Prüfung für Emmelie Ehlenbeck

Teil I

Der „Times“ hat Bedenken angemeldet, ob eine deutsche 1-€-Münze für den Münzwurf vor einem Fußballspiel geeignet ist. Die Redakteure warfen diese Münze 100-mal in die Luft. In einem zweiten Versuch ließen sie die Münze 100-mal auf einer ebenen Oberfläche rotieren. Ergebnis: Der Adler (Kopfseite) zeigte sich 60-mal bei 100 Luftwürfen und 54-mal beim 100-maligen Rotieren auf einer ebenen Oberfläche.

Bereite einen zehnminütigen Vortrag zu folgenden Aufgabenstellungen vor:

a) Wir gehen zunächst davon aus, dass der 1-€-Münzwurf fair ist.

Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 Würfen

(1) genau 50 Würfe auf der Kopfseite landen,
(2) mindestens 46 und höchstens 54 Würfe auf der Kopfseite landen,
(3) die Anzahl von Würfen, die auf der Kopfseite landen, um mindestens 10% vom Erwartungswert abweicht.

[2 + 3 + 4 = 9 Punkte]

b) Die Überprüfung der Bedenken der Redaktion der „Times“ soll mittels eines beidseitigen Hypothesentests mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchsten 5 % erfolgen.

(1) Beschreibe einen passenden Hypothesentest. Begründe die Wahl der Nullhypothese und ermittle den Ablehnungsbereich.
(2) Berechne den Fehler der ersten Art und gib seine Bedeutung im obigen Sachzusammenhang an.

[5 + 3 = 8 Punkte]

c) Beurteile, inwiefern den Bedenken der Redaktion der „Times“ zuzustimmen ist.

[3 Punkte]

Quellenangabe:

Aufgabenidee nach www.mued.de/mued-material/lager/abdm/ab-17-08.pdf (abgerufen am 15.06.2018)

Lösungsvorschlag:

a) Sei X: „Anzahl der Münzwürfe, die auf der Kopfseite landen" binomialverteilt mit $n = 100$ und der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$. Es gilt:

(1) $P(X = 50) \approx 7{,}96\%$ (AF I = 2P)
(2) $P(46 \leq X \leq 54) \approx 63{,}18\%$ (AF I = 3P)
(3) $\mu = 50;\ P(X \leq 45) + P(X \geq 55) = 1 - P(46 \leq X \leq 54) \approx 36{,}82\%$ (AF I = 4P)

b) **(Beidseitiger) Hypothesentest**

(1) Man möchte die **Nullhypothese** H_0: $p = 0{,}5$ („Kopf- und Zahlseite sind gleich häufig.") verwerfen und die **Alternativhypothese** H_A: $p < 0{,}5$ oder $p > 0{,}5$ („Die Kopfseite liegt beim Münzwurf seltener oder häufiger oben als die Zahlseite.") annehmen. **Begründung**: Man verwirft die Nullhypothese, falls die Anzahl der Münzwürfe mit der Kopfseite deutlich unter oder über dem Erwartungswert liegt. Dann kann davon ausgegangen werden, dass der Münzwurf unfair ist und die Kopfseite weniger häufig oder häufiger geworfen wird wie die Zahlseite. Unter Zuhilfenahme der Tabellenfunktion wird die kleinste Zahl x gesucht, so dass $P(X \leq x) = \text{BinomialCD}(0, x, 100, 0.5) \geq 0{,}025$ sowie die kleinste Zahl y mit $P(X \leq y) = \text{BinomialCD}(0, y, 100, 0.5) \geq 0{,}975$. Man erhält den Annahmebereich A = [40; 60] und **Verwerfungsbereich V = [0, 39] ∪ [61; 100]**, denn es gilt: $P(X \leq 39) \approx 1{,}76\%$, $P(X \leq 40) \approx 2{,}84\%$ und $P(X \leq 59) \approx 97{,}16\%$, $P(X \leq 60) \approx 98{,}28\%$. (AF II = 5P)

(2) **Fehler 1. Art:** $P(X \leq 39) + P(X \geq 61) = 1 - P(40 \leq X \leq 60) \approx 3{,}52\%$.
Bedeutung im Sachkontext: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 3,52% nimmt man irrtümlich an, dass die Kopfseite weniger häufig oder häufiger geworfen wird, obwohl der Münzwurf fair ist. (AF II = 3P)

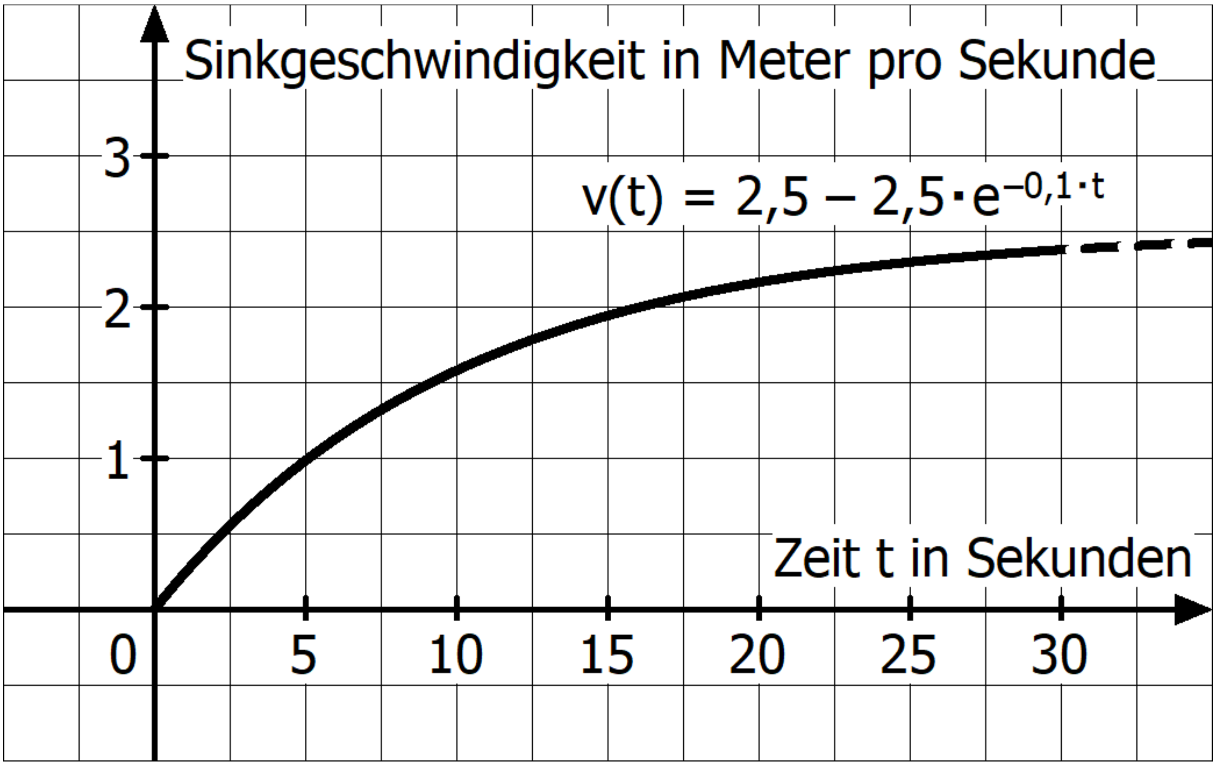
c) 60 und 54 liegen im Annahmebereich. Daher muss die Alternativhypothese verworfen und die Nullhypothese angenommen werden. Die Bedenken der Redaktion der „Times" wären damit nicht gerechtfertigt. Da die Entscheidung im Falle von 60-mal Kopfseite sehr knapp ist, sollten weitere Experimente mit größerem n durchgeführt werden. (AF III = 3P)

Darstellungsleistung: 5P (1 = 5P, 2 = 4P, 3 = 3P, 4 = 2P, 5 = 1P, 6 = 0P)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
25-21	20-17	16-13	12-10	9-5	< 5

Teil II

Ein Stein sinkt in einem See. Für seine Sinkgeschwindigkeit **v(t) in Meter pro Sekunde** gilt folgende Funktionsgleichung: $\mathbf{v(t) = 2{,}5 - 2{,}5 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}}$ **($0 \leq t \leq 30$)**. Dabei ist **t** die **Zeit in Sekunden,** die der Stein von der Wasseroberfläche (t = 0) bis zum Boden des Sees (t = 30) benötigt**.**



Dem Prüfling werden nacheinander fünf Aussagen vorgelegt.

Prüfe, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

(1) Die Geschwindigkeit des Steins ist nach 5 Sekunden exakt 1 Meter pro Sekunde.
(2) Die Sinkgeschwindigkeit des Steins ist immer positiv.
(3) Die Sinkgeschwindigkeit erreicht bei einem „unendlichen" tiefen See irgendwann 2,5 Meter pro Sekunde.
(4) Die maximale Beschleunigung des Steins wird zu Beginn erreicht.
(5) Man kann mithilfe eines Integrals berechnen, wie tief der See ist.

Im Folgenden sind mögliche Begründungen angegeben:

<table>
<tr><th>Aussage zu $v(t) = 2{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}1t})$</th><th>Wahr</th><th>Falsch</th><th>Mögliche Begründung</th></tr>
<tr><td>(1) Der Stein hat nach 5 Sekunden eine Sinkgeschwindigkeit von 1 Meter pro Sekunde. [AF I = 2 Punkte]</td><td>□</td><td>■</td><td>$v(5) = 2{,}5 - 2{,}5 \cdot e^{-0{,}5} \approx 0{,}98$</td></tr>
<tr><td>(2) Die Sinkgeschwindigkeit des Steins ist immer positiv. [AF I = 4 Punkte]</td><td>■</td><td>□</td><td>$v(t) = 2{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}1t})$
$2{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}1t}) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-0{,}1t} > 0$
$\Leftrightarrow e^{-0{,}1t} < 1 \Leftrightarrow -0{,}1t < 0 \Leftrightarrow t > 0$</td></tr>
<tr><td>(3) Die Sinkgeschwindigkeit erreicht bei einem „unendlichen" tiefen See irgendwann 2,5 Meter pro Sekunde. [AF II = 4 Punkte]</td><td>□</td><td>■</td><td>$v(t) = 2{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}1t})$
$= 2{,}5 - 2{,}5 \cdot e^{-0{,}1t} = 2{,}5 \Leftrightarrow e^{-0{,}1t} = 0$ (f)
Diese Gleichung ist für alle t erfüllt.
Alternativ kann auch mit der Sättigungsgrenze beim beschränkten Wachstum argumentiert werden:
$v(t) = 2{,}5 - 2{,}5e^{-0{,}1t}$
$= 2{,}5 - (2{,}5 - 0)e^{-0{,}1t}$</td></tr>
<tr><td>(4) Die maximale Beschleunigung des Steins wird zu Beginn erreicht. [AF II = 5 Punkte]</td><td>■</td><td>□</td><td>Die Beschleunigung ist bei $t = 0$ maximal, da der Graf zu $v'(t) = 0{,}25e^{-0{,}1t}$ der Graf einer fallenden Exponentialfunktion darstellt.</td></tr>
<tr><td>(5) Man kann mithilfe eines Integrals berechnen, wie tief der See ist. [AF II/III = 5 Punkte]</td><td>■</td><td>□</td><td>$s(t) = \int_0^{30} v(x)dx = [2{,}5x + 25e^{-0{,}1x}]_0^{30}$
$= 75 + 25e^{-0{,}1t} - 25 = 50 + 25e^{-3}$
$\approx 51{,}24$ [m] beschreibt die zurückgelegte Strecke des Steins im Zeitintervall [0; 30]</td></tr>
</table>

Darstellungsleistung: 5P (1 = 5P, 2 = 4P, 3 = 3P, 4 = 2P, 5 = 1P, 6 = 0P)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
25-21	20-17	16-13	12-10	9-5	< 5