für die Wachstumsgeschwindigkeit B´(t) an und **berechne**, wann sich die Wachstumsgeschwindigkeit verdoppelt hat.

e) **Bestimmung einer Zerfallsfunktion:** Zur Untersuchung der Langzeitwirkung eines Medikaments wurde einer Versuchsperson eine Dosis von 70 mg verabreicht und im täglichen Abstand die Konzentration des Medikaments im Blut gemessen.

Zeit t (in Tagen)	0	1	2	3	4	5
Konzentration (in mg/l)	10	7,20	5,18	3,73	2,68	1,98
$\mathbf{a = \frac{f(t+1)}{f(t)}}$						

(1) **Zeige**, dass es sich um eine exponentielle Abnahme handelt und **bestimme** die Bestandsfunktion B der Form $B(t) = B(0) \cdot e^{kt}$ (k auf 4 Nachkommastellen).

(2) **Ermittle** eine zweite exponentielle Funktion C falls nur bekannt ist, dass die Konzentrationen nach 2 Tagen 5 mg/l und nach 5 Tagen 2 mg/l betragen.

f) **Exponentielles Wachstum und Integralrechnung:** Die Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze (in cm pro Woche) kann durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden: $v(t) = 3{,}8 \cdot 0{,}9^t$. Dabei gibt t die Anzahl der Wochen seit dem Einpflanzen der Pflanze an. Zu Beginn bei t = 0 war die Pflanze 10 cm hoch.

(1) **Berechne** mithilfe der Funktion v die zu erwartende Höhe der Pflanze 10 Wochen nach dem Einpflanzen.

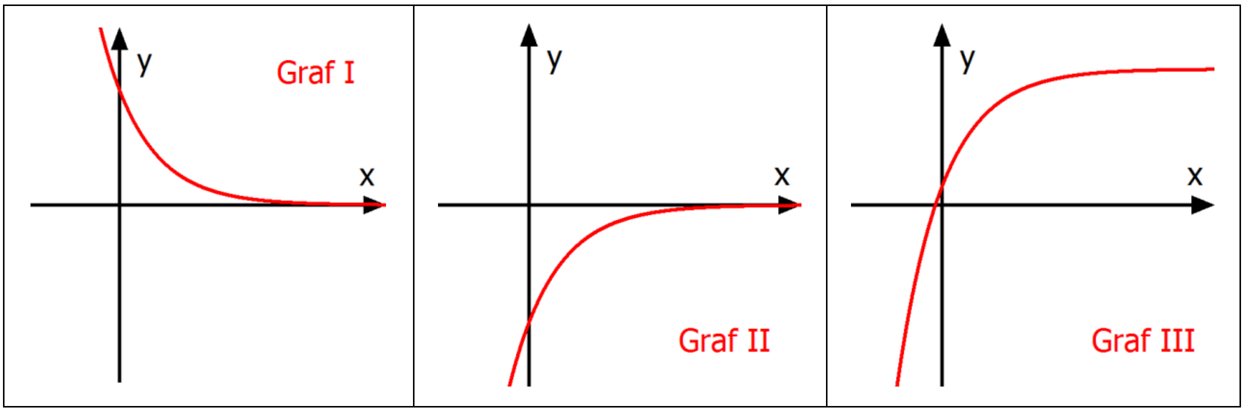
(2) **Ermittle** die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit innerhalb der ersten 10 Wochen.

(3) **Bestimme** die Halbwertszeit der Wachstumsgeschwindigkeit.

(4) **Interpretiere** das Integral $\int_0^t v(x)\,dx$ im Sachkontext.

Aufgabe 3: Beschränktes Wachstum[20]

a) Im Folgenden sind drei Grafen gegeben.



[20] Ideen aus Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

(1) **Gib an**, welche Transformationen den Grafen I in den Grafen III überführen.

(2) Graf I gehört zur Funktionsgleichung f mit $f(x) = ce^{k \cdot x}$. **Erläutere**, was man über die Parameter c und k sagen kann.

(3) **Nenne** eine mögliche Funktionsgleichung für den Grafen III.

Satz: Eine Bestandsfunktion $\mathbf{B(t) = S - (S - B(0)) \cdot e^{-kt}}$ (k > 0) beschreibt beschränktes Wachstum und erfüllt eine Differentialgleichung der Form $\mathbf{B'(t) = k \cdot (S - B(t))}$. Die Wachstumsgeschwindigkeit B´(t) des beschränkten Wachstums ist proportional zum Sättigungsmanko S – B(t).

b) **Ökologische Ackernutzung:** In einem landwirtschaftlich genutzten Gebiet mit einer Gesamtfläche von 700 ha beginnen einige Bauern auf einer Fläche von 80 ha ihre Felder ökologisch zu bewirtschaften. Sie erwarten, dass sich in jedem der folgenden Jahre die Besitzer von 10% der jeweils restlichen Anbaufläche ihrer Anbaumethode anschließen werden.

(1) **Bestimme** für die nächsten 5 Jahre die jeweils ökologisch genutzte Ackerfläche.

(2) **Skizziere** ein Schaubild, wie sich unter der genannten Erwartung die ökologisch genutzte Ackerfläche in Abhängigkeit von der Zeit verändert und **erläutere**, warum es sich dabei um ein beschränktes Wachstum handelt.

(3) **Bestimme** eine Funktionsgleichung f(t), welche die ökologisch genutzte Ackerfläche nach t Jahren angibt.

c) **Abkühlen von Kaffee**: Frisch aufgebrühter 80°C heißer Kaffee wird in einem 20°C warmen Raum stehen gelassen. f(t) sei nun die Temperatur des Kaffees zum Zeitpunkt t. In der folgenden Wertetabelle wird die Temperatur B(t) des Kaffees, die Temperaturdifferenz D(t) = 20 – B(t) zur Raumtemperatur und die Wachstumsgeschwindigkeit B´(t) für die Zeitpunkte t = 0, 1, …, 10 angegeben.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B(t)	80	71	63,4	56,8	51,3	46,6	42,6	39,2	36,3	33,9	31,8
B´(t)	-9,8	-8,3	-7,1	-6	-5,1	-4,3	-3,7	-3,1	-2,7	-2,3	-1,9
D(t) = 20 – B(t)	-60	-51	-43,4	-36,8	-31,3	-26,6	-22,6	-19,2	-16,3	-13,9	-11,8
B´(t):D(t)											

(1) **Zeichne** den Grafen zu B.

(2) **Berechne** den Quotienten aus Abkühlgeschwindigkeit und Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur für die Zeitpunkte t = 0, 1, …, 10 und **begründe,** dass es sich bei der Funktion B um ein beschränktes Wachstum handelt.

(3) **Ermittle** eine Funktion, dessen Graf den Verlauf des Abkühlvorgangs gut wiedergibt (runde k auf die vierte Nachkommastelle). [Zur Kontrolle: $B(t) = 20 + 60 \cdot e^{-0,1625t}$.]

(4) **Berechne** mit Hilfe des Funktionsterms die Temperatur des Kaffees nach 20 Minuten und den Zeitpunkt, an dem der Kaffee die Temperatur von 40°C unterschritten hat.

(5) **Gib** die Abkühlungsrate (in $\frac{°C}{min}$) der noch vorhandenen Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur **an**.

d) **Karpfenpopulation:** In einem Karpfenteich, in dem 1000 Karpfen leben können, werden zu Beginn 100 Tiere ausgesetzt. Diese vermehren sich so, dass die jährliche Zuwachsgeschwindigkeit 15% des Unterschiedes zwischen 1000 und aktuellem Fischbestand beträgt. **Ermittle** den Term für die Anzahl der Fische im Teich in Abhängigkeit von der Zeit.

e) **Wachstum einer Sonnenblume:** Unter günstigen Bedingungen kann eine Sonnenblume 3 m groß werden. Wöchentlich kann sie um 12% der Differenz zwischen 3 m und aktueller Höhe wachsen. Eine Pflanze ist am Anfang 50 cm hoch. **Bestimme** den Term für ihre Größe in Abhängigkeit von der Zeit.

f) **Kabelanschluss:** Eine Gemeinde mit 5000 Haushalten erhält Kabelanschluss. Zu Beginn werden 200 Haushalte angeschlossen. Danach kommen monatlich 5% der Differenz zu 5000 hinzu. **Ermittle** den Term für die Anzahl der Haushalte in Abhängigkeit von der Zeit und **untersuche**, ab wann 90 % aller Haushalte verkabelt sind.

g) **Fieberentwicklung:** Ein Patient hat Fieber mit 40°C Körpertemperatur. Er erhält ein fiebersenkendes Mittel, das die Körpertemperatur nach Wirkungseintritt stündlich um 80% der Differenz zur normalen Körpertemperatur von 36,8°C erniedrigt. **Gib** den Term für die Körperkerntemperatur an.

h) **Beschränktes Wachstum und Integralrechnung:**

Eine Tasse Tee hat eine Ausgangstemperatur von 80 °. Die Umgebungstemperatur beträgt 25 °C. Die momentane Änderungsrate der Temperatur des Tees (in °C pro Minute) kann näherungsweise durch die Funktion v mit $v(t) = -6{,}6 \cdot e^{-0{,}12t}$ beschrieben werden.

(1) **Bestimme** eine Stammfunktion von v.

(2) **Berechne** mithilfe einer Stammfunktion $\int_0^{10} v(t)\,dt$ und $\frac{1}{10-0}\int_0^{10} v(t)\,dt$ und **deute** die beiden Werte im obigen Sachkontext.

(3) **Gib** eine Funktion f **an**, mit der die Temperatur nach t Minuten beschrieben werden kann.

(4) **Untersuche**, wann die Temperatur des Tees auf 40 °C abgekühlt ist.

(5) **Stelle** die Grafen von f und v in einem Koordinatensystem **dar**.

i) **Exponentielles Wachstum mit k < 0:**

(1) **Gib** die Sättigungsgrenze S, den Anfangswert B(0), den Proportionalitätsfaktor k und den Wachstumsfaktor a für die beiden Zerfallsfunktionen B und C aus Aufgabe 2 e) **an**.

(2) **Begründe**, dass es sich bei der exponentiellen Abnahme im Rahmen des exponentiellen Wachstums (k < 0) um einen Spezialfall des beschränkten Wachstums handelt.

Aufgabe 4: Logistisches Wachstum[21]

Bei vielen Wachstumsvorgängen in der Natur fällt auf, dass das Wachstum anfangs annähernd exponentiell verläuft. Mit zunehmender Zeitdauer verlangsamt es sich allerdings und kommt schließlich zum Erliegen.

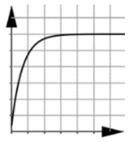
Beschreibt man diesen Verlauf mithilfe der momentanen Wachstumsgeschwindigkeit B´(t), so ist anfangs, wenn das Wachstum annähernd exponentiell verläuft, B´(t) in etwa proportional zum momentanen Bestand B(t). Gegen Ende des Beobachtungszeitraumes nähert sich das Wachstum dem beschränkten Wachstum, damit ist B´(t) näherungsweise proportional zum Sättigungsmanko S – B(t), wobei S die Sättigungsgrenze ist. Insgesamt kann bei der beschriebenen Situation angenommen werden, dass B´(t) zum Produkt aus B(t) und S - B(t) proportional ist. Wachstum, das in dieser Form beschrieben werden kann, heißt **logistisches Wachstum.**

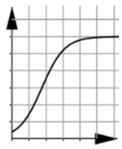
[21] fakultativ

Dabei gilt folgender Satz:

Satz: Eine Bestandsfunktion $\mathbf{B(t)} = \frac{\mathbf{B(0)\cdot S}}{\mathbf{B(0)+(S-B(0))\cdot e^{-k\cdot S\cdot t}}}$ (k > 0) beschreibt logistisches Wachstum und erfüllt eine Differentialgleichung der Form $\mathbf{B'(t) = k \cdot B(t) \cdot (S - B(t))}$.

a) **Verbreitung von Gerüchten:** Bei zwei unterschiedlichen Gruppen von amerikanischen Farmern wurde untersucht, wie sich Informationen zu einem neuen Düngemittel verbreiten. Die Farmer der ersten Gruppe lebten weitgehend isoliert und erhielten ihre Informationen vorwiegend aus Fachzeitschriften und Massenmedien. Die der zweiten Gruppe hatten intensiven Umgang miteinander und wurden überwiegend durch „Mund-zu-Mund-Propaganda" informiert. Für den Informationsgrad B in Abhängigkeit von der Zeit ergaben sich zwei Graphen, die am rechten Rand dargestellt werden. **Begründe** welcher Graph zu welcher Gruppe gehört.





b) **Hopfen und Malz:** Hopfen, der zur Herstellung von Bier benötigt wird, ist eine schnell wachsende Schlingpflanze. Um Aussagen über das Höhenwachstum zu machen, wurde bei einer Untersuchung die folgende Messreihe aufgenommen:

Zeit t in Wochen	0	2	4	6	8	10	12	16
Höhe B(t) in m	0,6	1,2	2,0	3,3	4,1	5,0	5,5	5,8

(1) **Trage** die Messwerte in ein geeignetes Koordinatensystem **ein**.

(2) **Lege** anhand der Tabelle den Anfangswert B(0) und die Sättigungsgrenze S des Wachstums **fest** und **gib** die dazugehörige Differentialgleichung **an**, wenn man logistisches Wachstum voraussetzt.

(3) **Bestimme** die fehlenden Parameter k mithilfe eines Messpunktes und **gib** eine mögliche Funktionsgleichung B(t) an.

(4) **Zeichne** den Graphen von B in das vorhandene Koordinatensystem.

(5) **Bestimme** die Höhe des Hopfens nach 18 Wochen.

(6) **Untersuche** mit und ohne GTR, ob der Hopfen nach 4 Wochen schneller wächst als nach 8 Wochen.

c) **Krankheitsentwicklung:** Im tropischen Regenwald lebt isoliert ein 5000 Menschen zählender Indianerstamm. Einer seiner Bewohner wird unabsichtlich mit einer ungefährlichen, aber sehr ansteckenden Grippe infiziert. Durch gegenseitige Ansteckung in den darauffolgenden Wochen zählt man nach 4 Wochen bereits 300 Kranke. Um die Ausbreitung dieser Grippe zu modellieren, geht man von logistischem Wachstum der Anzahl B der Erkrankten aus.

(1) **Erläutere**, was für diese Annahme eines logistischen Wachstums spricht.

(2) **Bestimme** den Funktionsterm B(t).

(3) **Untersuche**, nach welcher Zeit die Hälfte der Stammesbewohner krank ist und **gib an**, welche Bedeutung dieser Zeitpunkt für die weitere Ausbreitung der Krankheit hat.

(4) **Ermittle** die mittlere Zunahme an Erkrankten pro Woche in den ersten 2 Monaten.

6 Kontrollaufgaben

Kompetenzraster zu den Kontrollaufgaben

Kompetenzen im Bereich der hilfsmittelfreien Aufgaben

Ich kann …	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
den Graf einer Exponentialfunktion sowie einer Tangente an den Grafen der Exponentialfunktion skizzieren.	1a)				
eine Gleichung einer Tangente an den Grafen einer Exponentialfunktion rechnerisch mittels Ableitungsterm bestimmen.	1b)				
die Funktionsgleichung eines transformierten Grafen angeben.	1c)				
begründend Funktionsgleichungen von Exponentialfunktionen entsprechenden Grafen zuordnen.	2a)				
mithilfe von Funktionsgleichungen und grafisch beschreiben, wie ein Graf einer Exponentialfunktion durch einfache Transformationen aus dem Grafen einer natürlichen Exponentialfunktion hervorgeht.	2b), 2c), 2d)				
Exponentialgleichungen lösen.	3a)				
Integrale mithilfe von Stammfunktionen aus der Funktionsklasse von natürlicher Exponential- und Logarithmusfunktion lösen.	3b)				
Aussagen zu einer Geschwindigkeitsfunktion eines beschränkten Wachstumsprozesses begründend überprüfen, ob sie wahr oder falsch sind.	4				
höhere Ableitungen von sinh und cosh bestimmen und eine Regelmäßigkeit erkennen.	5a)				
rechnerisch zeigen, dass die Grafen von sinh und cosh keine Schnittstellen haben.	5b)				
die Grafen von sinh und cosh auf Symmetrie prüfen.	5c)				
die Grafen von sinh und cosh auf globale Extremstellen und Krümmungsverhalten untersuchen.	5d), 5e)				
Flächeninhalte von beschränkten und unbeschränkten Flächen, die durch die Grafen von sinh und cosh begrenzt werden mit einer Stammfunktion berechnen.	5f)				
$[\cosh(x)]^2 - [\sinh(x)]^2 = 1$ beweisen.	5g)				

Kompetenzen im Bereich der Aufgaben unter Nutzung von Hilfsmitteln

Ich kann …	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
eine beliebige Exponentialfunktion von der Basis 2 mithilfe des natürlichen Logarithmus zur Basis e darstellen.	1a)				
mithilfe der Ableitung Tangenten an den Grafen einer beliebigen Exponentialfunktion bestimmen.	1b)				
den Grafen einer Exponentialfunktion sowie zweier Tangenten mithilfe des GTR in einem Koordinatensystem darstellen.	1c)				
unter Nutzung einer Stammfunktion Flächeninhalte von unbeschränkten und beschränkten Flächen berechnen, die durch den Graf einer Exponentialfunktion und der x-Achse sowie zweier Tangenten und der x-Achse begrenzt werden.	1d)				
rechnerisch nachweisen, dass bei einer Exponentialfunktion eine Streckung in y-Richtung gleichbedeutend ist mit einer geeigneten Verschiebung in x-Richtung.	1e)				
auf der Basis von Datenvorgaben rechnerisch die Parameter a und b einer exponentiellen Wachstumsfunktion der Form $f(t) = a \cdot e^{bt}$ ermitteln.	2a)				
mit einer Modellfunktion Problemstellungen lösen, bei denen Exponentialgleichungen gelöst werden müssen.	2b), 3a)				
den Ableitungsterm einer exponentiellen Wachstumsfunktion berechnen und ihre Bedeutung im Sachzusammenhang angeben.	2c)				
Geschwindigkeiten einer Bestandsfunktion zum beschränkten Wachstum mithilfe des GTR bestimmen und grafisch darstellen.	2d)				
begründen, warum einen vorgegebene Modellfunktion ungeeignet ist, um einen Wachstumsvorgang zu modellieren.	2e)				
einen Grafen zum beschränkten Wachstum im vorgegebenen Kontext skizzieren.	2f)				
begründen, warum eine Funktionsgleichung zum Wachstumsprozess des beschränkten Wachstums passt.	2f), 3f)				
Parameter c, d und k einer Funktionsgleichung $f(t) = c - d \cdot e^{-kt}$ zum beschränkten Wachstum im Sachkontext interpretieren und passende Werte für c, d und k angeben.	2g), 3f), 3g)				
durch Termumformung und Angabe von Parametern zeigen, dass eine Funktionsgleichung von der Form $f(t) = c \cdot e^{kt}$ ist und ein exponentielles Wachstum beschreibt.	3b)				
Parameter c und k einer Funktionsgleichung $f(t) = c \cdot e^{kt}$ zum exponentiellen Wachstum im Sachkontext interpretieren und den Wachstumsfaktor $a = e^k$ angeben.	3c)				
mittels Ableitungen der Modellfunktion nachweisen, dass der Graf einer Funktion streng monoton wachsend und linksgekrümmt ist.	3d)				
den Randwert als maximale Steigung identifizieren und die zugehörige Wachstumsgeschwindigkeit mittels Ableitung berechnen.	3e)				
die Tauglichkeit einer Modellfunktion für einen bestimmten Zeitraum kritisch prüfen.	3e)				

mittels Integralrechnung die Bestandsfunktion eines beschränkten Wachstums bestimmen, wenn die Funktion zur Wachstumsgeschwindigkeit gegeben ist.	3f)					
durch Termumformung und Angabe von Parametern zeigen, dass eine Funktionsgleichung von der Form $f(t) = S - d \cdot e^{-kt}$ ist und ein beschränktes Wachstum beschreibt.	3f)					
prüfen, ob eine Übergangsstelle zweier Teilfunktionen knickfrei ist.	3f)					
auf der Basis von Datenvorgaben rechnerisch die Parameter S, d und k einer beschränkten Wachstumsfunktion der Form $f(t) = S - d \cdot e^{-kt}$ ermitteln.	3g)					
nachweisen, dass einen Funktion logistisches Wachstum beschreibt.	*3h)*					
anhand des Krümmungsverhaltens begründen, welches Modell am besten geeignet ist.	3h)					
ein Verfahren beschreiben, mit dem man die größte Differenz zwischen Modellfunktion f und der Funktion h in einem Intervall berechnen kann.	3h)					

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

Aufgabe 1: Skizzieren eines Grafen, Tangente und Punktspiegelung.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot e^{0,5x}$.

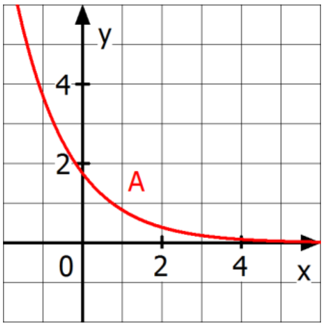
a) **Skizziere** den Grafen von f und die Tangente t an den Grafen an der Stelle 2.

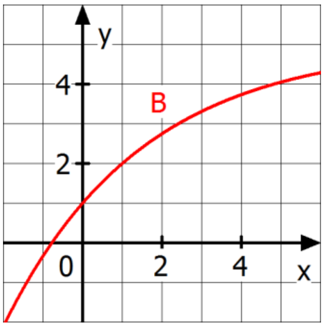
b) **Berechne** die Gleichung der Tangenten t an den Grafen von f an der Stelle x = 2.

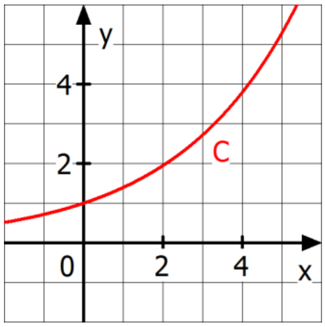
c) Der Graf von f wird am Ursprung gespiegelt. **Bestimme** den dazugehörigen Funktionsterm.

Aufgabe 2: Transformationen von Exponentialfunktionen

Gegeben sind drei Grafen und sechs Funktionsgleichungen.







$f_1(x) = 5 - 4 \cdot 0,75^x$

$f_4(x) = \frac{7}{4} \cdot e^{-\frac{3}{4}x}$

$f_2(x) = e^{\frac{1}{3}x}$

$f_5(x) = 5 + 4 \cdot e^{-0,7x}$

$f_3(x) = 5 - 4 \cdot e^x$

$f_6(x) = 5 - 4 \cdot e^{\ln(0,75)x}$

a) **Ordne** jedem Graf die passenden Funktionsgleichungen zu.[22] **Begründe** Dein Vorgehen.

b) **Gib** die Transformationen an, die notwendig sind, um vom Grafen der natürlichen Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ zum Grafen zur Funktion f_5 zu gelangen.

c) **Beschreibe,** wie sich eine Funktionsgleichung verändern, wenn man bei der Beschriftung der

(1) y-Achse alle Werte verdoppelt bzw. halbiert.

(2) x-Achse alle Werte verdoppelt bzw. halbiert.

d) **Gib** für die Vorgänge (1) und (2) die Funktionsgleichungen an, die man in Bezug auf die Ausgangsfunktion f_1 und f_2 erhält.

Aufgabe 3: Gleichungen und Integrale lösen

a) **Bestimme** die Zahl x, die folgende Gleichungen löst.

$e^{x+1} = 7 \qquad e^x = \frac{1}{e} \qquad \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln(10) \qquad e^x + 7 = 0 \qquad \ln(x) = 6 \qquad e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$

b) **Berechne** mithilfe der Stammfunktion folgende Integrale.

$\int_0^{\ln(3)} e^x\,dx \qquad \int_0^{\ln(3)} e^{2x}\,dx \qquad \int_1^3 (e^x + x + 1)\,dx \qquad \int_1^e \frac{1}{x}\,dx \qquad \int_1^e \left(\frac{2}{5x} + \sqrt{x}\right)dx \qquad \int_1^e \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx$

[22] Es kann auch mehr als eine Funktionsgleichung zugeordnet werden.

Aufgabe 4: Sinkgeschwindigkeit eines Steins[23]

Ein Stein sinkt in einem See. Für seine Sinkgeschwindigkeit gilt: $v(t) = 2{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}1t})$. Dabei ist t die Zeit in Sekunden seit Beobachtungsbeginn und v(t) die Sinkgeschwindigkeit in Meter pro Sekunde.

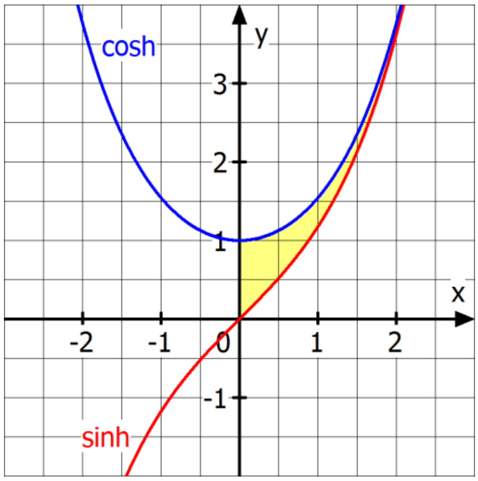
Entscheide unter Angabe einer Begründung, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Wahr	Falsch	Begründung
Die Sinkgeschwindigkeit des Steins ist immer positiv.	☐	☐	
Die maximale Sinkgeschwindigkeit wird zu Beginn erreicht.	☐	☐	
Der Stein erreicht den Boden des Sees niemals.	☐	☐	
Die maximale Beschleunigung des Steines wird zu Beginn erreicht.	☐	☐	
Man kann mithilfe eines Integrals berechnen, wie tief der Stein insgesamt gesunken ist.	☐	☐	
Die Sinkgeschwindigkeit ist immer kleiner als 2,5 Meter pro Sekunden.	☐	☐	
Die Sinkgeschwindigkeit verdoppelt sich jeweils in 0,9 Sekunden.	☐	☐	

[23] Aufgabe modifiziert nach Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

Aufgabe 5: Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus

Die Funktionen sinh und cosh mit $\sinh(\mathrm{x}) = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{x}})$ und $\cosh(\mathrm{x}) = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{x}})$ heißen **Sinus Hyperbolicus** und **Cosinus Hyperbolicus**. Ihre Graphen sind rechts dargestellt.



a) **Berechne** die 1. und 2. Ableitung von sinh und cosh. **Gib** die 1810. und die 2013. Ableitung von sinh und cosh **an**.

b) **Zeige**, dass die beiden Graphen keine gemeinsamen Schnittpunkte haben.
[Tipp: Setze die Funktionsterme gleich und zeige, dass die Gleichung unlösbar.]

c) **Begründe**, dass sinh punktsymmetrisch zum Ursprung und cosh achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

d) **Zeige**, dass (0/1) globaler Tiefpunkt von cosh ist und cosh durchweg linksgekrümmt ist.

e) **Untersuche** den Grafen von sinh auf sein Krümmungsverhalten.

f) **Berechne** mithilfe der Stammfunktion den Flächeninhalt der Fläche, den beide Grafen

(1) über dem Intervall [0; 1] einschließen.

(2) über dem Intervall [0; $+\infty$[einschließen.

g) **Beweise**: $[\cosh(x)]^2 - [\sinh(x)]^2 = 1$.
[Tipp: 1. und 2. Binomische Formel und $\mathrm{e}^{\mathrm{x}} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{x}} = 1$]

Teil II: Aufgaben unter Zuhilfenahme des GTR

Aufgabe 1: Ableitung, Tangente, Flächenberechnung und Transformation

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2^x$.

a) **Stelle** den Funktionsterm zur Basis e dar und bestimme die erste Ableitung.

b) **Ermittle** rechnerisch mithilfe von $f'(x)$ die Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2 an den Grafen von f in den Punkten (1/f(1)) und (-1/f(-1)).

[Kontrollergebnisse zum Weiterarbeiten: $t_1(x) \approx 1{,}39x + 0{,}61$; $t_2(x) \approx 0{,}35x + 0{,}85$]

c) **Stelle** die Situation in einem Koordinatensystem **dar**.

d) **Ermittle** mit der Stammfunktion den Flächeninhalt der Fläche, die

(1) vom Grafen von f über dem Intervall [-1; 0] mit der x-Achse eingeschlossen wird.

(2) vom Grafen von f über dem Intervall $]-\infty;\ 0]$ mit der x-Achse eingeschlossen wird.

(3) von den beiden Tangenten t_1 und t_2 und der x-Achse begrenzt wird.

[Hinweis: Verwende die Tangentengleichung aus dem Kontrollergebnis aus b) und runde Schnitt- und Nullstellen sowie den Flächeninhalt auf die zweite Nachkommastelle.]

e) Der Graf von f wird in y-Richtung um den Faktor 2 gestreckt, so dass der Graf von g entsteht. Ermittle eine Verschiebung, so dass der Graf von g aus dem Grafen von f entsteht.

Aufgabe 2: Abkühlen von Kaffee

Peter kauft sich bei einem Fußballspiel in der Halbzeitpause zum Aufwärmen eine Tasse Kaffee. Bei einer Außentemperatur von frostigen 0 °C kühlt der warme Kaffee schon nach einer Minute auf 86,04 °C ab. Nach zwei Minuten beträgt die Kaffeetemperatur nur noch 82,25 °C. Die Temperatur des Kaffees kann durch eine Funktion der Form $f(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$ beschrieben werden ($t \geq 0$, t in Minuten, f(t) in °C, $a \geq 0$ und $b < 0$).

a) **Ermittle** die Parameter a und b und **gib** die Anfangstemperatur **an**.

Für die Temperatur des Kaffees (in °C) wird nachfolgend die exponentielle Funktionsgleichung $\mathbf{f(t) = 90 \cdot e^{-0{,}045 \cdot t}}$ ($t \geq 0$; t in Minuten) angenommen.

b) **Bestimme** die Temperatur des Kaffees nach 10 Minuten und **berechne** den Zeitpunkt, an dem die Kaffeetemperatur unter 45 °C gesunken ist.

c) **Ermittle** $f'(t)$ und **gib** die Bedeutung des Ableitungsterms im Sachzusammenhang **an**.

d) **Bestimme** mit dem GTR die Geschwindigkeit der Temperaturabnahme in °C pro Minute nach einer, fünf, zehn und 30 Minuten. **Beschreibe** den Abkühlungsvorgang und **skizziere** den Grafen von f'.

e) **Begründe**, warum die Modellfunktion für den Abkühlungsvorgang bei einer Raumtemperatur von 20 °C ungeeignet ist.

f) Frank hat VIP-Karten und trinkt im VIP-Raum in der Pause ebenfalls einen Kaffee. Sei g die Funktion, die den Abkühlungsvorgang von 90 °C heißem Kaffee bei einer Raumtemperatur von 20 °C beschreibt.

(1) **Skizziere** neben dem Grafen von f einen möglichen Graphen zur Funktion g und **begründe**, dass g von der Form $g(t) = c - d \cdot e^{-kt}$ ist.

(2) **Interpretiere** die Parameter c, d und k und **gib** passende Werte für c und d und k **an**.

Aufgabe 3: Modifizierte Abituraufgabe zu Wachstumsprozessen[24]

Die Höhe eines Strauches in den ersten zwanzig Tagen nach dem Aus pflanzen wird durch die Funktion h mit

$h(t) = 0{,}2 \cdot e^{0{,}1 \cdot t - 0{,}9}$ (t in Tagen, h(t) in Metern)

beschrieben. Diese Pflanze hat zum Zeitpunkt des Auspflanzens eine Höhe von 8 cm und ist am Ende des 20. Tages (t = 20) auf eine Höhe von etwa 60 cm gewachsen. Der Graf ist in der Abbildung unten links angegeben.

a) **Berechne**, zu welchem Zeitpunkt der Strauch eine Höhe von 50 cm hat.

b) **Zeige** durch Angabe der Parameter c und k, dass die Funktion h ein exponentielles Wachstum der Form $h(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$ beschreibt.

[Tipp: Wende zunächst ein Potenzgesetz an.]

c) **Gib** die Bedeutung der Parameter c und k im Sachkontext an und bestimme den Wachstumsfaktor a.

d) **Weise** nach, dass der Graf zu h für $0 \leq t \leq 20$ streng monoton wachsend und linksgekrümmt ist.

e) **Bestimme** rechnerisch den Zeitpunkt innerhalb der ersten zwanzig Tage ($0 \leq t \leq 20$), an dem die Pflanze am schnellsten wächst und **berechne** die zugehörige Wachstumsgeschwindigkeit. **Begründe**, warum die angegebene Funktion h nur für einen begrenzten Zeitraum die Höhe der Pflanze beschreiben kann.

f) Vom Beginn des 21. Tages an verringert sich die Wachstumsgeschwindigkeit des Strauches. Von diesem Zeitpunkt an ist nur noch die Wachstumsgeschwindigkeit (in Meter pro Tag) bekannt, sie wird beschrieben durch die Funktion z mit

$z(t) = 0{,}02 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1}$ (t in Tagen, z(t) in Meter pro Jahr)

Die Höhe des Strauches für $t \geq 20$ soll durch eine Funktion h_2 beschrieben werden.

(1) **Ermittle** einen Term $h_2(t)$, der die Höhe des Strauches nach t Tagen für $t \geq 20$ beschreibt.

[Zur Kontrolle: $h_2(t) \approx 1{,}2 - 0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1}$ $(t \geq 20)$, vgl. Abb. links unten]

(2) **Begründe** anhand des Terms $h_2(t)$, dass der Strauch nicht beliebig hoch wird, und **gib** die maximale Höhe des Strauches an.

(3) **Weise** rechnerisch durch Angabe der Parameter S, b und k nach, dass die Funktion h_2 ein beschränktes Wachstum der bekannten Form $h_2(t) = S - b \cdot e^{-k \cdot t}$ beschreibt.

[Tipp: Wende zunächst ein Potenzgesetz an.]

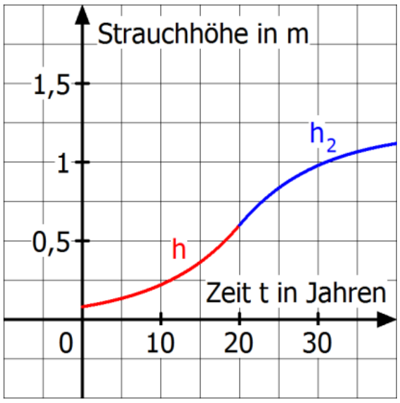
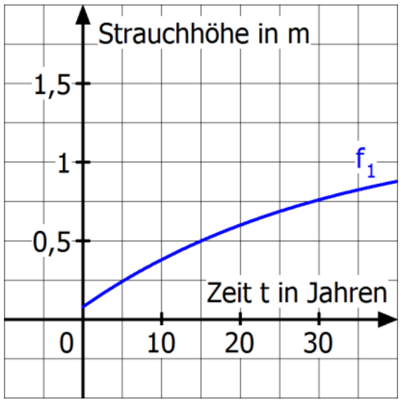
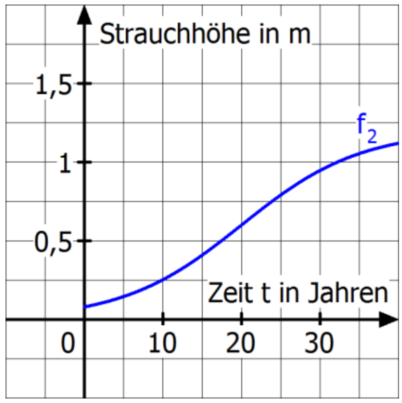
(4) **Interpretiere** die Werte der Parameter S, b und k im Sachkontext.

(5) **Untersuche**, ob die Übergangsstelle t = 20 knickfrei ist, d. h. $h'(20) = h_2'(20)$ gilt.

Nun soll eine Funktion die Pflanzenhöhe für den **gesamten** Zeitraum, also über die ersten zwanzig Tage hinaus, möglichst zutreffend modellieren. Die mittlere Abbildung stellt den Grafen einer Funktion f_1 zu einem beschränkten Wachstum dar (**Modell 1**). Rechts ist der Graf einer Funktion f_2 zu

[24] Modifiziert nach Zentralabitur NRW 2009

sehen, der ein logistisches Wachstum beschreibt (**Modell 2**). Die linke Abbildung zeigt den Graphen, der aus den beiden Funktionen h ($0 \leq t \leq 20$) und h_2 ($t > 20$) zusammengesetzt ist und den tatsächlichen Verlauf der Strauchhöhe wiedergibt.

		
Tatsächlicher Verlauf	**Modell 2**	**Modell 3**

g) **Modell 1 (beschränktes Wachstum):** Da der Strauch nicht höher als ungefähr 1,2 m wird, muss die Modellfunktion beschränkt sein. Zunächst wird dafür eine Modellfunktion f_1 gewählt, die die Form $f_1(t) = S - d \cdot e^{-kt}$ hat. Dabei ist $S = 1{,}2$ die obere Grenze, welche die Höhe der Pflanze auf lange Sicht nicht überschreitet.

(1) **Bestimme** die Parameter d und k so, dass der Strauch beim Auspflanzen und am 20. Tag die beobachteten Höhen von 0,08 m bzw. von 0,60 m besitzt.

(2) **Gib** die Bedeutung des Parameters d an.

h) **Modell 2 (logistisches Wachstum):** In einem alternativen Ansatz soll ein logistisches Wachstum der bekannten Form $f_2(t) = \frac{f_2(0) \cdot S}{f_2(0) + (S - f_2(0)) \cdot e^{-k \cdot S \cdot t}}$ angenommen werden.

Zeige, dass die Funktion f_2 mit $f_2(t) = \frac{0{,}096}{0{,}08 + 1{,}12 \cdot e^{-0{,}132 \cdot t}}$ ein logistisches Wachstum beschreibt, bei dem die Anfangshöhe 0,08 m beträgt, nach 20 Tagen eine Höhe von 0,60 m vorhanden ist und langfristig 1,2 m nicht überschritten werden.

i) **Begründe** anhand des Krümmungsverhaltens, welche der Modellfunktionen f_1 und f_2 eher geeignet ist, die Strauchhöhe (in Abb. 1) in Metern in Abhängigkeit von der Zeit in Tagen zu beschreiben (vgl. Abb. 1, 2 und 3).

j) **Beschreibe** ein Verfahren zur Berechnung der größten Differenz zwischen einer (differenzierbaren) Modellfunktion f und der Funktion h im Intervall [0; 20].

Lösungen

1 Grundwissen rund um Exponentialfunktionen

1a)

1	2	3	4
$f(x) = 2^x$	$f(x) = -0{,}5 \cdot 0{,}5^x$	$f(x) = 3 \cdot 3^x$	$f(x) = -3 \cdot 3^x$

1b)

x	-3	-2	-1	0	0,5	1	2	3
$f(x) = 4 \cdot 2^x$	0,5	1	2	4	5,67	8	16	32
$g(x) = 2 \cdot 0{,}5^x$	16	8	4	2	1,41	1	0,5	0,25

- Wenn der x-Wert einer exponentiellen Funktion sich um 1 vergrößert, dann verändert sich der der Funktionswert mit dem Wachstumsfaktor a.
- Wenn der x-Wert einer exponentiellen Funktion sich um 1 verkleinert, dann verändert sich der der Funktionswert mit dem Kehrwert a^{-1}des Wachstumsfaktors a.
- Wenn der x-Wert einer exponentiellen Funktion sich um k vergrößert, dann verändert sich der Funktionswert mit dem Faktor a^k.
- Wenn der x-Wert einer exponentiellen Funktion sich um k verkleinert, dann verändert sich der Funktionswert mit dem Faktor a^{-k}.

1c)

Eine Funktionsgleichung der Form $f(x) = c \cdot a^x$ beschreibt ein exponentielles Wachstum. Ist $a > 1$ handelt es sich um eine exponentielle Zunahme (z. B. Zinswachstum). Im Falle $0 < a < 1$ spricht man von einer exponentiellen Abnahme (z. B. radioaktiver Zerfall).

1d)

Bei der Normalparabel verläuft der Graf für beide Ränder gegen + unendlich. Bei der Exponentialfunktion $y = 2^x$ nähert sich der Graf für kleine x der x-Achse an, während er auf der anderen Seite für große x ebenfalls unbeschränkt wächst. Stellt man nun beide Funktionen für ganzzahlige positive x mithilfe einer Wertetabelle dar, erhält man:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
2^x	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

Man erkennt: Die Exponentialfunktion wächst schon recht früh sehr viel stärker als die quadratische Funktion. Darüber hinaus ist bei der Exponentialfunktion jeder neue Wert in der Wertetabelle (um 1) größer als die Summe aller vorherigen Einträge (z. B. 32 > 24 + 8 + 4 + 2 + 1). Bei der quadratischen Funktion gilt für x > 4: Jeder neue Eintrag in der Wertetabelle ist kleiner als die Summe der vorherigen Einträge (z. B. 25 < 16 + 9 + 4 + 1 + 0 = 30). Während bei der quadratischen Funktion bei Vergrößerung des x-Wertes um 1 der vorherige Funktionswert um eine ungerade Zahl vergrößert wird (1, 3, 5, 7, usw.) wird bei der Exponentialfunktion der Vorgänger um den Faktor 2 erhöht.

1e)

Y1:$f(0) = 3 \Rightarrow f(x) = 3 \cdot a^x;\ f(1) = 6 \Leftrightarrow 3 \cdot a^1 = 6 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 3 \cdot 2^x$
Y2: $f(0) = -1 \Rightarrow f(x) = -\ a^x;\ f(1) = -0{,}5 \Leftrightarrow -a = -0{,}5 \Leftrightarrow a = 0{,}5 \Rightarrow f(x) = -0{,}5^x$
Y3: $f(0) = 3 \Rightarrow f(x) = 3 \cdot a^x;\ f(1) = 9 \Leftrightarrow 3a = 9 \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow f(x) = 3 \cdot 3^x = 3^{x+1}$
Y4: $f(x) = c \cdot a^x;\ a^3 = \frac{f(5)}{f(2)} = \frac{160}{20} = 8 \Leftrightarrow a = 2;\ f(2) = 20 \Leftrightarrow c \cdot 2^2 = 20 \Leftrightarrow c = 5 \Rightarrow f(x) = 5 \cdot 2^x$
Y5: $f(x) = c \cdot a^x;\ a^3 = \frac{f(2)}{f(-1)} = \frac{0{,}04}{5} = 0{,}008 \Leftrightarrow a = \frac{1}{5};\ f(-1) = 5 \Leftrightarrow c \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5 \Leftrightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

Y6: $f(x) = c \cdot a^x;\ a^3 = \frac{f(5)}{f(2)} = \frac{243}{9} = 27 \Leftrightarrow a = 3;\ f(2) = 9 \Leftrightarrow c \cdot 3^2 = 9 \Leftrightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = 3^x$

1f)

(1) $2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0{,}5^x$ (2) $3^{x-1} = \frac{3^x}{3^1} = \frac{1}{3} \cdot 3^x$ (3) $(3^x)^2 = 3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$

(4) $3^{2x+2} = 3^{2x} \cdot 3^2 = (3^2)^x \cdot 9 = 9 \cdot 9^x$ (5) $25^{0{,}5x-0{,}5} = \frac{25^{0{,}5x}}{25^{0{,}5}} = \frac{(\sqrt{25})^x}{\sqrt{25}} = \frac{5^x}{5} = 0{,}2 \cdot 5^x$

1g)

Der Wachstumsfaktor a muss positiv sein, da z. B. für x = 0,5 die Wurzel aus a gezogen wird und dann $a^{0{,}5} = \sqrt{a}$ nicht definiert wäre. Der Fall a = 1 liefert keine Exponentialfunktion, sondern die Konstante y = c.

2a)

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = 2^x$.
Punkt A: $2^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \log_2\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2(2^{-3}) = -3$
Punkt B: $2^x = 1 \Leftrightarrow x = \log_2(2^0) = 0$
Punkt C: $2^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \log_2(\sqrt{2}) = x = \log_2(2^{0{,}5}) = 0{,}5$
Punkt D: $2^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_2(2^2) = 2$

2b)

Punkt E: $2^x = 0{,}5 \Leftrightarrow x = \log_2(0{,}5) = x = \log_2(2^{-1}) = -1$
Der Logarithmus von b zur Basis 2 bezeichnet den Exponenten x (Hochzahl, Verhältniszahl), mit dem die Basis 2 potenziert werden muss, um die gegebene Zahl b zu erhalten. Gesucht ist also die Zahl x, so dass $2^x = b$. Dieses Zahl x wird als Logarithmus von b zur Basis 2 definiert.

2c)

E: $15 \cdot 1{,}3^x = 30 \Leftrightarrow 1{,}3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{1,3}(2);\ 2 < x < 3$
H: $0{,}125 \cdot 0{,}5^x = 0{,}25 \Leftrightarrow 0{,}5^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{0,5}(2) = \log_{0,5}(0{,}5^{-1}) = -1$
U: $4 + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 6 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{3}}(2);\ -2 < x < -1$
A: $1 = \left(\frac{1}{9}\right)^x \cdot 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{1}{8}\right);\ 0 < x < 1$
S: $10 \cdot 2^{x+1} = 50 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 5 \Leftrightarrow 2^x = 2{,}5 \Leftrightarrow x = \log_2(2{,}5);\ 1 < x < 2$
D: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 10^3 \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\frac{1}{2}} = 10^3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{10^3}{2} = 500 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{1}{2}}(500);\ -9 < x < -8$
S: $2{,}5^{x-2} \cdot 2{,}5^2 = 99 \Leftrightarrow 2{,}5^x = 99 \Leftrightarrow x = \log_{2,5}(99);\ 5 < x < 6$
T: $1{,}95^{2-x} = 1 \Leftrightarrow 1{,}95^2 = 1{,}95^x \Leftrightarrow x = \log_{1,95}(1{,}95^2) = 2$

Es gilt nun folgende Rangfolge: DU HAST ES.

3)

$f(0) = 4 \Rightarrow f(x) = 4 \cdot a^x;\ f(1) = 2 \Leftrightarrow 4 \cdot a^1 = 2 \Leftrightarrow a = 0{,}5 \Rightarrow f(x) = 4 \cdot 0{,}5^x$
$f(x) = 1{,}5 \Leftrightarrow 4 \cdot 0{,}5^x = 1{,}5 \Leftrightarrow 0{,}5^x = \frac{3}{8} \Leftrightarrow x = \log_{0,5}\left(\frac{3}{8}\right) \approx 1{,}42$

$g(0) = 1 \Rightarrow g(x) = a^x;\ g(1) = 1{,}5 \Leftrightarrow a^1 = 1{,}5 \Leftrightarrow a = 1{,}5 \Rightarrow g(x) = 1{,}5^x$
$g(x) = 2 \Leftrightarrow 1{,}5^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{1,5}(2) \approx 1{,}71$

$h(0) = 1 \Rightarrow h(x) = a^x;\ h(-1) = 2 \Leftrightarrow a^{-1} = 2 \Leftrightarrow a = 0{,}5 \Rightarrow h(x) = 0{,}5^x$
$h(x) = 3{,}5 \Leftrightarrow 0{,}5^x = 3{,}5 \Leftrightarrow x = \log_{0,5}(3{,}5) \approx -1{,}81$

$k(0) = 2 \Rightarrow k(x) = 2 \cdot a^x;\ k(1) = 0{,}5 \Leftrightarrow 2 \cdot a^1 = 0{,}5 \Leftrightarrow a = 0{,}25 \Rightarrow k(x) = 2 \cdot 0{,}25^x$
$k(x) = 1{,}5 \Leftrightarrow 2 \cdot 0{,}25^x = 1{,}5 \Leftrightarrow 0{,}25^x = 0{,}75 \Leftrightarrow x = \log_{0,25}(0{,}75) \approx 0{,}21$

4a)

$$f(x) = 2^x \xrightarrow[\text{Verschiebung um 1 nach links}]{} g(x) = 2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^x$$

$$f(x) = 2^x \xrightarrow[\text{Streckung um den Faktor 2 von der y-Achse aus}]{} g(x) = 2 \cdot 2^x$$

4b)

$$f(x) = 3^x \xrightarrow[\text{Verschiebung um 2 nach links}]{} g(x) = 3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x$$

$$f(x) = 3^x \xrightarrow[\text{Streckung um den Faktor 9 von der y-Achse aus}]{} g(x) = 9 \cdot 3^x = 3^{x+2}$$

$$f(x) = 3^x \xrightarrow[\text{Verschiebung um 1 nach rechts}]{} h(x) = 3^{x-1} = 3^x \cdot 3^{-1} = \tfrac{1}{3} \cdot 3^x$$

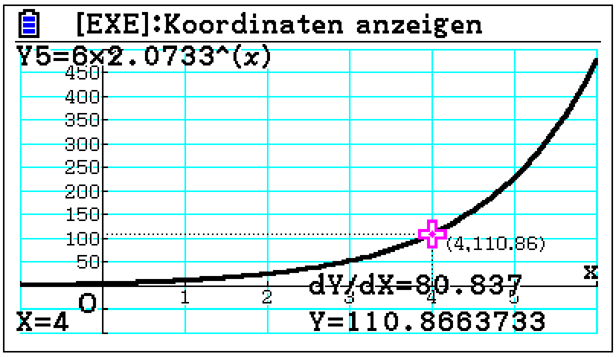
$$f(x) = 3^x \xrightarrow[\text{Streckung um den Faktor } \frac{1}{3} \text{ von der y-Achse aus}]{} h(x) = \tfrac{1}{3} \cdot 3^x = 3^{x-1}$$

4c)

Über den y-Achsenabschnitt lassen sich f und h zuordnen: f(0) = 1 und h(0) = 2. Daher gilt A = f und C = h. Über die Stelle x = -1 erkennt man: Der Graf von k entsteht durch Verschiebung des Grafen von h um 1 nach oben. Deshalb gilt k = D. Ebenso wird der Graf zu f um 2 nach oben verschoben, so dass der Graf von g entsteht. Also ist B = g.

5a)

$$f(0) = 6 \Rightarrow f(x) = 6 \cdot a^x;\ f\left(\tfrac{7}{2}\right) = 77 \Leftrightarrow 6 \cdot a^{\frac{7}{2}} = 77 \Leftrightarrow a = \left(\tfrac{77}{6}\right)^{\frac{2}{7}} \approx 2{,}0733 \Rightarrow f(x) \approx 6 \cdot 2{,}0733^x$$



5b)

$$f(4) = 6 \cdot 2{,}0733^4 \approx 111;\ f\left(\frac{73}{12}\right) = 6 \cdot 2{,}0733^{\frac{73}{12}} \approx 506;\ f\left(\frac{130}{12}\right) = 6 \cdot 2{,}0733^{\frac{129}{12}} \approx 15215$$

5c)

$f(x) = 12000 \Leftrightarrow 6 \cdot 2{,}0733^x = 12000 \Leftrightarrow 2{,}0733^x = 2000 \Leftrightarrow x = \log_{2{,}0733}(2000) \approx 10{,}42$ Jahre. Anfang Mai des Jahres 2012 würde eine Abschussfreigabe erfolgen.

5d)

Mögliche Antworten für die Gültigkeit des Modells:

- Die Fortpflanzungsbedingungen bleiben unverändert.
- Es ist ausreichend Lebensraum für eine derartige Population vorhanden.
- Die Kaninchen pflanzen sich kontinuierlich fort (entspricht nicht den realen Bedingungen)
- Im Modell ist wegen des zu kurzen Zeitraums die Sterberate nicht ausreichend berücksichtigt worden, ebenso die Dezimierung durch Krankheiten o. ä.

6)

(1) „Gilt immer". Punktsymmetrie fällt aus, da $f(x) > 0$ (für $c > 0$) oder $f(x) < 0$ ($c < 0$). Auch Achsensymmetrie ist nicht möglich: $f(-x) = f(x)$ gilt nur für $x = 0$, denn $c \cdot a^{-x} = c \cdot a^{x} \Leftrightarrow a^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) „Kommt darauf an". Die Gleichung $c \cdot a^{x} = d$ (Schnitt der Exponentialfunktionen mit der Geraden y=d) besitzt genau eine Lösung $x = \log_a\left(\frac{d}{c}\right)$ genau dann, wenn c und d beide das gleiche Vorzeichen haben und beide ungleich Null sind. Andernfalls gibt es keine Lösung.

(3) „Gilt immer". Der Term a^{x} strebt im Falle $a > 1$ für x gegen minus unendlich gegen Null, im Falle $0 < a < 1$ für x gegen plus unendlich gegen Null. Der Faktor c beeinflusst nur, ob der Graf sich von oben ($c > 0$) oder von unten ($c < 0$) der x-Achse nähert.

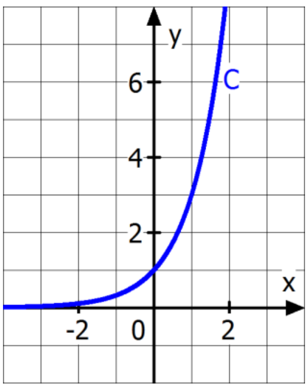
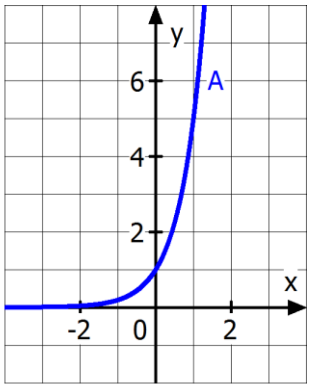
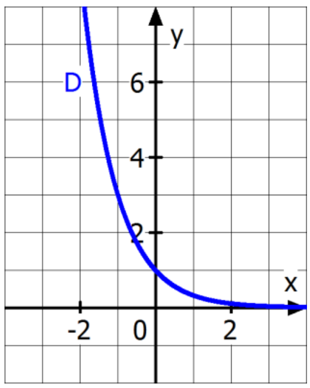
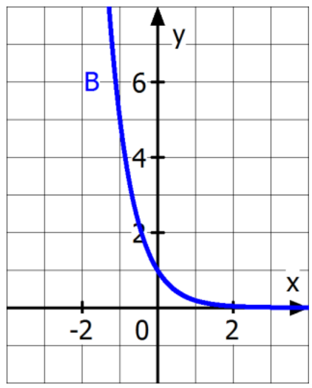
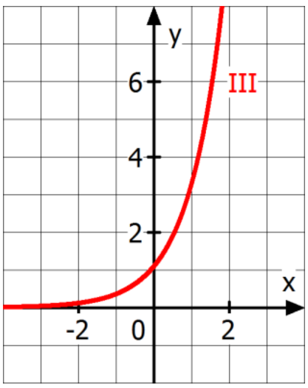
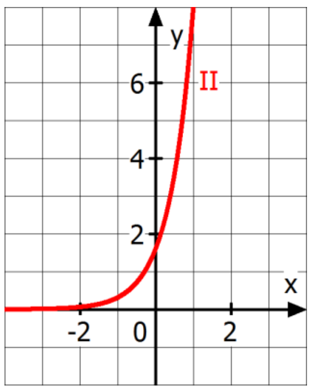
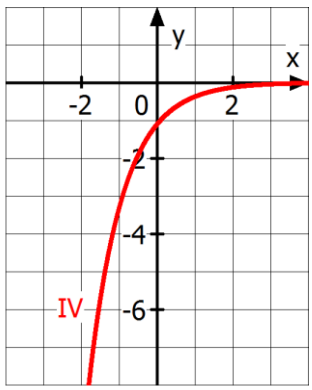
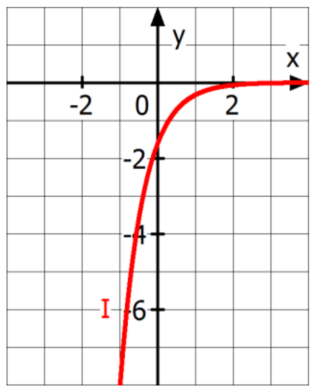
(4) „Gilt immer". Zum einen erhält man für den gleichen Wachstumsvorgang unterschiedliche Wachstumsfaktoren, wenn man den Startzeitpunkt nach vorne oder nach hinten verschiebt. Zum Beispiel beschreiben f und g mit $f(x) = c \cdot a^{x}$ und $g(x) = c \cdot a^{x+2}$ denselben Wachstumsvorgang, nur dass der Start bei g um 2 Einheiten früher einsetzt. Zum anderen kann der Startwert zu unterschiedlichen Zeitpunkten gewählt werden, ohne dass sich dadurch der Wachstumsvorgang als solcher verändert. Beispiel: f und g mit $f(x) = c \cdot a^{x}$ und $g(x) = \frac{c}{a^{p}} \cdot a^{x} = c \cdot a^{x-p}$ beschreiben denselben Vorgang, nur, dass der Startwert bei g um p Zeiteinheiten später erfolgt.

2 Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung

1)

Im linken Diagramm entsteht ein steigender Graf, der komplett oberhalb der x-Achse liegt. Im rechten Diagramm erhält man einen fallenden Grafen, der unterhalb der x-Achse liegt. Sollte sich der Startpunkt auf der x-Achse liegen, erfüllt offenbar nur die Nullfunktion die geforderte Bedingung. Gesucht ist also eine Funktion f mit $f(x) = f'(x)$. Wir werden sehen, dass $f(x) = c \cdot e^x$ ($e \approx 2{,}72; c \neq 0$) und $f(x) = 0$ die einzigen Funktionen sind, die diese Bedingung – man auch diese Differenzialgleichung – erfüllen.

2)

$f(x) = 3^x$	$g(x) = 5^x$	$h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$k(x) = 0{,}2^x$
			
			

Die Zuordnung der Funktionsgleichung zu den Funktionsgrafen kann folgendermaßen begründet werden:

- An der Stelle $x = 1$ haben die beiden steigenden Grafen den Funktionswert 3 bzw. 5. Daher gehört f zu C und g zu A.
- An der Stelle $x = -1$ haben die beiden fallenden Grafen den Funktionswert 3 bzw. 5. Daher gehört h zu D und k zu B.

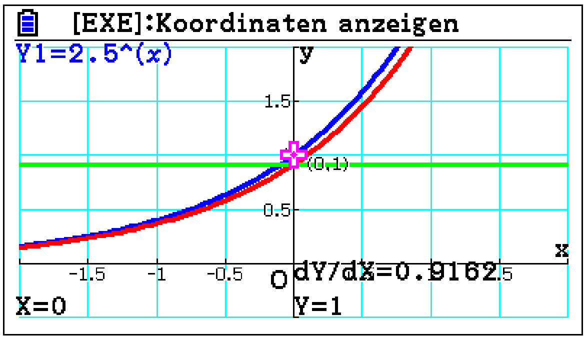
Für die Zuordnung von Graf und Ableitungsgraf können folgende Begründungen herangezogen werden:

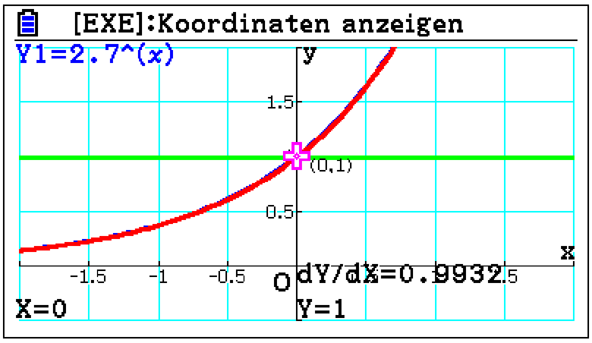
- Die beiden steigenden Grafen A und C haben überall eine positive Steigung. Daher muss der Graf der Ableitung komplett oberhalb der x-Achse liegen und es kommen nur die Grafen III und II in Frage. An der Stelle 0 ist Graf A steiler als Graf C. Somit besitzt der Ableitungsgraf bei $x = 0$ einen größeren Funktionswert. Also: A gehört zu II und C zu III.
- Mit der gleichen Argumentation ist die Steigung des Grafen von B an der Stelle 0 steiler als bei Graf D, so dass Ableitungsgrafen I zu Graf B gehört und Graf D zu IV.

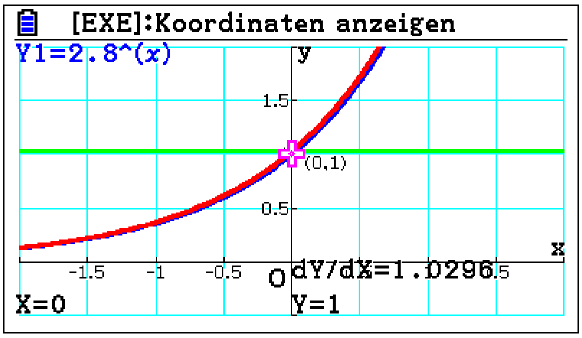
3a)

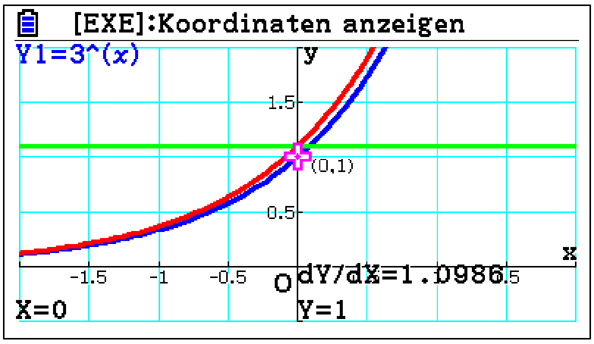
Für f mit $f(x) = 2^x$ gilt: $f'(0) \approx 0{,}6931$ und $\frac{f'(x)}{f(x)} \approx 0{,}6931$. Formt man die zweite Gleichung nach $f'(x)$ um und setzt $f'(0)$ entsprechend ein, erhält man: $f'(x) = f'(0) \cdot f(x) = 0{,}6931 \cdot 2^x$.

3b) und 3c)









Es lässt sich der Zusammenhang von Aufgabenteil a für weitere Exponentialfunktionen bestätigen. Die Ableitung ist proportional zur Ausgangsfunktion. Die Proportionalitätskonstante entspricht dem Ableitungswert an der Stelle 0. Für einen Wert von ungefähr a = 2,72 liegen Graf und Ableitungsgraf übereinander. Dieser Graf hat an der Stelle 0 die Steigung 1.

3d)

	$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$	$\frac{a^{x+h}-a^x}{h} =$	$\frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} =$	$\frac{a^x \cdot (a^h - 1)}{h} =$
Begründung	Differenzenquotient von f an der Stelle x	Funktionsterm für f mit $f(x) = a^x$ eingesetzt	Potenzgesetz angewendet: $a^{x+h} = a^x \cdot a^h$	a^x faktorisiert
	$a^x \cdot \frac{a^{0+h}-a^0}{h} =$	$a^x \cdot \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{}$	$a^x \cdot f'(0) = f'(0) \cdot a^x$	Für die Ableitung einer Exponentialfunktion von der Form $f(x) = a^x$ gilt: $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$
Begründung	Es gilt: $a^{0+h} = a^h$ sowie $a^0 = 1$	$\frac{a^{0+h}-a^0}{h}$ ist der Differenzenquotient von f an der Stelle 0	Für h gegen Null ergibt sich der Ableitungswert von f an der Stelle x	

4a)

Da für eine beliebige Exponentialfunktion $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$ und für die natürliche Exponentialfunktion $f'(x) = f(x)$ gilt, muss bei der natürlichen Exponentialfunktion $f'(0) = 1$ sein.

4b)

	$\frac{e^{0+h}-e^{0}}{h}\approx 1$	Mit $h=\frac{1}{n}$ erhält man:	$\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\approx 1$	$e^{\frac{1}{n}}-1\approx\frac{1}{n}$	$e^{\frac{1}{n}}\approx 1+\frac{1}{n}$	$e=\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n}\approx\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$
Begründung	$f'(0)=1$.	Ersetze h durch $\frac{1}{n}$.	$\frac{1}{n}$ strebt für $n\to\infty$ auch gegen Null.	Man multipliziert mit dem Nenner $\frac{1}{n}$.	Man addiert 1.	Man bildet die n-te Potenz

4c)

Der Graf von f liegt oberhalb der x-Achse, weil $f(x)=e^{x}>0$. Der Graf besitzt daher keine Nullstellen. Da $f'(x)=f''(x)=e^{x}>0$ ist, ist der Graf von f streng monoton steigend und linksgekrümmt. Aus diesem Grund existieren auch keine Extrem- und Wendestellen.

4d)

Es gilt allgemein: $\int_a^b e^x\,dx=[e^x]_a^b=e^b-e^a$. Für die angegebenen Intervalle gilt:

$[0;1]$	$[-1;0]$	$[0;\ln(100)]$	$[-\ln(100);0]$	$]-\infty;0]$	$[0;+\infty[$
e^1-e^0 $=e-1$	e^0-e^{-1} $=1-\frac{1}{e}$	$e^{\ln(100)}-e^0$ $=100-1$ $=99$	$e^0-e^{-\ln(100)}$ $=1-e^{\ln\left(\frac{1}{100}\right)}$ $=1-\frac{1}{100}$ $=0{,}99$	$e^0-e^b\xrightarrow[b\to-\infty]{}1$, da der Term e^b für $b\to-\infty$ gegen Null strebt.	$e^b-e^0\xrightarrow[b\to+\infty]{}+\infty$ da der Term e^b für $b\to+\infty$ gegen $+\infty$ strebt.

5a)

$f(x)=0{,}75e^x+x^2-2x+1\Rightarrow f'(x)=0{,}75e^x+2x-2\Rightarrow\ f''(x)=0{,}75e^x+2$
$F(x)=0{,}75e^x+\frac{1}{3}x^3-x^2+x$

5b)

$f'(1)=0{,}75e\Rightarrow t(x)=0{,}75e\cdot x+b;\ f(1)=0{,}75e\Rightarrow 0{,}75e\cdot 1+b=0{,}75e\Rightarrow b=0\Rightarrow t(x)=0{,}75e\cdot x$

5c)

$f''(x)=0{,}75e^x+2>2$, da jeder $e-$Term $>0\Rightarrow$ Graf von f ist linksgekrümmt.

5d)

Der Graf von f schließt über dem Intervall [0; 1] mit der x-Achse den folgenden Flächeninhalt B ein:
$B=\int_0^1 f(x)\,dx=\left[0{,}75e^x+\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1=0{,}75e+\frac{1}{3}-0{,}75=0{,}75e-\frac{5}{12}$
Die Tangente t schließt über dem Intervall [0; 1] mit der x-Achse den folgenden Flächeninhalt C ein:
$C=0{,}375e$ (Dreiecksfläche)
Es gilt $A=B-C=0{,}75e-\frac{5}{12}-0{,}375e=0{,}375e-\frac{5}{12}\approx 0{,}60$.

Eine Überprüfung mit dem GTR liefert für die Formel des Flächeninhalts zwischen zwei Kurven:
$\int_0^1[f(x)-t(x)]\,dx=\int_0^1[0{,}75e^x+x^2-2x+1-0{,}75e\cdot x]dx\approx 0{,}60$

5e)

Die Normalparabel hat die Gleichung $p(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1$. Durch Gleichsetzen mit f(x) erhält man: $0{,}75e^x+x^2-2x+1=x^2-2x+1\Leftrightarrow 0{,}75e^x=0$. Dies ist nicht möglich, da jede Potenz von e echt positiv ist. Daher haben die Grafen zu p und f keine Schnittpunkte. Vielmehr ist der Graf zu p für $x \to -\infty$ eine Asymptote, der sich der Graf von f annähert. Denn: $0{,}75e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ und somit $f(x) \approx t(x)$ für $x \to -\infty$.

6a)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x + e^x = -x^2 + e^x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

6b)

$f(x) - g(x) = -x + e^x - (-x^2 + e^x) = x^2 - x$

Also: $A = \left|\int_0^1 [f(x) - g(x)]dx\right| = \left|\int_0^1 (x^2 - x)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right| = \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{6}$

6c)

$f(x) = -x + e^x \Rightarrow f'(x) = -1 + e^x \Rightarrow f''(x) = e^x > 0$

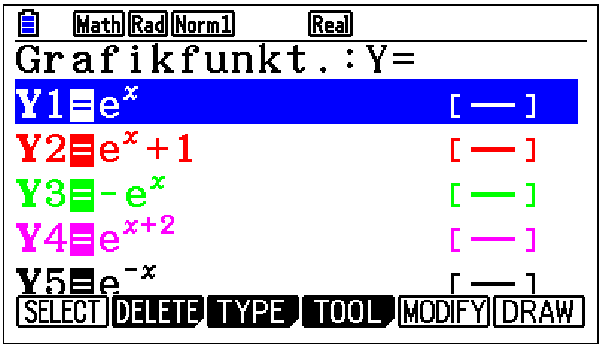
$f'(x) = -1 + e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $f(0) = 1$; $f''(0) = e^0 = 1 > 0$: (0/1) ist lokaler Tiefpunkt, der global, da der Graf wegen $f''(x) > 0$ durchweg linksgekrümmt ist (oder an den Rändern jeweils gegen unendlich strebt).

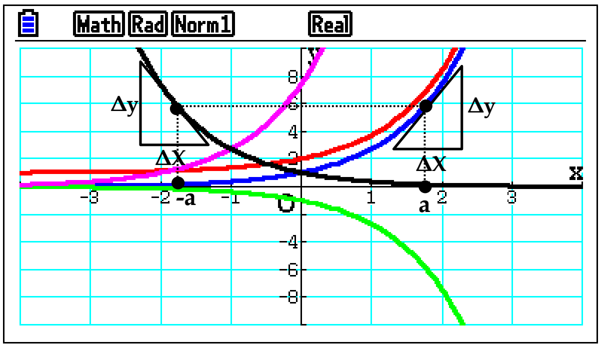
6d)

$g(x) = -x^2 + e^x \Rightarrow g'(x) = -2x + e^x \Rightarrow g''(x) = -2 + e^x \Rightarrow g'''(x) = e^x$

$g''(x) = -2 + e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$; $g'''(\ln(2)) = e^{\ln(2)} = 2 > 0$ (RrLiPo): $x = \ln(2)$ ist Rechts-Links-Wendestelle.

7a)





7b)

$f_1(x) = e^x \xrightarrow[\text{Verschiebung um 1 nach oben}]{} f_2(x) = e^x + 1$

$f_1(x) = e^x \xrightarrow[\text{Spiegelung an der x-Achse}]{} f_3(x) = -e^x$

$f_1(x) = e^x \xrightarrow[\text{Verschiebung um 2 nach links}]{} f_4(x) = e^{x+2}$

$f_1(x) = e^x \xrightarrow[\text{Spiegelung an der y-Achse}]{} f_5(x) = e^{-x}$

7c)

Da der Graf von f_5 an der y-Achse gespiegelt wurde, ist jeder negative Steigungswert des Grafen von f_5 an einer Stelle -a genau der positive Steigungswert des Grafen von f_1 an der Stelle a. Dies sieht man zum Beispiel daran, dass das Steigungsdreieck der Tangente an der Stelle a das gleiche Δy besitzt wie die vergleichbare Tangente des gespiegelten Grafen, aber Δx sich um das Vorzeichen unterscheidet (vgl. Abb. oben rechts). Es gilt daher $f_5'(-a) = -f_1'(a) = -e^a$. Mit der folgenden Substitution $x = -a \Leftrightarrow a = -x$ gilt: $f_5'(x) = -e^{-x}$.

3 Natürlicher Logarithmus – Ableitung der Exponentialfunktion

1a)

$e^x = 6 \Leftrightarrow x = \log_e(6) \approx 1{,}8$

1b)

(1) $e^x = 6 \Leftrightarrow x = \log_e(6) = \ln(e)$

(2) Sei $e^x = b$. Dann ist nach der Definition des natürlichen Logarithmus $x = \ln(b)$ und damit gilt auch durch Einsetzen von x in der Startgleichung: $e^{\ln(b)} = b$. Für die zweite Gleichung kann folgendermaßen geschlossen werden: $e^x = e^b$ hat die nach der Definition des natürlichen Logarithmus die Lösung $x = \ln(e^b)$. Andererseits gilt offenbar x = b. Also: $b = \ln(e^b)$.

(3) $\ln(1) = \ln(e^0) = 0$, $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$. Es gilt $x = e^{\ln(x)} > 1 = e^0$, dann kann wegen der streng steigenden Monotonie der natürlichen Exponentialfunktion $\ln(x) > 0$ gefolgert werden. Analog gilt auch $x = e^{\ln(x)} < 1 = e^0 \Rightarrow \ln(x) < 0$.

(4) $e^{\ln(a)\cdot x} = e^{\ln(a^x)}$ nach der Potenzregel für Logarithmen.

1c)

$f(x) = 3^x = e^{\ln(3)\cdot x}, g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)\cdot x} = e^{-\ln(3)\cdot x},\ h(x) = e^{\ln(0{,}2)\cdot x} = e^{\ln\left(\frac{1}{5}\right)\cdot x} = e^{-\ln(5)\cdot x}$

1d)

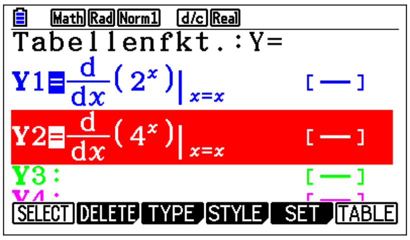
(1) $e^x = 15 \Leftrightarrow x = \ln(15) \approx 2{,}71$
(2) $e^x = 2{,}4 \Leftrightarrow x = \ln(2{,}4) \approx 0{,}88$
(3) $e^{2x} = 7 \Leftrightarrow 2x = \ln(7) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln(7) = \ln(\sqrt{7}) \approx 0{,}97$
(4) $3 \cdot e^{4x} = 16{,}2 \Leftrightarrow e^{4x} = 5{,}4 \Leftrightarrow 4x = \ln(5{,}4) \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\ln(5{,}4) = \ln\left(\sqrt[4]{5{,}4}\right) \approx 0{,}42$
(5) $e^{-x} = 10 \Leftrightarrow -x = \ln(10) \Leftrightarrow x = -\ln(10) = \ln(0{,}1) \approx -2{,}3$
(6) $e^{4-x} = 1 \Leftrightarrow 4 - x = \ln(1) = 0 \Leftrightarrow x = 4$
(7) $e^{4-4x} = 5 \Leftrightarrow 4 - 4x = \ln(5) \Leftrightarrow -4x = \ln(5) - 4 \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{4}\ln(5) = 1 - \ln(\sqrt[4]{5}) \approx 0{,}60$
(8) $2 \cdot e^{-x} = 5 \Leftrightarrow e^{-x} = 2{,}5 \Leftrightarrow -x = \ln(2{,}5) \Leftrightarrow x = -\ln(2{,}5) = \ln(0{,}4) \approx -0{,}91$
(9) $e^{2x+1} = 10 \Leftrightarrow 2x + 1 = \ln(10) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln(10) - \frac{1}{2} \approx 0{,}65$
(10) $3 \cdot e^{0{,}5x-1} = 1 \Leftrightarrow e^{0{,}5x-1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0{,}5x - 1 = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = 2\ln\left(\frac{1}{3}\right) + 2 = \ln\left(\frac{1}{9}\right) + 2 \approx -0{,}20$
(11) $\frac{1}{3} \cdot e^{\frac{1}{4}x-1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{4}x-1} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{4}x - 1 = \ln\left(\frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow x = 4\ln\left(\frac{3}{5}\right) + 4 \approx 1{,}96$
(12) $-\frac{6}{7} \cdot e^{-\frac{2}{3}x+0{,}5} = \frac{7}{6} \Leftrightarrow e^{-\frac{2}{3}x+0{,}5} = -1$ ist unlösbar, da jede Potenz von x echt positiv ist.

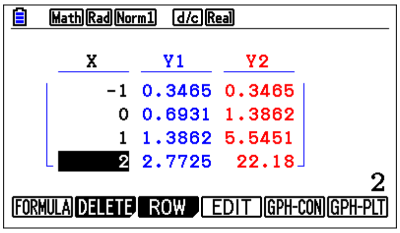
1e)

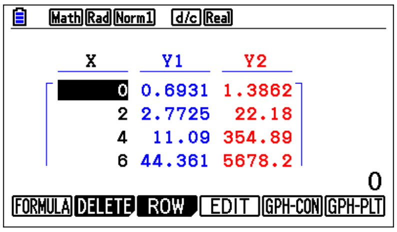
(1) $e^{2x} - 2 \cdot e^x = 0 \underset{u=e^x}{\Longleftrightarrow} u^2 - 2u = u(u-2) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \lor u = 2 \underset{u=e^x}{\Longleftrightarrow} e^x = 0 \lor e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$
(2) $e^{2x} - 2 \cdot e^x = -1 \underset{u=e^x}{\Longleftrightarrow} u^2 - 2u + 1 = (u-1)^2 = 0 \Leftrightarrow u = 1 \underset{u=e^x}{\Longleftrightarrow} e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0$
(3) $\frac{1}{10} \cdot e^{2x} - e^x = -\frac{12}{5} \underset{u=e^x}{\Longleftrightarrow} u^2 - 10u + 24 = 0 \Leftrightarrow u = 5 \pm 1 \underset{u=e^x}{\Longleftrightarrow} e^x = 5 \pm 1 \Leftrightarrow x = \ln(4) \lor x = \ln(6)$
(4) $e^{4x} + e^{2x} + 1 = 0$ ist unlösbar, da $e^{4x} + e^{2x} + 1 > 1$ gilt.

2a)

Aussage (1) stimmt. Aussage (2) ist falsch. Aussage (3) stimmt. Vergleiche dazu die beiden Tabellen, die mit dem GTR erstellt wurden.







2b)

a	e^{-3}	e^{-2}	$e^{-1} = \frac{1}{e}$	0,5	2	$e^1 = e$	3	e^2	e^3
$f'(0) \approx$	**-3**	**-2**	**-1**	**-0,6931**	0,6931	**1**	**1,0986**	**2**	**3**

Es gilt: $f'(0) = \ln(a)$

2c)

(1) $f(x) = e^{kx} = \left(e^k\right)^x$. Also ist $a = e^k$. Damit gilt nach dem Merksatz zu Aufgabe 3 aus dem letzten Kapitel für die Ableitung: $f'(x) = f'(0) \cdot e^{kx}$ gilt.

(2)

	$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$	$\frac{e^{k\cdot(0+h)} - e^{k\cdot 0}}{h} =$	$\frac{e^{0+k\cdot h} - e^0}{h} =$	$\frac{k}{k} \cdot \frac{e^{0+k\cdot h} - e^0}{h} =$
Begründung	Differenzenquotient an der Stelle 0	Einsetzen der Funktionswerte für f mit $f(x) = e^{kx}$	Ausmultiplizieren	Multiplizieren mit $\frac{k}{k}$ (als eine „unsichtbare“ 1)
	$k \cdot \frac{e^{0+k\cdot h} - e^0}{k \cdot h} =$	$k \cdot \frac{e^{0+t} - e^0}{t} \xrightarrow[t=k\cdot h\to 0]{h\to 0}$	$k \cdot 1 = f'(0)$	Für die Ableitung einer Exponentialfunktion von der Form $f(x) = e^{kx}$ gilt: $f'(x) = k \cdot e^{kx}$
Begründung	Multiplikation von Brüchen	Ersetze $k \cdot h$ durch t. Beide Zahlen konvergieren gegen Null, da k beliebig aber fest ist.	Der Bruch konvergiert für $t \to 0$ gegen $g'(0) = 1$ für $g(x) = e^x$ (e-Funktion hat bei 0 die Steigung 1)	

2d)

$f(x) = a^x = e^{\ln(a)\cdot x} \Rightarrow f'(x) = \ln(a) \cdot e^{\ln(a)\cdot x} = \ln(a) \cdot a^x$

2e)

(1) $F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(a) \cdot a^x = a^x$

(2) $F(x) = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{k} \cdot k \cdot e^{kx} = e^{kx}$

2f)

(1) $f(x) = 3^x = e^{\ln(3)\cdot x} \Rightarrow f'(x) = \ln(3) \cdot e^{\ln(3)\cdot x} \Rightarrow f''(x) = \ln(3) \cdot \ln(3) \cdot e^{\ln(3)\cdot x} = [\ln(3)]^2 \cdot e^{\ln(3)\cdot x}$

$F(x) = \frac{1}{\ln(3)} \cdot e^{\ln(3)\cdot x}$

$m_t = f'(1) = \ln(3) \cdot e^{\ln(3)\cdot 1} = 3\ln(3) = \ln(27)$ und $t(1) = 3 \Rightarrow \ln(27) \cdot 1 + b = 3 \Rightarrow b = 3 - \ln(27)$

$\Rightarrow t(x) = \ln(27)\, x + 3 - \ln(27)$

(2) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\cdot x} \Rightarrow f'(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\cdot x} \Rightarrow f''(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\cdot x} = \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\cdot x}$

$F(x) = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\cdot x}$

$m_t = f'(-1) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot e^{\ln(2)} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = \ln(0{,}25)$; $t(-1) = 4$

$\Rightarrow \ln(0{,}25) \cdot (-1) + b = 4 \Rightarrow b = 4 - \ln(4) \Rightarrow t(x) = \ln(0{,}25)\,x + 4 - \ln(4)$

(3) $f(x) = x^2 - 2^x = x^2 - e^{\ln(2)\cdot x} \Rightarrow f'(x) = 2x - \ln(2) \cdot e^{\ln(2)\cdot x} \Rightarrow f''(x) = 2 - [\ln(2)]^2 \cdot e^{\ln(2)\cdot x}$
$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{\ln(2)} \cdot e^{\ln(2)\cdot x}$
$m_t = f'(2) = 4 - \ln(2) \cdot e^{\ln(2)\cdot 2} = 4 - \ln(2) \cdot e^{\ln(2^2)} = 4 - 4\ln(2)\,;\ t(2) = f(2) = 0$
$\Rightarrow (4 - 4\ln(2)) \cdot 2 + b = 0 \Rightarrow b = 8\ln(2) - 8 \Rightarrow t(x) = (4 - 4\ln(2)) \cdot x + 8\ln(2) - 8$

(4) $f(x) = e^{-2x} + 4^{-x} = e^{-2x} + (4^{-1})^x = e^{-2x} + 0{,}25^x = e^{-2x} + e^{\ln(0{,}25)\cdot x}$
$\Rightarrow f'(x) = -2e^{-2x} + \ln(0{,}25) \cdot e^{\ln(0{,}25)\cdot x} \Rightarrow f''(x) = 4e^{-2x} + [\ln(0{,}25)]^2;$
$F(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + \frac{1}{\ln(0{,}25)} \cdot e^{\ln(0{,}25)\cdot x}$
$m_t = f'(0) = -2 + \ln(0{,}25) = \ln(0{,}25) - 2;\ t(0) = f(0) = 2 = b \Rightarrow t(x) = (\ln(0{,}25) - 2) \cdot x + 2$

3a)

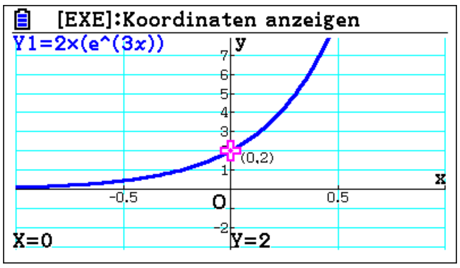
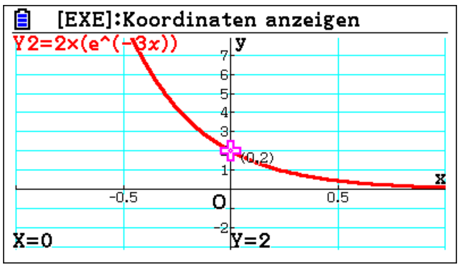
(1) Durch die Streckung in x-Richtung halbiert sich beim Steigungsdreieck der Tangente des gestreckten Graf Δx, während Δy gleich bleibt. Daher ist die Steigung des gestreckten Grafen an der Stelle 0 doppelt so groß.

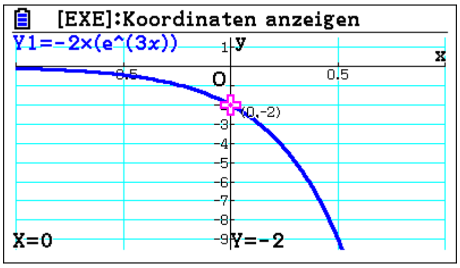
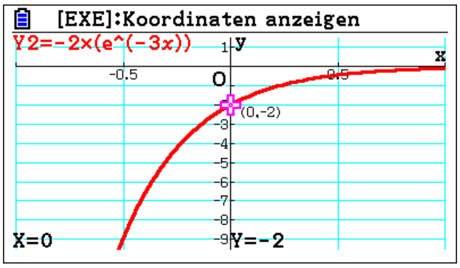
(2) Da die natürliche Exponentialfunktion an der Stelle 1 die Steigung 1 besitzt und mit (1) der gestreckte Graf dort die Steigung 2 hat, gilt für den gestreckten Grafen $g'(0) = 2$. Da der gestreckte Graf der Graf einer Exponentialfunktion mit der Basis e^2 ist, gilt nach dem Merksatz zu Aufgabe 3 aus dem letzten Kapitel für die Ableitung: $g'(x) = 2 \cdot g(x) = 2 \cdot e^{2x}$.

3b)

(1) Der Parameter c streckt den Grafen von der x-Achse aus in y-Richtung und verändert damit auch die Schnittstelle mit der y-Achse. Sollte c negativ sein, findet eine Spiegelung an der x-Achse statt. Der Parameter k streckt von der y-Achse in x-Richtung. Für k > 1 und k < -1 wird der Graf der natürlichen Exponentialfunktion in Richtung y-Achse zusammengedrückt. Für 0 < k < 1 und auch für -1 < k < 0 findet eine Stauchung in x-Richtung statt. Der Graf wird von der y-Achse weg „auseinandergezogen". Ein Vorzeichenwechsel bei k lässt den Grafen an der y-Achse spiegeln.

(2)

$f(x) = ce^{kx}$	c > 0 und k > 0: z. B. $f(x) = 2e^{3x}$	c > 0 und k < 0: z. B. $f(x) = 2e^{-3x}$
Graf		
Monotonie	streng monoton zunehmend	streng monoton abnehmend
Randverhalten	$x \to +\infty$: $f(x) \to +\infty$	$x \to +\infty$: $f(x) \to 0$
	$x \to -\infty$: $f(x) \to 0$	$x \to -\infty$: $f(x) \to +\infty$
Nullstellen	keine	keine
y-Achsenschnittstelle	y = c	y = c
Krümmungsverhalten	linksgekrümmt	linksgekrümmt

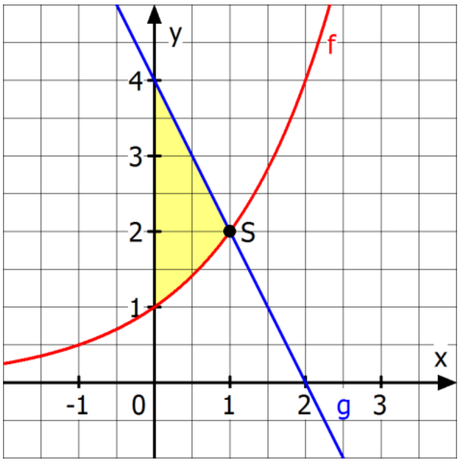
$f(x) = ce^{kx}$	$c < 0$ und $k > 0$: z. B. $f(x) = -2e^{3x}$	$c < 0$ und $k < 0$: z. B. $f(x) = -2e^{-3x}$
Graf		
Monotonie	streng monoton abnehmend	streng monoton zunehmend
Randverhalten	$x \to +\infty$: $f(x) \to -\infty$	$x \to +\infty$: $f(x) \to 0$
	$x \to -\infty$: $f(x) \to 0$	$x \to -\infty$: $f(x) \to -\infty$
Nullstellen	keine	keine
y-Achsenschnittstelle	$y = c$	$y = c$
Krümmungsverhalten	rechtsgekrümmt	rechtsgekrümmt

(4)

$f_{c,k}(x) = ce^{kx} \Rightarrow f_{c,k}'(x) = c \cdot k \cdot e^{kx} \Rightarrow f_{c,k}''(x) = c \cdot k^2 \cdot e^{kx}$ und $F_{c,k}(x) = \frac{c}{k} \cdot e^{kx}$

$f_{c,k}'(x) = c \cdot k \cdot e^{kx} > 0$, falls c und k beide positiv bzw. beide negativ sind. Daher ist der Graph streng monoton zunehmend, falls c und k dasselbe Vorzeichen haben. Bei unterschiedlichen Vorzeichen ist der Graf streng monoton abnehmend. $f_{c,k}''(x) = c \cdot k^2 \cdot e^{kx} > 0$ für $c > 0$. Daher ist der Graf linksgekrümmt für $c > 0$ und rechtsgekrümmt für $c < 0$.

4a)



4b)

Es gilt $f(1) = g(1) = 2$. Daher ist S Schnittpunkt der beiden Grafen. Aufgrund des Verhaltens an den Rändern kann es keinen weiteren Schnittpunkt geben.

4c)

Die gesuchte Fläche lässt sich berechnen über den Ansatz $\int_0^1 [g(x) - f(x)]\, dx$. Berechne dafür zunächst die Differenzfunktion $d(x) = g(x) - f(x) = -2x + 4 - 2^x$. Die Stammfunktion D ist gegeben durch: $D(x) = -x^2 + 4x - \frac{1}{\ln(2)} 2^x$. Daher gilt:

$\int_0^1 [g(x) - f(x)]\,dx = \left[-x^2 + 4x - \frac{1}{\ln(2)} 2^x\right]_0^1 = -1 + 4 - \frac{2}{\ln(2)} - \left(-\frac{1}{\ln(2)}\right) = 3 - \frac{1}{\ln(2)}$

4d)

$f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x;\ m_t = f'(1) = 2\ln(2);\ t(1) = 2 \Rightarrow 2\ln(2) \cdot 1 + b = 2 \Rightarrow b = 2 - 2\ln(2)$
$\Rightarrow t(x) = 2\ln(2) \cdot x + 2 - \ln(2)$

4e)

Ansatz: $f'(x) = k \cdot e^{kx} = -2 \Leftrightarrow e^{kx} = \frac{-2}{k}$. Diese Gleichung ist nur lösbar, wenn k negativ ist, da sonst e^{kx} negativ wäre. Formt man sie nach x um, ergibt sich: $kx = \ln\left(\frac{-2}{k}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{-2}{k}\right)$. Für den y-Wert des Berührpunktes berechnet man: $y = e^{k \cdot \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{-2}{k}\right)} = \frac{-2}{k}$. Also: $B\left(\frac{1}{k}\ln\left(\frac{-2}{k}\right) / \frac{-2}{k}\right)$

5a)

Man setzt f(x) und g(x) gleich und zeigt, dass x = 0 und x = –1:
$-x + 2^x - 0{,}5 = 2^x + 2^{-x} - 1{,}5 \Leftrightarrow 1 - x = 2^{-x}$. Offenbar erfüllen sowohl x = 0 und x = –1 diese Gleichung.

5b)

$d(x) = f(x) - g(x) = -x + 2^x - 0{,}5 - (2^x + 2^{-x} - 1{,}5) = 1 - x - 2^{-x} = 1 - x - (2^{-1})^x$
$= 1 - x - 0{,}5^x \Rightarrow D(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{\ln(0{,}5)} \cdot 0{,}5^x$
$\int_{-1}^0 [f(x) - g(x)]\,dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{\ln(0{,}5)} \cdot 0{,}5^x\right]_{-1}^0 = -\frac{1}{\ln(0{,}5)} - \left(-1 - 0{,}5 - \frac{1}{\ln(0{,}5)} \cdot 0{,}5^{-1}\right)$
$= -\frac{1}{\ln(0{,}5)} + 1{,}5 + \frac{2}{\ln(0{,}5)} = 1{,}5 + \frac{1}{\ln(0{,}5)} \approx 0{,}06$

5c) und 5d)

$f'(x) = -1 + \ln(2) \cdot 2^x$ und $f''(x) = [\ln(2)]^2 \cdot 2^x > 0$
$f'(x) = -1 + \ln(2) \cdot 2^x = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{\ln(2)} \Leftrightarrow x = \log_2\left(\frac{1}{\ln(2)}\right) \approx 0{,}53$. Da der Graf von f wegen $f''(x) > 0$ durchweg linksgekrümmt ist, ist $x = \log_2\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)$ eine globale Minimumstelle.
$g'(x) = \ln(2) \cdot 2^x + \ln(0{,}5) \cdot 0{,}5^x;\ g''(x) = [\ln(2)]^2 \cdot 2^x + [\ln(0{,}5)]^2 \cdot 0{,}5^x > 0$
$g'(x) = \ln(2) \cdot 2^x + \ln(0{,}5) \cdot 0{,}5^x = 0 \Leftrightarrow \ln(2) \cdot 2^x = -\ln(0{,}5) \cdot 0{,}5^x \Leftrightarrow 2^x = 0{,}5^x \Leftrightarrow x = 0.$ Da der Graf von g wegen $f''(x) > 0$ durchweg linksgekrümmt ist, ist x = 0 eine globale Minimumstelle.

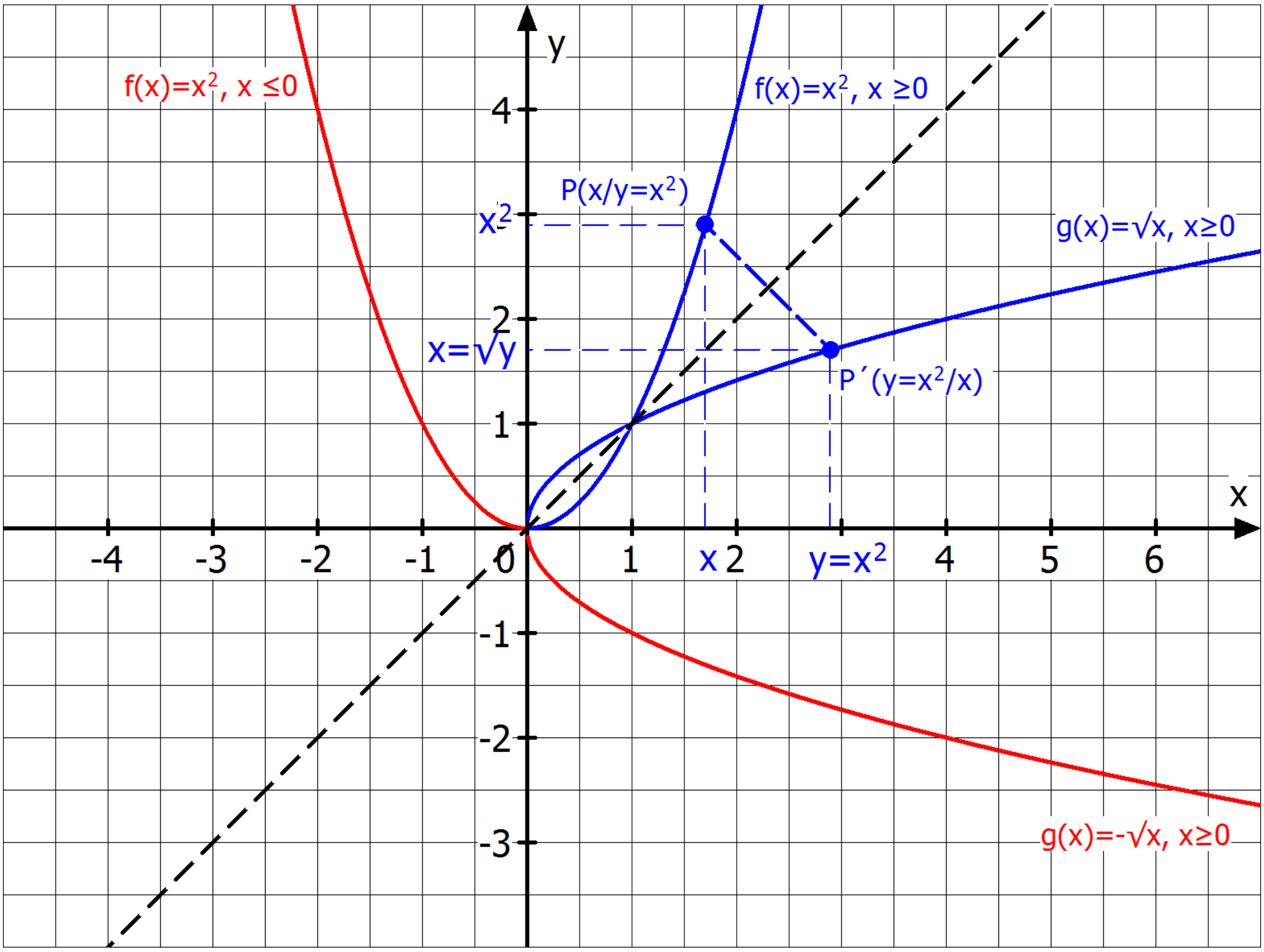
6

Aussage (1) ist wahr, da $f'(x) = k \cdot e^{kx} \neq 0$ für $k \neq 0$
Aussage (2) ist wahr, falls $e^{kx} = a$ genau eine Lösung hat. Dies ist genau für a > 0 der Fall.
Aussage (3) ist wahr, falls $f'(x) = k \cdot e^{kx}$ an der Stelle 0 positiv ist. Also $f'(0) = k > 0$. Dies ist für positive k der Fall.
Aussage (4) ist wahr, da $f(x) = e^{-\ln(a) \cdot x} = e^{\ln(a^{-x})} = a^{-x}$ die Funktion des an der y-Achse gespiegelten Grafen zu g mit $g(x) = a^x$ ist.
Aussage (5) ist nur wahr für a > 1, da $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x > 0 \underset{a^x > 0}{\Longleftrightarrow} \ln(a) > 0 \Leftrightarrow a > 1$.
Aussage (6) ist nur wahr für c > 0, da $ce^{kx} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{kx} = \frac{1}{c}$ nur für c > 0 genau eine Lösung besitzt.

4 Natürliche Logarithmusfunktion

1

„Funktionspartner sein" bedeutet, dass der Graf einer Funktion an der 1. Winkelhalbierenden gespiegelt wird, um den Grafen der Partnerfunktion zu erzeugen. Man erhält zum Punkt P(x/y) eines Grafen den Bildpunkt durch Vertauschen von x- und y-Wert. Also gilt P´(y/x). Beispiel: Der Punkt P auf dem rechten Normalparabelast mit $f(x) = x^2$ und $x \geq 0$ hat den allgemeinen Parabelpunkt $P(x/y = x^2)$. Der Bildpunkt lautet $P´(y = x^2/x)$. Für den Bildpunkt wird nun jedem $y = x^2 \geq 0$ ein Funktionswert $x \geq 0$ zugeordnet. Wegen $y = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y}$ und $x \geq 0$ wird jedem $y \geq 0$ der Funktionswert $\sqrt{y}$ zugeordnet. Es gilt für die Funktionsgleichung g des gespiegelten Grafen also: $g(y) = \sqrt{y}$. Ersetzt man x durch y ($x, y \geq 0$) erhält man die bekannte Form $g(x) = \sqrt{x}$.

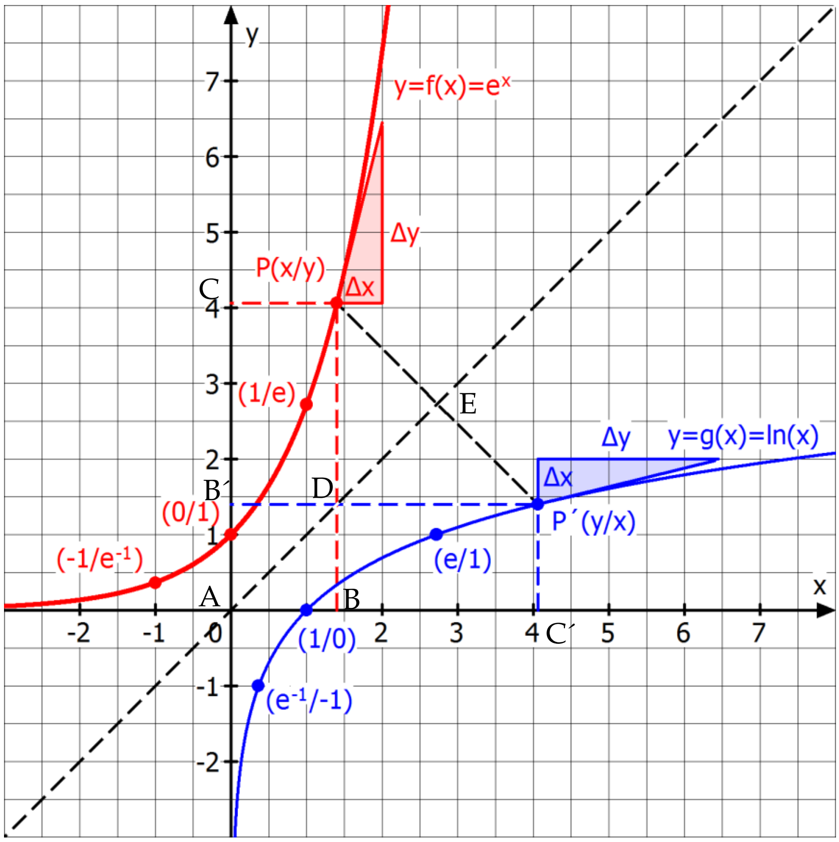


Analog gilt $y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$ und $x \geq 0$ und es folgt die Funktion $g(y) = \sqrt[3]{y}$ für $y \geq 0$. Setzt man x statt y, erhält man die gewohnte Form $g(x) = \sqrt[3]{x}$ mit $x \geq 0$.

Die Partnerfunktion zu $f(x) = x + 3$ lautet $g(x) = x - 3$. Begründung: Der allgemeine Geradenpunkt der Gerade f lautet $P(x/y = x + 3)$ und hat den Bildpunkt $P´(y = x + 3/x)$. Wegen der Umformung $y = x + 3 \Leftrightarrow x = y - 3$ liefert $g(y) = y - 3$ bzw. $g(x) = x - 3$ die Funktionsgleichung des gespiegelten Grafen.

Ebenso erhält man aus $y = 3x$ die Gleichung $x = \frac{1}{3}y$ und aus $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$. In allen Fällen nennt man die Funktionen der gespiegelten Grafen Umkehrfunktionen zu den Funktionen der Ausgangsgrafen.

2a)



Es sei P(x/y). Daher hat das Rechteck ABPC die Seitenlängen x und y. Zu Zeigen ist, dass das Rechteck AC´P´B´ die Seitenlängen y und x hat. Beweis: Sei D der Schnittpunkt der längeren Rechteckseiten und $\overline{AB} = x$ und $\overline{AC} = y$. Die Dreiecke ABD und ADB´ sind konkruent nach SWW (gemeinsame Seite $\overline{AD}$, 45-Grad-Winkel als Steigungswinkel der Geraden $y = x$ und 90-Grad-Winkel). Daher gilt: $\overline{B'D} = \overline{BD}$. Beide Seiten entsprechen der Strecke $\overline{AB}$, da die beiden Dreiecke ABD und ADB´ auch gleichschenklig sind (Basiswinkel betragen beide 45 Grad). Also: $\overline{BD} = \overline{C'P'} = x$. Ebenso sind die Dreiecke DP´E und DEP kongruent z. B. nach SWS (Seite $\overline{DE}$, $\overline{PE} = \overline{P'E}$ und rechter Winkel). Daher gilt $\overline{PD} = \overline{P'D}$ und mit $\overline{B'D} = \overline{BD}$ auch $\overline{BP} = \overline{B'P'} = y$.

2b)

Der x-Wert des Bildpunktes beträgt $y = e^x$. Ihm wird der y-Wert x zugeordnet. Wegen der Umformung $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$ und der Tatsache, dass e^x alle positiven Zahlen durchläuft, wird jedem $y = e^x > 0$ der Funktionswert $x = \ln(y)$ zugeordnet. Man erhält also für $y > 0$ die Funktionsgleichung $g(y) = \ln(y)$ mit $y > 0$. [Eine alternative Argumentation kann folgendermaßen aussehen: $y = e^x > 0 \xrightarrow[\text{Spiegelung: x und y−Wert vertauschen}]{} x = e^y > 0 \xrightarrow[\text{nach y auflösen}]{} y = \ln(x)$ mit $x > 0$.]

2c)

Sei $f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x$. Offenbar gilt für die Umkehrfunktion g: $g'(y) = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{e^x}$. Da aber $y = f(x) = e^x$ und e^x alle positiven Zahlen durchläuft, folgt für $y > 0$: $g'(y) = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{y}$. Ersetzt man y durch x, erhält man die gängige Form: $g'(x) = \frac{1}{x}$. Kurzform: $f'(x) = e^x \xrightarrow[\text{gespiegeltes Steigungsdreieck}]{} g'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$ mit $y > 0$

2d)

(1) Wegen $g'(x) = \frac{1}{x} > 0$ ist der Graf der natürlichen Logarithmusfunktion für $x > 0$ streng monoton wachsend und besitzt daher keine Extremstellen.

(2) Es gilt $\ln(1) = 0$, da $e^0 = 1$. Da der Graf wegen (1) streng monoton wachsend für $x > 0$ ist, existiert keine weitere Nullstelle von g.

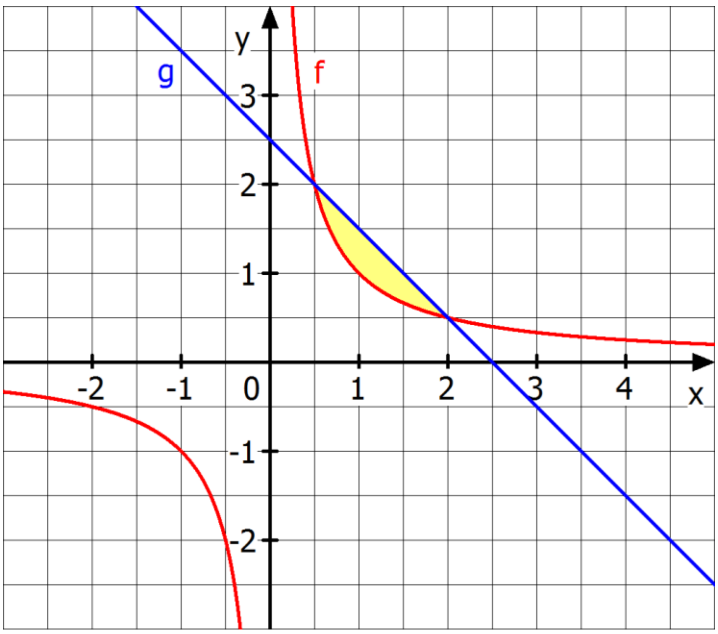
(3) $g''(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} < 0$: Der Graf von g ist für $x > 0$ rechtsgekrümmt.

(4) Dies kann aus dem Verhalten der natürlichen Exponentialfunktion an den Rändern und der Tatsache, dass der Graf der natürlichen Logarithmusfunktion an der Geraden $y = x$ gespiegelt wurde gefolgert werden: $y = e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \xrightarrow[\text{Spiegelung}]{} x = \ln(y) \xrightarrow[y \to 0]{} -\infty$. Analog kann für das Verhalten $x \to +\infty$ gefolgert werden: $y = e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \xrightarrow[\text{Spiegelung}]{} x = \ln(y) \xrightarrow[y \to 0]{} -\infty$.

2e)

Ein Beispiel ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$. Würde man den kompletten Grafen spiegeln, was gleichbedeutend ist mit der Bildung einer Umkehrfunktion auf dem kompletten Definitionsbereich, erhielte man keinen Grafen einer Funktion, da einem x-Wert zwei y-Werte zugeordnet wären. Wichtig ist also, dass beim Definitionsbereich der Ausgangsfunktion jedem y-Wert genau ein x-Wert zugeordnet ist. Denn dann entshet erst eine Funktion, die jedem x-Wert (y-Wert der Ausgangsfunktion) genau ein y-Wert (x-Wert der Ausgangsfunktion) zugeordnet wird.

3a)



3b)

Die Schnittstellen der Funktionen f und g berechnet man durch Gleichsetzen der Funktionsterme: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -x + 2{,}5 \underset{\cdot x > 0}{\Leftrightarrow} 1 = -x^2 + 2{,}5x \Leftrightarrow x^2 - 2{,}5x + 1 = 0$. Die Diskrimininate lautet dann: $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1 = \frac{25}{16} - \frac{16}{16} = \frac{9}{16}$. Daher gilt für die Lösungen der quadratischen Gleichung und damit für die Schnittstellen: $x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 0{,}5$.

3c)

Für den Flächeninhalt A, den beide Grafen einschließen gilt: $A = \int_{0,5}^{2} [g(x) - f(x)]dx$

$= \int_{0,5}^{2} \left(-x + 2{,}5 - \frac{1}{x}\right) dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2{,}5x - \ln(x)\right]_{0,5}^{2} = (-2 + 5 - \ln(2)) - \left(-\frac{1}{8} + \frac{5}{4} - \ln(0{,}5)\right)$

$= 3 - \ln(2) - \frac{9}{8} + \ln(0{,}5) = \frac{15}{8} - 2\ln(2) \approx 0{,}49$

3d)

$\int_1^{10} \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_1^{10} = \ln(10) - \ln(1) \approx 2{,}30$

3e)

$\int_1^{R} \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_1^{R} = \ln(R) \xrightarrow[R\to+\infty]{} +\infty$ (Aufgabe 2d(4))

$\int_L^{1} \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_L^{1} = -\ln(L) \xrightarrow[L\to 0]{} +\infty$ (Aufgabe 2d(4))

Daher existieren beide Integrale nicht.

4a)

$\int_1^3 \left(\frac{1}{3x} + x\right) dx = \left[\frac{1}{3}\ln(x) + \frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{1}{3}\ln(3) + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{3}\ln(3) \approx 4{,}37$

4b)

$\int_1^2 \left(\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[5\ln(x) - \frac{1}{x}\right]_1^2 = 5\ln(2) - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 5\ln(2) \approx 3{,}97$

4c)

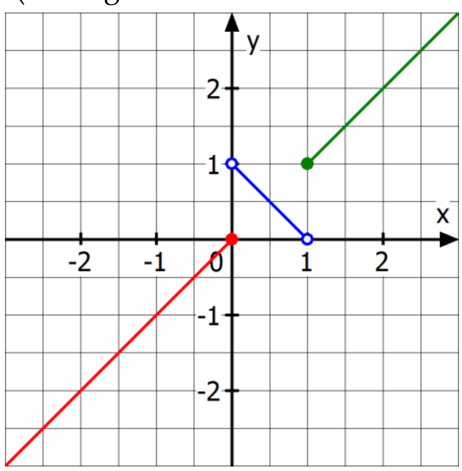
$\int_1^2 \left(e^{2x} + \frac{1}{2x}\right) dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}\ln(x)\right]_1^2 = \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e^2 + \ln(2)) \approx 23{,}95$

5

Aussage (1) ist wahr, wenn man sich auf den kompletten Definitionsbereich bezieht. Denn aufgrund der Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse können jeden y-Wert aus dem Wertebereich der Funktion immer mindestens zwei x-Werte aus dem Definitionsbereich zugeordnet werden.

Gegenbeispiel zu Aussage (2): Die Funktion f mit $f(x) = (x-1)^2$ ist als nicht gerade Funktion nicht umkehrbar auf $\mathbb{R}$, da jeden Funktionswert > 0 genau zwei x-Werte zugeordnet sind.

Aussage (3) ist wahr. Denn wenn $f'(x) \neq 0$ für alle x-Werte des Definitionsbereiches, dann muss $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$ für alle x des Definitionsbereiches sein (sonst gäbe es eine Nullstelle der ersten Ableitung). Daher muss der Graf von f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend sein. Somit ist die Funktion auch umkehrbar.



Aussage (4) ist wahr. Denn hätte eine umkehrbare Funktion auf ihrem Definitionsbereich eine Extremstelle a, gäbe es in einer Umgebung von a zwei Stelle c und d mit f(c) = f(d), was ein Widerspruch zur Umkehrbarkeit der Funktion wäre.

Aussage (5) ist falsch, da die Funktion nicht unbedingt sprungfrei sein muss. Betrachte zum Beispiel folgende Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} x \text{ für } x \leq 0 \\ 1 - x \text{ für } 0 < x < 1 \\ x \text{ für } x \geq 1 \end{cases}$ (Graf rechts)

Aussage (6) ist wahr: $y = x^2 > 0 \xrightarrow[\text{x und y−Wert vertauschen}]{} x = y^2 > 0 \xrightarrow[\text{nach y auflösen}]{} y = \sqrt{x}$ mit $x > 0$.

6a)

Man vertauscht x und y-Wert und löst na y auf. Dabei sind Definitions- und Wertebereich von Funktion und Umkehrfunktion jeweils vertauscht. In Kurzschreibweise gilt:

$y = e^{2x} > 0; x \in \mathbb{R} \xrightarrow[x \leftrightarrows y]{} x = e^{2y} > 0; y \in \mathbb{R} \xrightarrow[\text{nach y auflösen}]{} 2y = \ln(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln(x) = \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \in \mathbb{R}; x > 0$

6b)

(1) $\ln(\sqrt{x}) = 0$

(2) $\int_{-1}^{0} e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2}$

(3) $\int_{-1}^{0} e^{2x}\,dx = -\int_{e^{-2}}^{1} g(x)\,dx +$ Rechteck mit den Seitenlängen 1 und $e^{-2} = -\int_{e^{-2}}^{1} g(x)\,dx + e^{-2}$. Also gilt: $\int_{e^{-2}}^{1} g(x)\,dx = -\int_{-1}^{0} e^{2x}\,dx + e^{-2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2} + e^{-2} = \frac{3}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}$

(4) $\int_{L}^{0} e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{L}^{0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2L} \xrightarrow[L \to -\infty]{} \frac{1}{2}$. Aus Symmetriegründen gilt) $\int_{0}^{1} g(x)\,dx = -\frac{1}{2}$

6c)

$g'(x) = \frac{1}{2x}$; $m_t = g'(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow t(x) = \frac{1}{2}x + b; t(1) = 0: \frac{1}{2} \cdot 1 + b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$. Also gilt für die Tangente t im Punkt (1/0): $t(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

6d)

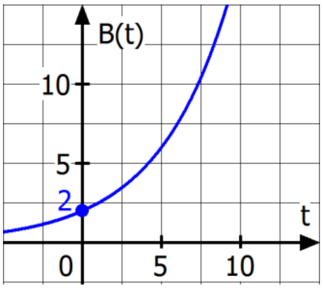
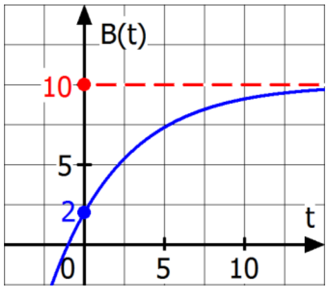
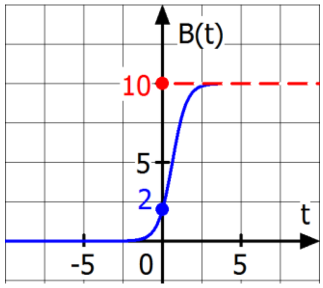
Man subtrahiert vom Flächeninhalt der unbeschränkten Fläche, die der Graf von g über dem Intervall [0; 1] mit der x-Achse einschließt (er beträgt nach b)(4) 0,5) den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreieck, das die Tangente t mit den beiden Koordinatenachsen begrenzt (er beträgt 0,25). Also beträgt der gesuchte Flächeninhalt 0,25.

5 Wachstumsvorgänge

1a) Der Anfangsbestand B(0) beträgt in allen Fällen 2.

1b)

B_1 beschreibt das beschränkte Wachstum ($x \to -\infty$: $B_1(t) \to -\infty$; $x \to +\infty$: $B_1(t) \to 10$), B_2 das logistische Wachstum ($x \to -\infty$: $B_2(t) \to 0$; $x \to +\infty$: $B_2(t) \to 10$) und B_3 das exponentielle Wachstum ($x \to -\infty$: $B_3(t) \to 0$; $x \to +\infty$: $B_3(t) \to +\infty$).

	exponentiell	**beschränkt**	**logistisch**
Verlauf des Bestandes B(t)			

1c) Die Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit verläuft logistisch, der Guthabenzins auf einem Sparkonto exponentiell, die Erwärmung eines Tiefkühlprodukts bei Zimmertemperatur beschränkt.

1d) B_1 gehört zum beschränkten Wachstum, B_3 zum exponentiellen Wachstum und B_2 zum logistischen Wachstum.

1e)

$B_3(t) = 2 \cdot e^{0,22t} \Rightarrow B_3{}'(t) = 2 \cdot 0,22 \cdot e^{0,22t} = 0,22 \cdot 2 \cdot e^{0,22t} = 0,22 \cdot B_3(t) = k \cdot B_3(t)$

$B_1(t) = 10 - (10-2)e^{-0,22t} = 10 - 8 \cdot e^{-0,22t} \Rightarrow B_1{}'(t) = -8 \cdot (-0,22) \cdot e^{-0,22t} = 1,76 \cdot e^{-0,22t}$

Andererseits gilt: $k \cdot \left(S - B_1(t)\right) = 0,22 \cdot (10 - [10 - (10-2)e^{-0,22t}]) = 0,22 \cdot 8 \cdot e^{-0,22t} = 1,76 \cdot e^{-0,22t}$

Nicht gefordert, da Kettenregel vorausgesetzt wird:

$B_2(t) = \frac{2 \cdot 10}{2+(10-2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}} = 2 \cdot 10 \cdot (2 + (10-2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t})^{-1}$

$\Rightarrow B_2{}'(t) = 2 \cdot 10 \cdot (-1) \cdot (2 + (10-2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t})^{-2} \cdot (10-2) \cdot (-0,22) \cdot 10 \cdot e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}$

$= 0,22 \cdot \frac{2 \cdot 10}{(2+(10-2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t})^2} \cdot (10-2) \cdot 10 \cdot e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t} = 0,22 \cdot \frac{1600 \cdot e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}}{(2+8 \cdot e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t})^2}$

Andererseits gilt:

$k \cdot B_2(t) \cdot \left(S - B_2(t)\right) = 0,22 \cdot \frac{2 \cdot 10}{2+(10-2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}} \cdot \left(10 - \frac{2 \cdot 10}{2+(10-2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}}\right)$

$= 0,22 \cdot \left(\frac{2 \cdot 10 \cdot 10}{2+(10-2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}} - \frac{2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10}{(2+(10-2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t})^2}\right) = 0,22 \cdot \frac{2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \left(2+(10-2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}\right) - 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10}{(2+(10-2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t})^2}$

$= 0,22 \cdot \frac{2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 + 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot (10-2) \cdot e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t} - 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10}{(2+(10-2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t})^2} = 0,22 \cdot \frac{2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot (10-2) \cdot e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}}{(2+(10-2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t})^2} = B_2{}'(t)$ von oben (Puh!)

1f) (1) linear; (2) logistisch; (3) beschränkt; (4) exponentiell; (5) kein Wachstum; (6) beschränkt; (7)[25] beschränkt; (8) logistisch; (9) exponentielle ($k < 0$) und beschränkt ($S = 0$).

[25] Die Anzahl der Tiere nach n Jahren lässt sich durch folgenden Ausdruck beschreiben:
$N(n) = 0,97 \cdot (\cdots (0,97 \cdot (0,97 \cdot (0,97 \cdot 750 + 15) + 15) + 15) + 15 \cdots) + 15$
$= 0,97^n \cdot 750 + 0,97^{n-1} \cdot 15 + 0,97^{n-2} \cdot 15 + \cdots + 0,97^2 \cdot 15 + 0,97^1 \cdot 15 + 15$
$= 0,97^n \cdot 750 + (0,97^{n-1} + 0,97^{n-2} + \cdots + 0,97^2 + 0,97^1 + 1) \cdot 15$
$= 0,97^n \cdot 750 + 15 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 0,97^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{15}{1-0,97} = \frac{15}{0,3} = 500$. Langfristig hat die Herde eine Größe von 500 Tieren.

2a) Sei n die Anzahl der Würfe, B(0) die Würfelzahl zu Beginn und B(n) die Würfelanzahl nach n Versuchen. Dann gilt für die Würfelzahl nach n Versuchen $B(n) = B(0) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Da Leah nach 10 Versuchen nur noch 5 Würfel hat, gilt $5 = B(0) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \Leftrightarrow B(0) = \frac{5}{\left(\frac{5}{6}\right)^{10}} \approx 31$. Es waren wohl 31 Würfel.

2b)

(1) $B(t) = B(0) \cdot e^{kt} \Rightarrow\ B'(t) = B(0) \cdot k \cdot e^{kt} = k \cdot B(0) \cdot e^{kt} = k \cdot B(t)$
(2) $B(t) = B(0) \cdot a^t = B(0) \cdot e^{kt} = B(0) \cdot \left(e^k\right)^t \Leftrightarrow a = e^k \Leftrightarrow k = \ln(a)$
(3) Bei B_3: $k = 0{,}22;\ a\ = e^{0{,}22}$

2c)

(1) Ansatz: $B(t) = B(0) \cdot e^{kt} = 2{,}5 \cdot e^{kt}; B(30) = 4{,}5 \Rightarrow 4{,}5 = 2{,}5 \cdot e^{30k} \Leftrightarrow 1{,}8 = e^{30k} \Leftrightarrow 30k = \ln(1{,}8)$. Also: $k = \frac{\ln(1{,}8)}{30} \approx 0{,}0196 \Rightarrow B(t) \approx 2{,}5 \cdot e^{0{,}0196 \cdot t} \Rightarrow a = e^{0{,}0196} \approx 1{,}0198$

(2) Ansatz Verdopplungszeit: $5 = 2{,}5 \cdot e^{0{,}0196 \cdot t} \Leftrightarrow 2 = e^{0{,}0196 \cdot t} \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{0{,}0196} \approx 35{,}4$ Jahre. Die jährliche Wachstumsrate beträgt $p = e^{0{,}0196} - 1 \approx 1{,}98\ \%$. Nach 35,4 Jahren hat sich die Weltbevölkerung bei einer jährlichen Wachstumsrate von knapp 2 % verdoppelt.

(3) $B(55) = 2{,}5 \cdot e^{0{,}0196 \cdot 55} \approx 7{,}35$; Abweichung zum tatsächlichen Wert: $\frac{7{,}35}{6{,}4} - 1 \approx 14{,}84\ \%$;
$B(-30) = 2{,}5 \cdot e^{0{,}0196 \cdot (-30)} \approx 1{,}39$; Abweichung zum tatsächlichen Wert: $\frac{1{,}39}{1{,}8} - 1 \approx -22{,}78\ \%$;

2d)

(1) Durchschnittswert: 1,8202. $B(t) = B(0) \cdot a^t = 80 \cdot 1{,}8202^t = 80 \cdot e^{k \cdot t}; k = \ln(1{,}8202) \approx 0{,}5989$

(2) Über die Funktion $\frac{d}{dx}$ (MENU 1 → OPT → CALC) kann die Ableitung an einer bestimmten Stelle berechnet werden: $B'(0) \approx 47{,}92$; $B'(1) \approx 87{,}22$; $B'(2) \approx 158{,}75$; $B'(3) \approx 288{,}96$; $B'(4) \approx 525{,}96$; $B'(5) \approx 957{,}36$. Für den Ableitungsterm der Funktion B gilt: $B'(t) = 80 \cdot 0{,}5989 \cdot e^{0{,}5989 \cdot t} = 47{,}912 \cdot e^{0{,}5989 \cdot t}$: Die Verdopplung der Wachstumsgeschwindigkeit berechnet man durch folgenden Ansatz: $2 = e^{0{,}5989 \cdot t} \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{0{,}5989} \approx 1{,}16$. Nach 1,16 Stunden hat sich die Bakterienzahl verdoppelt.

2e)

(1) Für den durchschnittlichen Wachstumsfaktor a ergibt sich gerundet a = 0,7234. Also gilt für k: $k = \ln(0{,}7234) \approx -0{,}3238$. Mit dem Anfangswert B(0) = 10 ergibt sich $B(t) = 10 \cdot e^{-0{,}3238 \cdot t}$.

(2) Für die Funktion C mit $C(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$ und den beiden Bedingungen $C(2) = 5$ und $C(5) = 2$ erhält man die beiden Gleichungen $c \cdot e^{2k} = 5$ und $c \cdot e^{5k} = 2$. Es gilt durch „Division" der beiden Gleichungen: $\frac{c \cdot e^{5k}}{c \cdot e^{2k}} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow e^{3k} = 0{,}4 \Rightarrow k = \frac{\ln(0{,}4)}{3} \approx -0{,}3054 \Rightarrow c = \frac{5}{e^{2 \cdot (-0{,}3054)}} \approx 9{,}2095$.

2f)

(1) Die Länge der Pflanze nach 10 Wochen kann beschreiben werden durch die Summe aus Ausgangslänge und Längenzuwachs: Daher gilt für diese Länge: $v(t) = 3{,}8 \cdot 0{,}9^t$
$10 + \int_0^{10} v(t)\,dt = 10 + \left[3{,}8 \cdot \frac{1}{\ln(0{,}9)} \cdot 0{,}9^t\right]_0^{10} = 10 + \frac{3{,}8}{\ln(0{,}9)} \cdot 0{,}9^{10} - \frac{3{,}8}{\ln(0{,}9)} \approx 33{,}5$ [cm]

(2) $\frac{1}{10-0} \cdot \int_0^{10} v(t)\,dt \approx 2{,}35$ [cm pro Woche]

(3) $3{,}8 \cdot 0{,}9^t = 1{,}9 \Leftrightarrow 0{,}9^t = 0{,}5 \Leftrightarrow t = \log_{0{,}9}(0{,}5) \approx 6{,}58$. Nach ca. 6,5 Wochen hat sich die Wachstumsgeschwindigkeit auf die Hälfte halbiert.

(4) $\int_0^t v(x)\,dx$: Längenzuwachs nach t Wochen.

3a)

(1) Der Parameter c ist positiv, da der y-Achsenabschnitt oberhalb der x-Achse liegt. Der Parameter k ist ebenso negativ, da der Graf von f monoton fallend ist.

(2) Graf I wird an der x-Achse gespiegelt (Graf II) und dann in positive y-Richtung (Graf III) verschoben.

(3) Die Gleichung von Graf III lautet $h(x) = -c \cdot e^{k \cdot x} + d(c, d > 0; k < 0)$. Er entsteht durch:
$f(x) = c \cdot e^{k \cdot x} \xrightarrow[\text{Spiegelung an der x-Achse}]{} g(x) = -c \cdot e^{k \cdot x} \xrightarrow[\text{Verschiebung um d nach oben}]{} h(x) = -c \cdot e^{k \cdot x} + d$

3b)

(1)

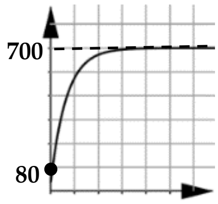
t in Jahren	Verfahren 1 („Zunahme der ökologisch genutzten Fläche")
0	80
1	$80 + (700 - 80) \cdot 0{,}1 = 142$
2	$142 + (700 - 142) \cdot 0{,}1 = 197{,}8$
3	$197{,}8 + (700 - 197{,}8) \cdot 0{,}1 = 248{,}02$
4	$248{,}02 + (700 - 248{,}02) \cdot 0{,}1 = 293{,}218$
5	$293{,}218 + (700 - 293{,}218) \cdot 0{,}1 = 333{,}8962$
t	Biologisch genutzte Fläche nach $t - 1$ Jahren + nicht biologisch genutzte Fläche nach $t - 1$ Jahren $\cdot$ biologische Nutzungsrate

Für dieses Verfahren ist eine Herleitung der expliziten Formel für B(t) eher ungeeignet und bedarf einiger „scharfer" Blicke, der mehrfachen Anwendung des Distributivgesetzes und eines Rechentricks.[26]

Einfacher geht es für die Herleitung einer expliziten Formel mit einem zweiten Verfahren:

t in Jahren	Verfahren 2 („Abnahme der biologisch ungenutzten Fläche")
0	$700 - (700 - 80) = 80$
1	$700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9 = 142$
2	$700 - (700 - 142) \cdot 0{,}9 = 700 - \big(700 - (700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9)\big) \cdot 0{,}9$ $= 700 - (700 - 700 + (700 - 80) \cdot 0{,}9) \cdot 0{,}9 = 700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9$ $= 700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9^2 = 197{,}8$
3	$700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9^3 = 248{,}02$
4	$700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9^4 = 293{,}218$
5	$700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9^5 = 333{,}8962$
t	Gesamtfläche − biologisch genutzte Fläche $\cdot$ konventionelle Nutzungsrate$^{\text{Jahre}}$
	$700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9^t$
	Sättigungsgrenze−Sättigungsmanko zu Beginn $\cdot$ konventionelle Nutzungsrate$^{\text{Jahre}}$

[26] $B_0 = 80 = 700 - (700 - 80)$
$B_1 = 700 - (700 - 80) + (700 - 80) \cdot 0{,}1 = 700 - \big((700 - 80) \cdot 1 - (700 - 80) \cdot 0{,}1\big)$
$= 700 - (700 - 80) \cdot (1 - 0{,}1) = 700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9 = 700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9^1$
$B_2 = 700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9^1 + \big(700 - (700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9^1)\big) \cdot 0{,}1$
$= 700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9^1 + (700 - 700 + (700 - 80) \cdot 0{,}9^1) \cdot 0{,}1$
$= 700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9^1 + (700 - 80) \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1 = 700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9^1 \cdot (1 - 0{,}1)$
$= 700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9^2$
$B_3 = 700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9^2 + \big(700 - (700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9^2)\big) \cdot 0{,}1$
$700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9^2 + (700 - 80) \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 = 700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9 \cdot (1 - 0{,}1)$
$= 700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9^3$
Also: $B_t = 700 - (700 - 80) \cdot 0{,}9^t$

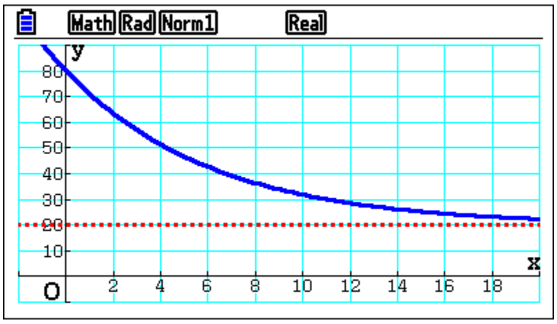


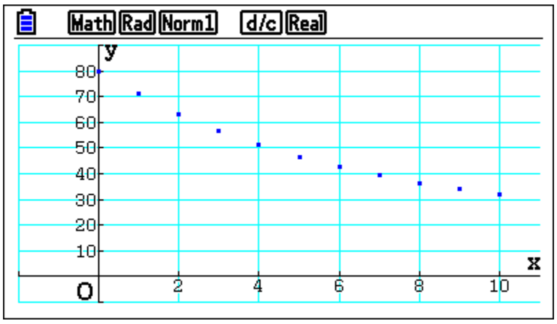
(2) Es handelt sich um ein beschränktes Wachstum mit der oberen Schranke von 700 und einem Startwert von 80. Die Differenz von Gesamtfläche und biologisch genutzter Fläche wird immer kleiner und ist proportional zur Wachstumsgeschwindigkeit, mit der sich die ökologisch genutzte Fläche ändert.

(3) Die ökologisch genutzte Fläche B(t) nach t Jahren lässt sich durch die Gesamtfläche minus die ökologisch ungenutzte Fläche nach t Jahren berechnen. Also gilt: $B(t) = 700 - 620 \cdot 0{,}9^t = 700 - 620 \cdot e^{-kt} \Leftrightarrow 0{,}9 = e^{-k} \Leftrightarrow k = -\ln(0{,}9) \approx 0{,}1054$. $B(t) = 700 - (700 - 80) \cdot e^{-0{,}1054t} = 700 - 620 \cdot e^{-0{,}1054t}$. Die Sättigungsgrenze S beträgt 700, der Anfangswert B(0) ist 80. Insgesamt handelt sich um ein nach oben beschränktes Wachstum. Der Graph ist monoton steigend, rechtsgekrümmt, das Sättigungsmanko (hier die nicht ökologisch genutzte Fläche S – B(t)) nimmt mit der Zeit ab und ist proportional (mit dem Faktor k) zur momentanen Änderungsrate B´(t) der ökologisch genutzten Fläche.

3c)

(1)





(2)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B(t)	80	71	63,4	56,8	51,3	46,6	42,6	39,2	36,3	33,9	31,8
B´(t)	-9,8	-8,3	-7,1	-6	-5,1	-4,3	-3,7	-3,1	-2,7	-2,3	-1,9
20 – B(t)	-60	-51	-43,4	-36,8	-31,3	-26,6	-22,6	-19,2	-16,3	-13,9	-11,8
k = B´(t):D(t)	**0,1633**	**0,1627**	**0,1636**	**0,1630**	**0,1629**	**0,1617**	**0,1637**	**0,1615**	**0,1656**	**0,1655**	**0,1610**

Bei der Temperaturabkühlung handelt es sich um ein nach unten beschränktes Wachstum. Der Graph ist streng monoton fallend, linksgekrümmt und nähert sich der Raumtemperatur von 20 Grad Celsius an. Die Sättigungsgrenze S ist die Raumtemperatur von 20 Grad Celsius. B(0) beschreibt die Anfangstemperatur des Kaffes und beträgt 80 Grad Celsius. Die Proportionalitätskonstante k aus Abkühlgeschwindigkeit B´(t) und D(t) beträgt im Mittel ca. k = 0,1631

(3) Die Temperatur B(t) des Kaffees nach t Minuten ist gleich der Raumtemperatur plus die Temperaturdifferenz aus aktueller Kaffeetemperatur und Raumtemperatur. Also gilt für die Funktion B: $B(t) = 20 + 60 \cdot e^{-kt} = 20 + 60 \cdot e^{-0{,}1631t}$.

(4) $B(20) = 20 + 60 \cdot e^{-0{,}1631 \cdot 20} \approx 22{,}3$. Nach 20 Minuten hat der Kaffee eine Temperatur von ca. 22 Grad Celsius. B(t) = 40 gilt wenn $40 = 20 + 60 \cdot e^{-0{,}1631 \cdot t} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = e^{-0{,}1631 \cdot t} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-0{,}1631} \approx 6{,}73$. Nach etwa sieben Minuten erreicht der Kaffee eine Temperatur von 40 Grad Celsius.

(5) Gesucht ist der Wachstumsfaktor a. Es gilt $a = e^{-k} = e^{-0{,}1631} \approx 0{,}8495$. Man könnte daher auch $B(t) = 20 + 60 \cdot 0{,}8495^t$ schreiben. Pro Minute nimmt die Kaffeetemperatur mit ca. 15 % der noch vorhandenen Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur ab.

3d)

$B(t) = 1000 - 900 \cdot 0{,}85^t = 1000 - 900 \cdot e^{-kt} \Leftrightarrow 0{,}85 = e^{-k} \Leftrightarrow k = -\ln(0{,}85) \approx 0{,}1625$.

3e)

$B(t) = 3 - 2{,}5 \cdot 0{,}88^t = 3 - 2{,}5 \cdot e^{-kt} \Leftrightarrow 0{,}88 = e^{-k} \Leftrightarrow k = -\ln(0{,}88) \approx 0{,}1278.$

3f)

$B(t) = 5000 - 4800 \cdot 0{,}95^t = 5000 - 4800 \cdot e^{-kt} \Leftrightarrow 0{,}95 = e^{-k} \Leftrightarrow k = -\ln(0{,}95) \approx 0{,}0513.$

$4500 = 5000 - 4800 \cdot e^{-0{,}0513 \cdot t} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{5}{48}\right)}{-0{,}0513} \approx 44{,}09$ Monate

3g)

$B(t) = 36{,}8 + 3{,}2 \cdot 0{,}2^t = 36{,}8 + 3{,}2 \cdot e^{-kt} \Leftrightarrow 0{,}2 = e^{-k} \Leftrightarrow k = -\ln(0{,}2) \approx 1{,}6094$

3h)

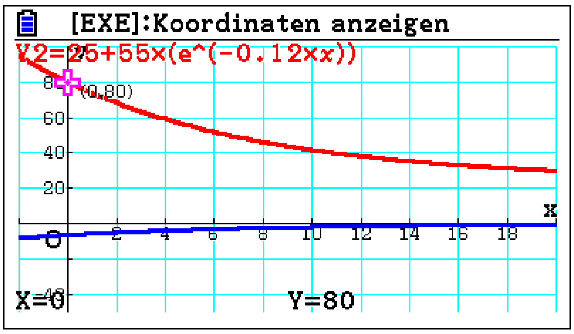
(1) Eine Stammfunktion v lautet $v(t) = -6{,}6 \cdot \frac{1}{-0{,}12} \cdot e^{-0{,}12t} = 55 \cdot e^{-0{,}12t}$.

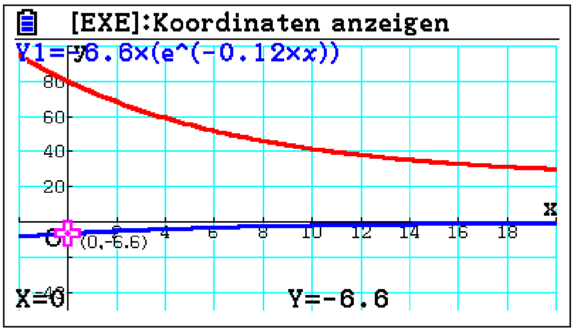
(2) $\int_0^{10} v(t)\,dt = \left[55 \cdot e^{-0{,}12t}\right]_0^{10} = 55e^{-1{,}2} - 55 \approx -38{,}43$ [°C] beschreibt die Temperaturabnahme des Tees nach 10 Minuten. Der Tee hat nach 10 Minuten eine Temperatur von 41,57 °C. Durch $\frac{1}{10-0}\int_0^{10} v(t)\,dt = \frac{1}{10} \cdot \left[55 \cdot e^{-0{,}12t}\right]_0^{10} \approx -3{,}84$ [°C pro Minute] wird die mittlere Abkühlgeschwindigkeit in den ersten 10 Minuten bestimmt.

(3) Die Funktion f kann konstruiert werden durch die Summe der Ausgangstemperatur und der Temperaturabnahme. Daher gilt $f(t) = 80 + \int_0^t v(x)\,dx = 80 + \left[55 \cdot e^{-0{,}12x}\right]_0^t = 80 + 55 \cdot e^{-0{,}12t} - 55$ $= 25 + 55 \cdot e^{-0{,}12t} = 25 - (25 - 80) \cdot e^{-0{,}12t}$.

(4) $f(t) = 40 \Leftrightarrow 25 + 55 \cdot e^{-0{,}12t} = 40 \Leftrightarrow 55 \cdot e^{-0{,}12t} = 15 \Leftrightarrow e^{-0{,}12t} = \frac{3}{11} \Leftrightarrow -0{,}12t = \ln\left(\frac{3}{11}\right)$ $\Leftrightarrow t = \frac{1}{-0{,}12} \cdot \ln\left(\frac{3}{11}\right) \approx 10{,}83$ [°C]. Nach knapp 11 Minuten hat der Tee eine Temperatur von 40 °C erreicht.

(5)





3i)

(1) Es gilt z. B. für B: $B(t) = 10 \cdot e^{-0{,}3238 \cdot t} = 0 - (0 - 10) \cdot e^{-0{,}3238 \cdot t} \Rightarrow S = 0; B(0) = 10; k = 0{,}3238$

	B(0)	S	k	$a = e^{-k}$
$B(t) = 10 \cdot e^{-0{,}3238 \cdot t}$	10	0	0,3238	0,7233
$C(t) = 9{,}2095 \cdot e^{-0{,}3054 \cdot t}$	9,2095	0	0,3054	0,7368

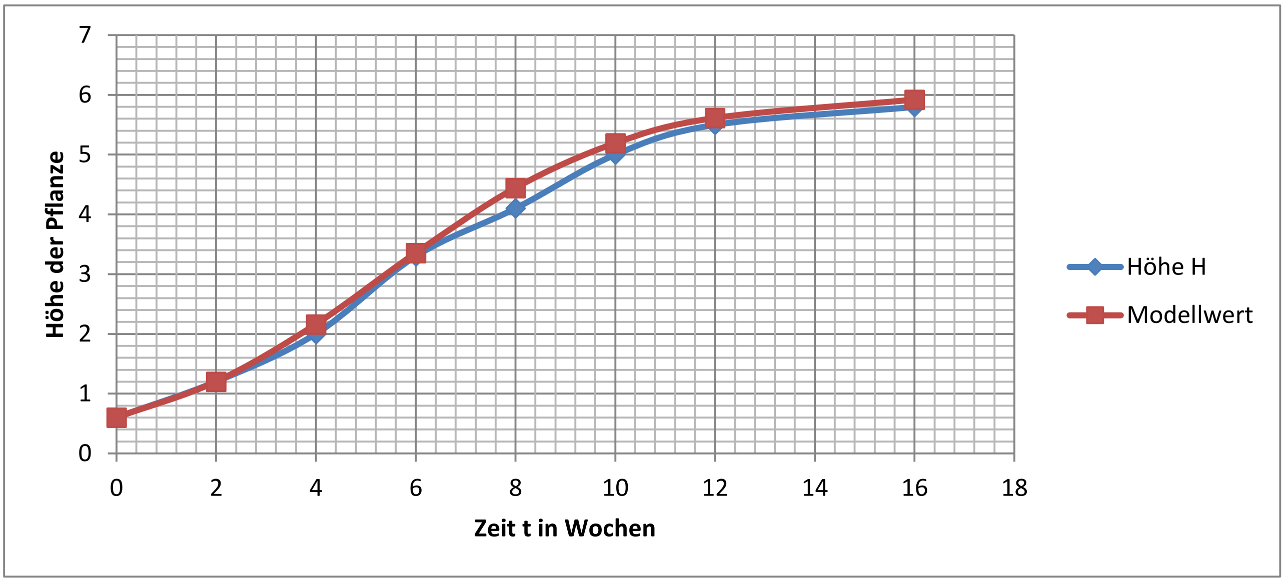
(2) Allgemein gilt für S = 0 und positives k beim exponentiellen Wachstum (exponentielle Abnahme): $B(t) = B(0) \cdot e^{-kt} = 0 - (0 - B(0)) \cdot e^{kt}$. Daher ist das exponentielle Wachstum für negative k ein nach unten durch S = 0 beschränktes Wachstum (B(0) > 0) oder ein nach oben durch beschränktes exponentielles Wachstum (B(0) < 0) (vgl. Grafen I und II aus Aufgabenteil a)).

4a)

Obere Figur: Farmer mit den Informationen aus Fachzeitschriften und Massenmedien. Untere Figur: Farmer mit Informationen überwiegend durch „Mund-zu-Mund"-Propaganda. Begründung (stark vereinfachtes Modell): Bei den Farmern („Mund-zu-Mund“-Propaganda) ist die Verbreitung der Information auf Kontakte untereinander angewiesen. Damit findet die Verbreitung anfangs in etwa exponentiell statt. Später findet eine Sättigung statt. Bei den Farmern aus der oberen Darstellung ist die Verbreitung bei guter Werbung bereits im Anfangsstadium stark; der Anstieg der Verbreitung lässt dann mit der Zeit immer mehr nach, da durch Werbung und Information immer weniger zusätzlich überzeugt werden können.

b)

(1)



(2)

Durch den Ansatz $B(t) = \frac{B(0)\cdot S}{B(0)+(S-B(0))\cdot e^{-k\cdot S\cdot t}}$ ergibt sich mit S = 6 und B(0) = 0,6 für die Höhe der Pflanze die Funktionsgleichung $B(t) = \frac{3,6}{0,6+5,4\cdot e^{-6k\cdot t}}$.

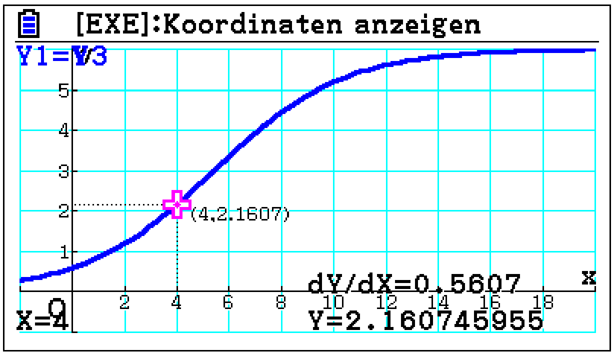
(3) Setzt man den Messwert für t = 2 in die Funktionsgleichung ein erhält man mit B(2) = 1,2: $\frac{3,6}{0,6+5,4\cdot e^{-12k}} = 1,2$. Diese Gleichung muss nach k aufgelöst werden (zunächst beide Seiten mit dem Nenner $0,6 + 5,4 \cdot e^{-12k}$ multiplizieren). Daher ergibt sich $k = -\frac{1}{12}\ln\left(\frac{4}{9}\right) \approx 0,0676$. Damit gilt für die Höhe B(t): $B(t) = \frac{3,6}{0,6+5,4\cdot e^{-0,4056\cdot t}}$.

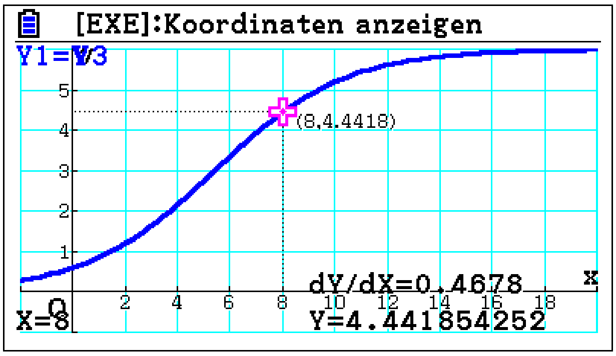
(4) In der obigen Abbildung sind die Messwerte und die Modellwerte eingezeichnet.

(5) Höhe nach 18 Wochen: $B(18) = \frac{3,6}{0,6+5,4\cdot e^{-0,4056\cdot 18}} \approx 5,96$ m.

(6) Für die Wachstumsgeschwindigkeit B´(t) gilt die DGL $B'(t) = k \cdot B(t) \cdot (S - B(t))$ (es kann B(t) auch abgeleitet werden, dies ist aber aufwändig). Durch Einsetzen der Werte für S und k erhält man $B'(t) = 0,0676 \cdot B(t) \cdot (6 - B(t))$. Nun müssen die Werte B´(4) und B´(8) verglichen werden. Es gilt für die Wachstumsgeschwindigkeit nach 4 Wochen: $B'(4) = 0,0676 \cdot B(4) \cdot (6 - B(4)) = 0,0676 \cdot 2,16 \cdot (6 - 2,16) \approx 0,5607$ Meter pro Woche. Für die Wachstumsgeschwindigkeit nach acht Wochen rechnet man analog mithilfe der DGL zum logistischen Wachstum: $B'(8) = 0,0676 \cdot B(8) \cdot (6 - B(8)) = 0,0676 \cdot 4,44 \cdot (6 - 4,44) \approx 0,4682$ Meter pro Woche. Damit ist die Wachstumsgeschwindigkeit nach 4 Wochen höher als nach 8 Wochen.

Untersuchung mit dem GTR z. B. über Menu 5:





c)

(1) Anfangs wird sich die Krankheit sehr schnell (angenähert exponentiell) ausbreiten. Später erfolgt eine Verlangsamung (Sättigung) der Ausbreitung, bis alle Stammesbewohner krank sind bzw. waren.

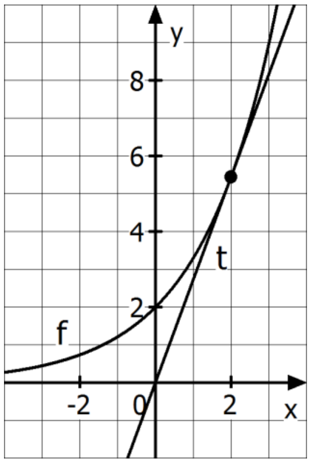
(2) Mit dem Ansatz $B(t) = \frac{B(0)\cdot S}{B(0)+(S-B(0))\cdot e^{-k\cdot S\cdot t}}$ und $B(0) = 1$, $S = 5000$ erhält man zunächst für die Funktion B: $B(t) = \frac{5000}{1+4999\cdot e^{-5000k\cdot t}}$. Durch die zusätzliche Bedingung $B(4) = 300$ lässt sich der Parameter k berechnen: $\frac{5000}{1+4999\cdot e^{-20000k}} = 300 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow k = -\frac{1}{20000}\ln\left(\frac{47}{14997}\right) \approx 0{,}0002883$. Daher gilt insgesamt für B: $B(t) = \frac{5000}{1+4999\cdot e^{-1{,}4414\cdot t}}$.

(3) Mit dem Ansatz $B(t) = 2500$ ergibt sich: $\frac{5000}{1+4999\cdot e^{-1{,}4414\cdot t}} = 2500 \Leftrightarrow 1 + 4999\cdot e^{-1{,}4414\cdot t} = 2 \Leftrightarrow e^{-1{,}4414\cdot t} = \frac{1}{4999} \Leftrightarrow t = \frac{1}{-1{,}4414}\ln\left(\frac{1}{4999}\right) \approx 5{,}91$. Nach ca. 6 Wochen ist der halbe Stamm infiziert. Ab diesem Zeitpunkt (das Schaubild hat an dieser Stelle einen Wendepunkt) sinkt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Krankheit - deshalb „Vitalitätsknick" genannt.

(4) Für die mittlere Zunahme an Erkrankten der ersten acht Wochen ergibt sich $\frac{B(8)-B(0)}{8} = \frac{4766{,}06-1}{8} \approx 595{,}6$ Erkrankte pro Woche.

7 Kontrollaufgaben

Hilfsmittelfrei:



1a)

Abbildung rechts

1b)

$f'(x) = 2 \cdot 0{,}5 \cdot e^{0{,}5x} = e^{0{,}5x}$;
$f'(2) = e = m_t \Rightarrow t(x) = e \cdot x + b$;
$t(2) = f(2) = 2e \Leftrightarrow e \cdot 2 + b = 2e \Rightarrow b = 0 \Rightarrow t(x) = e \cdot x$

1c)

$g(x) = -f(-x) = -2 \cdot e^{-0{,}5x}$

2a)

A gehört zu f_4, da $f_4(0) = 1{,}75$ ist. B gehört zu f_1 und f_6, da $f_1(1) = f_6(1) = 2$ und $f_1(x) = f_6(x)$. C gehört zu f_2, da f_2 als einzige Funktion ein unbeschränktes Wachstum beschreibt.

2b)

$$e^x \xrightarrow[\text{Streckung in x-Richtung mit dem Faktor 0,7}]{} e^{0{,}7x} \xrightarrow[\text{Spiegelung an der y-Achse}]{} e^{-0{,}7x}$$
$$\xrightarrow[\text{Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 4}]{} 4 \cdot e^{-0{,}7x} \xrightarrow[\text{Verschiebung um 5 in positive y-Richtung}]{} 5 + 4 \cdot e^{-0{,}7x}$$

2c)

(1) Werden alle Werte auf der y-Achse verdoppelt, wird der Graf von f in y-Richtung um den Faktor 2 gestreckt. Es gilt für die Funktion g des gestreckten Grafen $g(x) = 2 \cdot f(x)$. Analog bedeutet die Halbierung die Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 0,5: $g(x) = 0{,}5 \cdot f(x)$

(2) Werden alle Werte auf der x-Achse verdoppelt, wird der Graf von f in x-Richtung um den Faktor 0,5 gestreckt. Es gilt für die Funktion g des gestreckten Grafen $g(x) = f(0{,}5 \cdot x)$. Analog bedeutet die Halbierung die Streckung in x-Richtung mit dem Faktor: $g(x) = f(2 \cdot x)$.

2d)

$f_1(x) = 5 - 4 \cdot 0{,}75^x$	Faktor 2	Faktor 0,5
(1) Streckung in y-Richtung	Verdopplung der y-Achsenwerte	Halbierung der y-Achsenwerte
	$g_1(x) = 10 - 8 \cdot 0{,}75^x$	$h_1(x) = 2{,}5 - 2 \cdot 0{,}75^x$
(2) Streckung in x-Richtung	Halbierung der x-Achsenwerte	Verdopplung der x-Achsenwerte
	$u_1(x) = 5 - 4 \cdot 0{,}75^{2x}$	$v_1(x) = 5 - 4 \cdot 0{,}75^{0{,}5x}$

$f_2(x) = e^{\frac{1}{3}x}$	Faktor 2	Faktor 0,5
(1) Streckung in y-Richtung	Verdopplung der y-Achsenwerte	Halbierung der y-Achsenwerte
	$g_2(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{3}x}$	$h_2(x) = 0{,}5 \cdot e^{\frac{1}{3}x}$
(2) Streckung in x-Richtung	Halbierung der x-Achsenwerte	Verdopplung der x-Achsenwerte
	$u_2(x) = e^{\frac{2}{3}x}$	$v_2(x) = e^{\frac{1}{6}x}$

3a)

$e^{x+1} = 7 \Leftrightarrow x + 1 = \ln(7) \Leftrightarrow x = \ln(7) - 1$

$e^x = \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^x = e^{-1} \Leftrightarrow x = -1$
$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln(10) \Leftrightarrow [\ln(t)]_1^x = \ln(10) \Leftrightarrow \ln(x) - \ln(1) = \ln(10) \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(10) \Leftrightarrow x = 10$
$e^x + 7 = 0$ unlösbar, da $e^x + 7 > 7$
$\ln(x) = 6 \Leftrightarrow x = e^6$
$e^{2x} - 4e^x + 4 = 0 \underset{u=e^x}{\Longleftrightarrow} u^2 - 4u + 4 = 0 \Leftrightarrow (u-2)^2 = 0 \Leftrightarrow u = 2 \underset{u=e^x}{\Longleftrightarrow} e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$

3b)

$\int_0^{\ln(3)} e^x\,dx = [e^x]_0^{\ln(3)} = e^{\ln(3)} - e^0 = 3 - 1 = 2$
$\int_0^{\ln(3)} e^{2x}\,dx = [0{,}5 \cdot e^{2x}]_0^{\ln(3)} = 0{,}5 \cdot e^{2\cdot\ln(3)} - 0{,}5 = 0{,}5 \cdot e^{\ln(3^2)} - 0{,}5 = 4$
$\int_1^3 (e^x + x + 1)\,dx = \left[e^x + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^3 = e^3 + 4{,}5 + 3 - (e + 0{,}5 + 1) = e^3 - e + 6$
$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1$
$\int_1^e \left(\frac{2}{5x} + \sqrt{x}\right) dx = \left[\frac{2}{5}\ln(x) + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^e = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}e^{1{,}5} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}e^{1{,}5} - \frac{4}{15} \approx 2{,}72$
$\int_1^e \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = \left[-\frac{1}{x} - \ln(x)\right]_1^e = -\frac{1}{e} - 1 - (-1) = -\frac{1}{e} \approx -0{,}37$

4)

Aussage zu $v(t) = 2{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}1t})$	Wahr	Falsch	Begründung
Die Sinkgeschwindigkeit des Steins ist immer positiv.	■	□	$v(t) = 2{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}1t})$ $2{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}1t}) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-0{,}1t} > 0$ $\Leftrightarrow e^{-0{,}1t} < 1 \Leftrightarrow -0{,}1t < 0 \Leftrightarrow t > 0$
Die maximale Sinkgeschwindigkeit wird zu Beginn erreicht.	□	■	$v(t) = 2{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}1t}) = 2{,}5 - 2{,}5 \cdot e^{-0{,}1t}$ Es gilt $v(0) = 0$ und $v(t) > 0$ für $t > 0$
Der Stein erreicht den Boden des Sees niemals.	□	■	Dies kann anhand der Funktionsgleichung für v nicht abgelesene werden.
Die maximale Beschleunigung des Steins wird zu Beginn erreicht.	■	□	Die Beschleunigung ist bei $t = 0$ maximal, da der Graf zu $v'(t) = 0{,}25e^{-0{,}1t}$ der Graf einer fallenden Exponentialfunktion darstellt.
Man kann mithilfe eines Integrals berechnen, wie tief der Stein insgesamt gesunken ist.	■	□	$s(t) = \int_0^t v(x)dx = [2{,}5x + 25e^{-0{,}1x}]_0^t$ $= 2{,}5t + 25e^{-0{,}1t} - 25$ beschreibt die zurückgelegte Strecke des Steins im Zeitintervall $[0; t]$
Die Sinkgeschwindigkeit ist immer kleiner als 2,5 Meter pro Sekunden.	■	□	$v(t) = 2{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}1t}) = 2{,}5 - 2{,}5 \cdot e^{-0{,}1t}$ $2{,}5 - 2{,}5 \cdot e^{-0{,}1t} < 2{,}5 \Leftrightarrow e^{-0{,}1t} > 0$ Diese Gleichung ist für alle t erfüllt. Alternativ kann auch mit der Sättigungsgrenze beim beschränkten Wachstum argumentiert werden: $v(t) = 2{,}5 - 2{,}5e^{-0{,}1t} = 2{,}5 - (2{,}5 - 0)e^{-0{,}1t}$
Die Sinkgeschwindigkeit verdoppelt sich jeweils in 0,9 Sekunden.	□	■	Dies kann nicht sein, da dann ein exponentielles Wachstum vorliegen müsste. Die Funktionsgleichung v beschreibt ein beschränktes Wachstum.

5a)

$\sinh'(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$; $\sinh''(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$. Analog gilt für die Ableitungen von cosh: $\cosh'(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$; $\cosh''(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$. Daher gilt: $\sinh^{(1810)}(x) = \sinh(x)$; $\sinh^{(2013)}(x) = \cosh(x)$; $\cosh^{(1810)}(x) = \cosh(x)$; $\cosh^{(2013)}(x) = \sinh(x)$.

5b)

$\frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = e^x - e^{-x} \Leftrightarrow 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 0$. Daher gibt es keine Lösung der Gleichung, also keine Schnittpunkte der beiden Graphen.

5c)

$\sinh(-a) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-a} - e^{-(-a)}\right) = \frac{1}{2} \cdot (e^{-a} - e^{a}) = -\frac{1}{2} \cdot (e^{a} - e^{-a}) = -\sinh(a)$. Daher: Graph zu sinh ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

$\cosh(-a) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-a} + e^{-(-a)}\right) = \frac{1}{2} \cdot (e^{-a} + e^{a}) = \frac{1}{2} \cdot (e^{a} + e^{-a}) = \cosh(a)$. Daher ist der Graph zu cosh achsensymmetrisch zur y-Achse.

5d)

$$\cosh'(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \underset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$\cosh''(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) > 0$, da beide $e-$ Terme echt positiv sind: 0 ist lokale Minimumstelle von cosh und cosh ist überall linksgekrümmt.

Da $\cosh(0) = 1$ ist und der Graf linksgekrümmt ist, ist 0 auch globale Minimumstelle und 1 globales Minimum.

Alternativer Ansatz: $\frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) > 1 \underset{\cdot 2e^x}{\Leftrightarrow} e^{2x} + 1 > 2e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 > 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 > 0$ $\Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ und die Tatsache, dass f(0) = 1 ist, reichen zum Nachweis der Behauptung.

5e)

$$\sinh''(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \underset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$\sinh'''(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) > 0$: Daher ist 0 Rechts-Links-Wendestelle.

5f)

$\cosh(x) - \sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) = e^{-x}$

(1) $\int_0^1 (\cosh(x) - \sinh(x))\,dx = \int_0^1 e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^1 = -\frac{1}{e} + 1 \approx 0{,}63$

(2) $\int_0^R (\cosh(x) - \sinh(x))\,dx = \int_0^R e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^R = -e^{-R} + 1 \xrightarrow[R\to+\infty]{} 1$, da $e^{-R} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$.

5g)

Man erhält $\left[\frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})\right]^2 - \left[\frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})\right]^2 = \frac{1}{4} \cdot (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4} \cdot (e^{2x} - 2 + e^{-2x})$ $= \frac{1}{4} \cdot e^{2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{2x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot e^{-2x} = 1$, q. e. d.

Mit Hilfsmitteln:

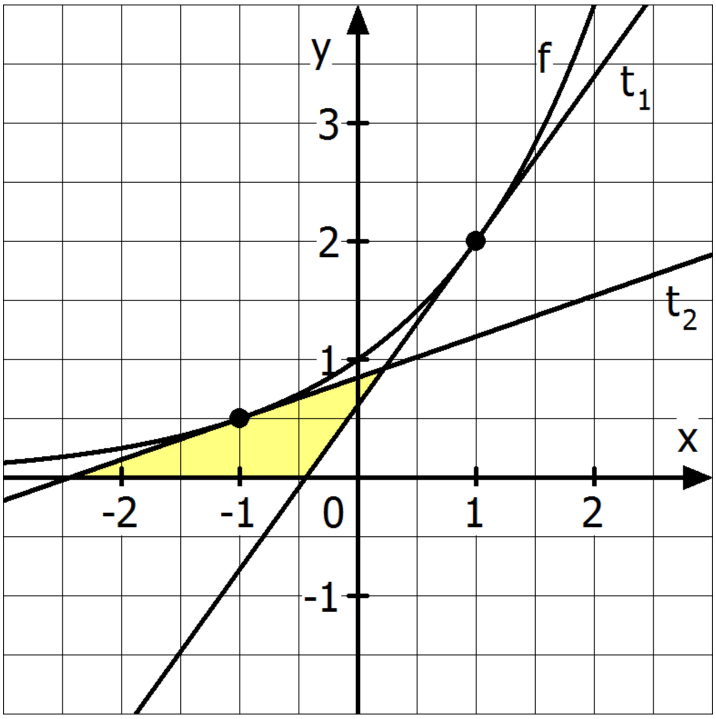
1a)

$f(x) = 2^x = e^{\ln(2)\cdot x}$

1b)

$f'(x) = \ln(2)\cdot e^{\ln(2)\cdot x}$;
$m_{t_1} = f'(1) = 2\cdot\ln(2) \Rightarrow t_1(x) = 2\cdot\ln(2)\cdot x + b$;
$t_1(1) = f(1) = 2 \Leftrightarrow 2\cdot\ln(2)\cdot 1 + b = 2 \Leftrightarrow b = 2 - 2\cdot\ln(2)$
$\Rightarrow t_1(x) = 2\cdot\ln(2)\cdot x + 2 - 2\cdot\ln(2) \approx 1{,}39x + 0{,}61$
$m_{t_2} = f'(-1) = 0{,}5\cdot\ln(2) \Rightarrow t_2(x) = 0{,}5\cdot\ln(2)\cdot x + b$;
$t_2(-1) = f(-1) = 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}5\cdot\ln(2)\cdot(-1) + b = 0{,}5 \Leftrightarrow b = 0{,}5 + 0{,}5\cdot\ln(2)$
$\Rightarrow t_2(x) = 0{,}5\cdot\ln(2)\cdot x + 0{,}5 + 0{,}5\cdot\ln(2) \approx 0{,}35x + 0{,}85$

1c)



1d)

(1) $\int_{-1}^{0} e^{\ln(2)\cdot x}\,dx = \left[\frac{1}{\ln(2)}\cdot e^{\ln(2)\cdot x}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{\ln(2)}\cdot e^{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)}\cdot e^{-\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{0{,}5}{\ln(2)} = \frac{0{,}5}{\ln(2)} \approx 0{,}72$

(2) $\int_{L}^{0} e^{\ln(2)\cdot x}\,dx = \left[\frac{1}{\ln(2)}\cdot e^{\ln(2)\cdot x}\right]_{L}^{0} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)}\cdot e^{\ln(2)\cdot L} \xrightarrow[L\to-\infty]{} \frac{1}{\ln(2)} \approx 1{,}44$, da $\lim\limits_{L\to-\infty} e^{\ln(2)\cdot L} = 0$

(3) Man bestimme die Nullstellen der Geraden sowie die Schnittstelle der beiden Geraden:
$t_1(x) = t_2(x) \Leftrightarrow 1{,}39x + 0{,}61 = 0{,}35x + 0{,}85 \Leftrightarrow 1{,}04x = 0{,}24 \Leftrightarrow x \approx 0{,}23 \Rightarrow y \approx 0{,}93$
Nullstelle von t_1: $1{,}39x + 0{,}61 = 0 \Leftrightarrow x \approx -0{,}44$
Nullstelle von t_2: $0{,}35x + 0{,}85 = 0 \Leftrightarrow x \approx -2{,}43$
Also gilt für den Flächeninhalt: $\frac{1}{2}\cdot(2{,}43 + 0{,}23)\cdot 0{,}93 - \frac{1}{2}\cdot(0{,}44 + 0{,}23)\cdot 0{,}93 \approx 0{,}93$

1e)

$g(x) = 2\cdot f(x) = 2\cdot 2^x = 2^{x+1} = f(x+1)$: Verschiebung des Grafen von f um 1 nach links = Streckung des Grafen von f um den Faktor 2 in y-Richtung

2a)

$f(1) = a \cdot e^b = 86{,}04$; $f(2) = a \cdot e^{2b} = 82{,}25$. $\frac{f(2)}{f(1)} : \frac{a \cdot e^{2b}}{a \cdot e^b} = \frac{82{,}25}{86{,}04} \Rightarrow e^b = \frac{82{,}25}{86{,}04} \Rightarrow b = \ln\left(\frac{82{,}25}{86{,}04}\right) \approx -0{,}045$

Also ergibt sich $a = \frac{86{,}04^2}{82{,}24} \approx 90$. Die Anfangstemperatur beträgt 90 °C.

2b)

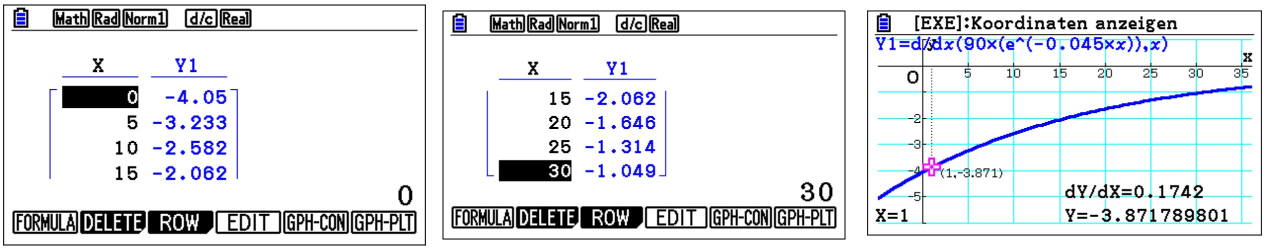
$f(10) = 90 \cdot e^{-0{,}045 \cdot 10} \approx 57{,}39$ °C. $f(t) = 90 \cdot e^{-0{,}045 \cdot t} = 45 \Leftrightarrow e^{-0{,}045 \cdot t} = 0{,}5 \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}5)}{-0{,}045} \approx 15{,}40$

Nach ca. 15,4 Minuten ist die Temperatur des Kaffees unter 45 °C gesunken.

2c)

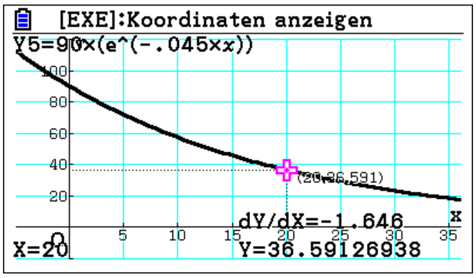
$f'(t) = 90 \cdot (-0{,}045) \cdot e^{-0{,}045 \cdot t} = -4{,}05 \cdot e^{-0{,}045 \cdot t}$; momentane Abkühlgeschwindigkeit des Kaffees;

2d)



2e)

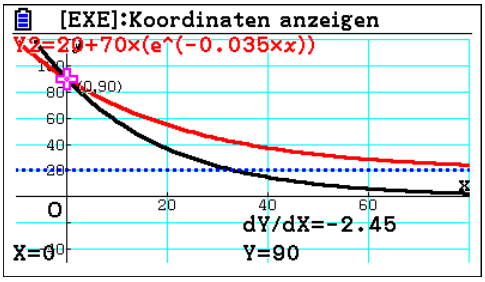
Die Temperatur des Kaffees würde dann nach ca. 36 Minuten unter die Raumtemperatur von 20 °C sinken (vgl. Graf von f).



2f)

(1) Ein möglicher Graf g muss nach unten durch S = 20 beschränkt sein. Mit einer Starttemperatur von g(0) = 90, der Raumtemperatur (Sättigungsgrenze) S = 20 und der Temperaturdifferenz von Raum- und Starttemperatur (Sättigungsmanko zu Beginn) S – g(0) = -70, erhält man die folgende Funktionsgleichung mit k > 0 für g:

$g(t) = S - \left(S - g(0)\right) \cdot e^{-k \cdot t} = c - d \cdot e^{-k \cdot t} = 20 + 70 \cdot e^{-k \cdot t}$.



(2) Der Parameter c = 20 beschreibt also die Sättigungsgrenze (Raumtemperatur), d = -70 das Sättigungsmanko (Temperaturdifferenz von Raumtemperatur und Kaffeetemperatur zu Beginn). Der Parameter k als Proportionalitätskonstante aus Abkühlgeschwindigkeit und Temperaturdifferenz von Raumtemperatur und aktueller Kaffeetemperatur (Sättigungsmanko) muss kleiner als 0,045 sein, da der Kaffee bei Raumtemperatur langsamer abkühlt als bei 0 °C.

3a)

$h(t) = 0{,}2 \cdot e^{0{,}1 \cdot t - 0{,}9} = 0{,}50 \Leftrightarrow e^{0{,}1 \cdot t - 0{,}9} = 2{,}50 \Leftrightarrow t = 10 \cdot \ln(2{,}5) + 9 \approx 18{,}16$ m. Nach 18 Tagen und fast 5 Stunden ist die Pflanze 50 cm hoch.

3b)

$h(t) = 0{,}2 \cdot e^{0{,}1 \cdot t - 0{,}9} = 0{,}2 \cdot e^{0{,}1 \cdot t} \cdot e^{-0{,}9} = 0{,}2 \cdot e^{-0{,}9} \cdot e^{0{,}1 \cdot t} \approx 0{,}08 \cdot e^{0{,}1 \cdot t}$. Damit ist c ungefähr 0,08 und k = 0,1.

3c)

Dabei gibt c die Anfangshöhe an und k ist die Proportionalitätskonstante aus Wachstumsgeschwindigkeit und Höhe des Strauches. Für den Wachstumsfaktor a gilt $a = e^{0{,}1} \approx 1{,}1051$.

3d)

Es gilt für die erste und zweite Ableitung von h (für alle t des Definitionsbereiches):
$h'(t) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot e^{0{,}1 \cdot t - 0{,}9} = 0{,}02 \cdot e^{0{,}1 \cdot t - 0{,}9} > 0$; $h''(t) = 0{,}02 \cdot 0{,}1 \cdot e^{0{,}1 \cdot t - 0{,}9} = 0{,}002 \cdot e^{0{,}1 \cdot t - 0{,}9} > 0$.
Damit ist der Graph für den Definitionsbereich streng monoton wachsend ($h'(t) > 0$) und dort auch linksgekrümmt ($h''(t) > 0$).

3e)

Da der Graph im Bereich $0 \leq t \leq 20$ streng monoton wachsend und linksgekrümmt ist, nehmen die Steigungen in diesem Bereich ständig zu. Eine Wendestelle existiert nicht. Damit ist $h'(20)$ die größte Steigung des Graphen und sein Wert entspricht der größten Wachstumsgeschwindigkeit. Es gilt: $h'(20) = 0{,}02 \cdot e^{0{,}1 \cdot 20 - 0{,}9} \approx 0{,}06$ Meter pro Woche. Der Strauch wächst also am zwanzigsten Tag mit einer Geschwindigkeit von 6 cm pro Tag.

Da die Werte einer Exponentialfunktion beliebig groß werden, wenn der Exponent gegen unendlich strebt, würde der Strauch dementsprechend unendlich groß. Insofern kann die Funktion h nur für einen begrenzten Zeitraum als Modell bzw. zur Modellierung dienen.

3f)

(1) h_2 beschreibt die Wirkungsfunktion der Wachstumsgeschwindigkeit z. Man muss also die spezielle Stammfunktion zu z finden, für die $h_2(20) = 0{,}60$ gilt (Strauch ist nach 20 Wochen 0,6 Meter hoch). Für die Wirkungsfunktion h_2 gilt: $h_2(t) = \frac{0{,}02}{-0{,}1} \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1} + K = -0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1} + K$. Mit $h_2(20) = 0{,}60$ ergibt sich für die Konstante K: $-0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 20 + 3{,}1} + K = 0{,}60 \Rightarrow K = 0{,}60 + 0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 20 + 3{,}1} \approx 1{,}20$. Damit erhält man für die Wirkungsfunktion h_2: $h_2(t) \approx 1{,}2 - 0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1}$.

Alternativ hätte man auch mit der sogenannten Integralfunktion zum Ergebnis kommen können. Für die Höhe $h_2(t)$ nach t Tagen ($t > 20$) gilt nämlich:
$h_2(t) = 0{,}60 + \int_{20}^{t} z(x)dx = 0{,}60 + \int_{20}^{t} 0{,}02 \cdot e^{-0{,}1 \cdot x + 3{,}1}\, dx = 0{,}60 + [-0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot x + 3{,}1}]_{20}^{t}$
$= 0{,}60 + \left(-0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1} - (-0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 20 + 3{,}1})\right) = 0{,}60 + \left(-0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1} - (-0{,}60)\right)$
$= 1{,}2 - 0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1}$.

(2) Da der Term $-0{,}1 \cdot t + 3{,}1$ im Exponenten der Funktion mit steigendem t gegen minus unendlich strebt, nähert sich $e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1}$ Null an und insgesamt strebt $h_2(t)$ gegen 1,20 m. Der Strauch wird daher nicht höher als ca. 1,20 Meter. Mathematische Notation: $1{,}2 - 0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1{,}2$ oder $\lim\limits_{t \to +\infty} (1{,}2 - 0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1}) = 1{,}2$.

(3) Durch Umformung erhält man:
$h_2(t) = 1{,}2 - 0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1} = 1{,}2 - 0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} \cdot e^{3{,}1} = 1{,}2 - 0{,}2 \cdot e^{3{,}1} \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} \approx 1{,}2 - 4{,}4396 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$
$= 1{,}2 - [1{,}2 - (-3{,}2396)] \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} = S - \left(S - h_2(0)\right) \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} \Rightarrow S = 1{,}2; b = 4{,}4396; k = 0{,}1$.

(4) Die maximal mögliche Länge des Strauches (Sättigungsgrenze) S = 1,20 Meter. Die Differenz aus maximaler Länge von 1,2 m und der hypothetischen Strauchlänge des bei t = 0 beginnenden beschränkten Wachstums (= maximaler Längenzuwachs = Sättigungsmanko zum hypothetischen Startwert bei t = 0) ergibt sich durch b = S – $h_2(0)$ = 4,4396. Ein größeres b lässt den Strauch langsamer wachsen. Der Parameter k = 0,1 ist die Proportionalitätskonstante aus Wachstumsgeschwindigkeit und Differenz aus maximaler Strauchlänge und aktueller Strauchlänge (Sättigungsmanko). Je höher k ist, desto schneller wächst der Strauch zu Beginn an.

(5) $h_2'(20) = z(20) = 0{,}02 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 20 + 3{,}1} = 0{,}02 \cdot e^{1{,}1} = 0{,}02 \cdot e^{0{,}1 \cdot 20 - 0{,}9} = h'(20)$ Der Übergang ist knickfrei.

3g)

Mit dem Ansatz $f_1(t) = S - d \cdot e^{-kt}$ und S = 1,2 und $f_1(0)$ = 0,08 bzw. $f_1(20)$ = 0,6 können d und k auf zwei Weisen errechnet werden. Kennt man die Formel für beschränktes Wachstum, nämlich die Gleichung $f_1(t) = S - \left(S - f_1(0)\right) \cdot e^{-kt}$, weiß man, dass $d = S - f_1(0) = 1{,}2 - 0{,}08 = 1{,}12$. Anschließend nutzt man die zweite Bedingung zur Berechnung des Parameters k aus: $f_1(20)$ = 0,6 ergibt $1{,}2 - 1{,}12 \cdot e^{-20k} = 0{,}6 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow k = \frac{1}{-20} \cdot \ln\left(\frac{15}{28}\right) \approx 0{,}03121$. Der Funktionsterm lautet dann: $f_1(t) = 1{,}2 - 1{,}12 \cdot e^{-0{,}03121 \cdot t}$.

Alternativ hätte man zur Bestimmung von d die Bedingung $f_1(0)$ = 0,08 nutzen können und mit der Gleichung $1{,}2 - d \cdot e^{-20k \cdot 0} = 0{,}08$ folgt d = 1,12.

Der Parameter d beschreibt den maximalen Längenzuwachs nach dem Einsetzen des Strauches (= Sättigungsmanko bei t = 0).

3h)

Mit $f_2(0)$ = 0,08 und S = 1,2 erhält man mit der Formel für den logistischen Ansatz den Funktionsterm $f_2(t) = \frac{0{,}096}{0{,}08 + 1{,}12 \cdot e^{-1{,}2 \cdot k \cdot t}}$. Zur Berechnung des Parameters k hat man $f_2(20)$ = 0,6. $\frac{0{,}096}{0{,}08 + 1{,}12 \cdot e^{-1{,}2 \cdot k \cdot 20}} = 0{,}6$ führt zu $k = \frac{1}{-24} \cdot \ln\left(\frac{1}{14}\right) \approx 0{,}10$ und damit zur entsprechenden Funktionsgleichung $f_2(t) = \frac{0{,}096}{0{,}08 + 1{,}12 \cdot e^{-1{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot t}} = \frac{0{,}096}{0{,}08 + 1{,}12 \cdot e^{-0{,}132 \cdot t}}$.

Alternativer Ansatz (wenn man die Formel für das logistische Wachstum vergessen hat): Geht man umgekehrt vom Funktionsterm $f_2(t)$ aus, muss man für ein logistisches Wachstum zeigen, dass folgenden Gleichungen erfüllt sind: $f_2(20)$ = 0,6 und $f_2(0)$ = 0,08 und $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\frac{0{,}096}{0{,}08 + 1{,}12 \cdot e^{-0{,}132 \cdot t}}\right) = 1{,}2$.

3i)

Der Graph von f_1 verändert sein Krümmungsverhalten im gesamten Beobachtungszeitraum nicht. Inhaltlich bedeutet das konkret, dass das Pflanzenwachstum, das der Graph von f_1 beschreibt, über den gesamten Beobachtungszeitraum kleiner wird. Der Graph von f_2 verändert sein Krümmungsverhalten im Wendepunkt, der etwa bei t = 20 liegt. Bis zu diesem Zeitpunkt nimmt das Wachstum des Strauches beinahe exponentiell zu, erst nach dem 20. Tag wird ein sinkendes Pflanzenwachstum beschrieben. Das legt die Vermutung nahe, dass die Strauchhöhe h in Metern in Abhängigkeit von der Zeit in Tagen über den gesamten Beobachtungszeitraum eher durch ein Wachstumsmodell wie in f_2 beschrieben werden kann.

3k)

Zunächst muss eine neue (differenzierbare) Funktion d = h – f definiert werden, die die Differenz zwischen den beiden Funktionen angibt. Von dieser müssen dann durch Bestimmung der Nullstellen der ersten Ableitung mögliche lokale Extremstellen im Intervall [0; 20] berechnet werden. Durch Vergleich der Beträge der Funktionswerte an diesen Stellen mit den Beträgen der Randwerte $|d(0)|$ und $|d(20)|$ findet man die gesuchte größte Differenz.