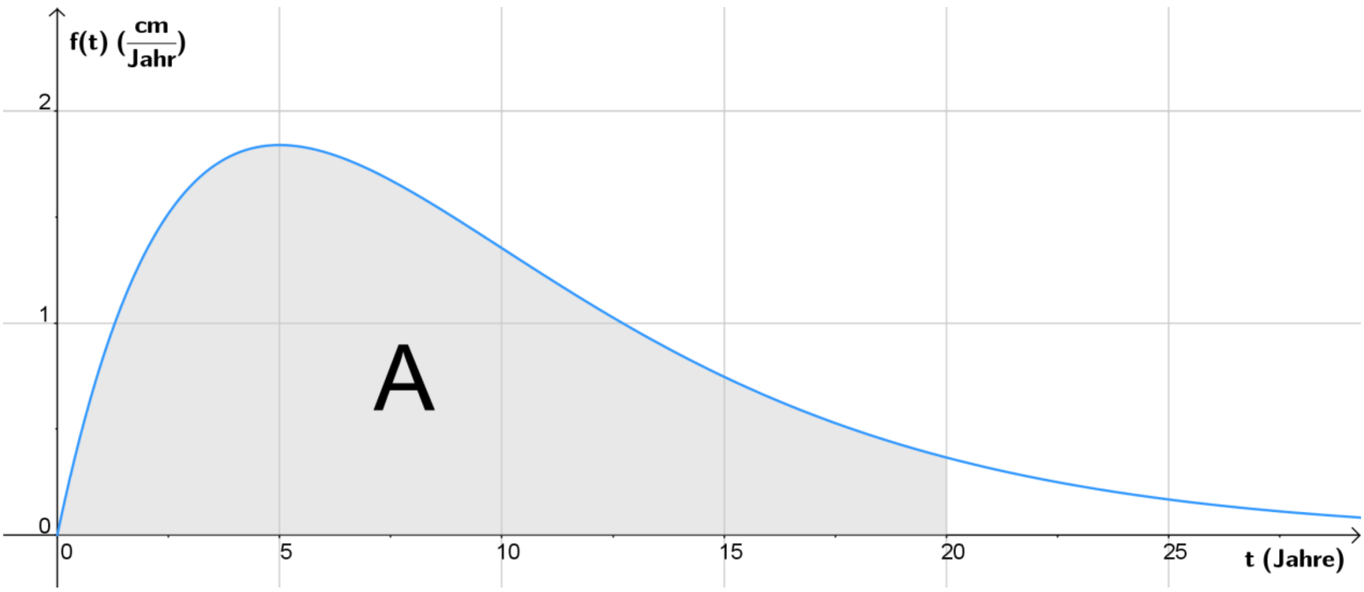
Block I: Mündliche Prüfung (Teil 1 – Folienvortrag)

Die Funktion f beschreibt die **momentane[1] Wachstumsgeschwindigkeit** einer tropischen Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit und kann durch die Funktionsgleichung

$$f(t) = t \cdot e^{-0,2 \cdot t}, t \geq 0$$

beschrieben werden. Dabei wird **t in Jahren** und **f(t) in cm pro Jahr** angegeben. Der Graph der Funktion f ist in der folgenden Abbildung dargestellt. In dieser Darstellung wurde zusätzlich die Fläche A markiert, die der Graph für $0 \leq t \leq 20$ mit der t-Achse einschließt.



a) **Beschreibe** den Verlauf des Graphen im Sachzusammenhang. (3P)

Im Aufgabenteil b) darf ohne Nachweis verwendet werden, dass $f''(t) = (0{,}04 \cdot t - 0{,}4) \cdot e^{-0,2 \cdot t}$.

b) **Bestimme** den Zeitpunkt, an dem die Wachstumsgeschwindigkeit ihr Maximum annimmt. [Hinweis: $f'(t) = (1 - 0{,}2 \cdot t) \cdot e^{-0,2 \cdot t}$] (7P)

c) **Markiere** den Wendepunkt im Graphen von f und **gib** die Bedeutung der Wendestelle im Sachzusammenhang **an**. (2P)

Für eine Stammfunktion F der Funktion f gilt $F(t) = (-25 - 25 \cdot t) \cdot e^{-0,2 \cdot t}$.

d) **Berechne** mithilfe der Stammfunktion F den Inhalt der Fläche A und **interpretiere** diesen Wert im oben dargestellten Sachkontext. (4P)

Zum Beobachtungsbeginn bei $t = 0$ hat die Pflanze eine Höhe von 5 cm. Die Funktion W wird für $x \geq 0$ durch die Funktionsgleichung $W(x) = 5 + \int_0^x f(t)dt$ beschrieben. Ohne Nachweis darf verwendet werden, dass $W(x) = (-25 - 25 \cdot x) \cdot e^{-0,2 \cdot x} + 30$.

e) **Begründe,** dass die Funktion W die Länge der Pflanze nach x Jahren beschreibt und **untersuche,** wie lang die Pflanze langfristig werden kann. (4P)

[1] Im Folgenden wird zur besseren Lesbarkeit nur der Begriff **Wachstumsgeschwindigkeit** verwendet; darunter ist stets die **momentane Wachstumsgeschwindigkeit** zu verstehen.

Block I: Mündliche Prüfung (Teil 1 – Folienvortrag) – Lösungen

a) **Beschreibe** den Verlauf des Graphen von f mit $\mathbf{f(t) = t \cdot e^{-0,2 \cdot t}}$ im Sachzusammenhang. (3P)

Drei der vier Aspekte sollten genannt werden:

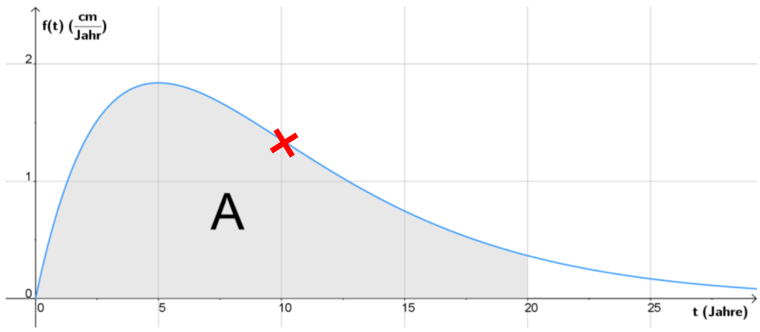
- Die Wachstumsgeschwindigkeit zu Beginn ist Null.
- Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit wird mit ca. 1,8 $\frac{\text{cm}}{\text{Jahr}}$ nach 5 Jahren erreicht.
- Die Abnahme der Wachstumsgeschwindigkeit ist nach 10 Jahren am größten.
- Die Wachstumsgeschwindigkeit nähert sich langfristig Null an.

b) **Bestimme** den Zeitpunkt, an dem die Wachstumsgeschwindigkeit ihr Maximum annimmt. (7P)

- $f'(t) = (1 - 0{,}2 \cdot t) \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}$ (3P)
- $f'(t) = (1 - 0{,}2 \cdot t) \cdot e^{-0{,}2 \cdot t} = 0 \Leftrightarrow 1 - 0{,}2 \cdot t = 0 \Leftrightarrow t = 5$ (2P)
- $f''(5) = (0{,}04 \cdot 4 - 0{,}4) \cdot e^{-0{,}2 \cdot 4} = -0{,}24 \cdot e^{-8} < 0$ (1P)
- $f'(t) < 0$ für $t > 5$ (oder vergleichbares Argument). (1P)

c) **Markiere** den Wendepunkt im Graphen von f und **gib** die Bedeutung der Wendestelle im Sachzusammenhang **an**. (2P)

- Markierung siehe unten. (1P)
- Die Abnahme der Wachstumsgeschwindigkeit ist nach 10 Jahren am größten. (1P)



d) **Berechne** mithilfe der Stammfunktion F den Inhalt der Fläche A und **interpretiere** diesen Wert im oben dargestellten Sachkontext. (4P)

- $A = F(20) - F(0) = (-25 - 25 \cdot 20) \cdot e^{-0{,}2 \cdot 20} + 25 = 25 - 525e^{-4} \approx 15{,}38$ (3P)
- Der Längenzuwachs beträgt nach 20 Jahren ca. 15,38 cm. (1P)

e) **Begründe,** dass die Funktion W die Länge der Pflanze nach x Jahren beschreibt und **untersuche,** wie lang die Pflanze langfristig werden kann. (4P)

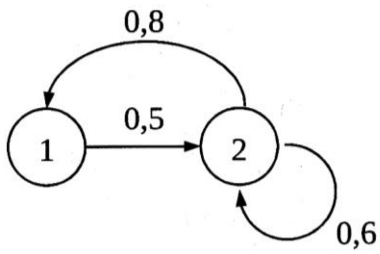
- $W(x) = 5 + \int_0^x f(t)dt$ = Ausgangslänge + Längenzuwachs nach x Jahren. (2P)
- Die Pflanze wird langfristig 30 cm lang werden, da $(-25 - 25 \cdot x) \cdot e^{-0{,}2 \cdot x}$ für $x \to +\infty$ gegen Null strebt. (2P)

Darstellungsleistung: 5P (1 = 5P, 2 = 4P, 3 = 3P, 4 = 2P, 5 = 1P, 6 = 0P)

1	2	3	4	5	6
25-21	20-17	16-13	12-10	9-5	< 5

Block I: Mündliche Prüfung (Teil 2 – Gespräch)

Die jährliche Entwicklung der Population einer Vogelart bestehend aus Jung- (1) und Altvögeln (2) ist durch den folgenden Übergangsgraphen gegeben:



a) **Gib** zu dem Übergangsgraphen eine Übergangsmatrix U **an**. (4P)

- $U = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

b) **Beschreibe** anhand des Übergangsgraphen, nach welchen Modellannahmen die Entwicklung der Population dieser Vogelart abläuft. (3P)

- Die jährliche Überlebensrate der Jungvögel beträgt 50 %.
- Die jährliche Geburtenrate beträgt 80 %, d. h., jeder Altvogel bekommt 0,8 Junge pro Jahr.
- Die jährliche Überlebensrate der Altvögel beträgt 60 %.

Die Population besteht zu Beobachtungsbeginn aus 80 Jungvögeln und 110 Altvögeln.

c) **Berechne** den Bestandsvektor nach einem Jahr sowie den Bestandsvektor des Vorjahres. (6P)

- $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 88 \\ 106 \end{pmatrix}$ (3P)
- $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 110 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ (3P)

d) **Bestimme**, wie viel % der Jungvögel mindestens 3 Jahre alt werden. (3P)

- $p = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}18 = 18\ \%$

Um die Population konstant zu halten, soll der Ausgangsbestand an Altvögeln durch Tötung so verändert werden, dass er sich innerhalb eines Jahres nicht mehr ändert. Die Anzahl an Jungvögeln bleibt unverändert.

e) **Untersuche**, wie viele Altvögel getötet werden müssen, damit der Bestandsvektor von Jahr zu Jahr unverändert bleibt. (4P)

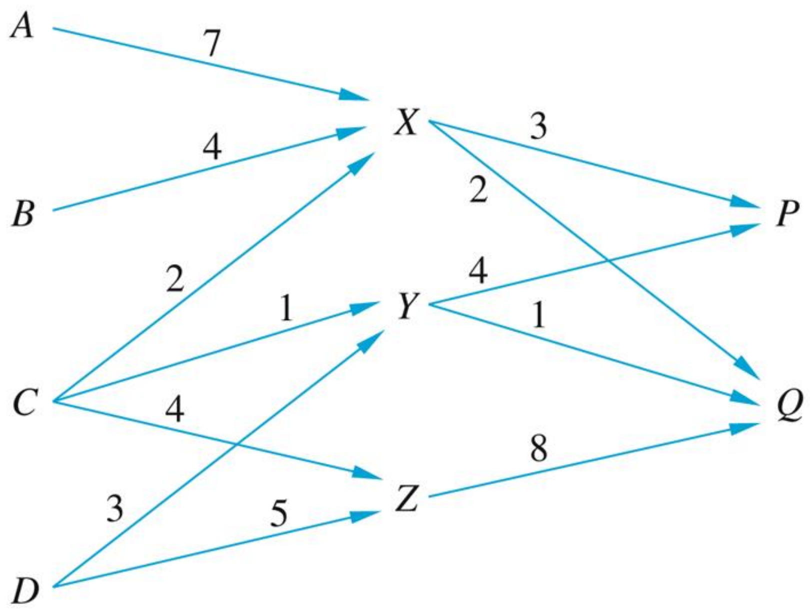
- $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow 0{,}8y = 80 \Rightarrow y = 100$; Es müssen zehn Altvögel getötet werden.

Darstellungsleistung: 5P (1 = 5P, 2 = 4P, 3 = 3P, 4 = 2P, 5 = 1P, 6 = 0P)

1	2	3	4	5	6
25-21	20-17	16-13	12-10	9-5	< 5

Block II: Mündliche Prüfung (Teil 1 – Folienvortrag)

In einem Unternehmen werden aus den Rohstoffen A, B, C, D in der ersten Produktionsstufe die Zwischenprodukte X, Y, Z hergestellt, die wiederum in einer zweiten Produktionsstufe zu den Endprodukten P und Q weiterverarbeitet werden, so wie es die nachfolgende Abbildung wiedergibt. Die Zahlen neben den Pfeilen geben an, wie viele Mengeneinheiten (ME) eines Stoffes für die Produktion benötigt werden.



a) **Gib** die Bedarfsmatrizen B_{RZ} und B_{ZE} der beiden Produktionsstufen **an**. (4P)

b) **Berechne** die Bedarfsmatrix $C = B_{RE}$ der Gesamtproduktion und **gib** die Bedeutung des Eintrages c_{32} der Matrix C **an**. (6P)

Für die Bedarfsmatrix C der Gesamtproduktion ergibt sich $C = \begin{pmatrix} 21 & 14 \\ 12 & 8 \\ 10 & 37 \\ 12 & 43 \end{pmatrix}$.

Eine Firma liefert die Rohstoffe für einen Auftrag von 30 ME des Endproduktes P und 50 ME des Endproduktes Q. Die Rohstoffpreise pro ME betragen 0,25 Geldeinheiten (GE) für A, 2 GE für B, 16 GE für C und 3 GE für D.

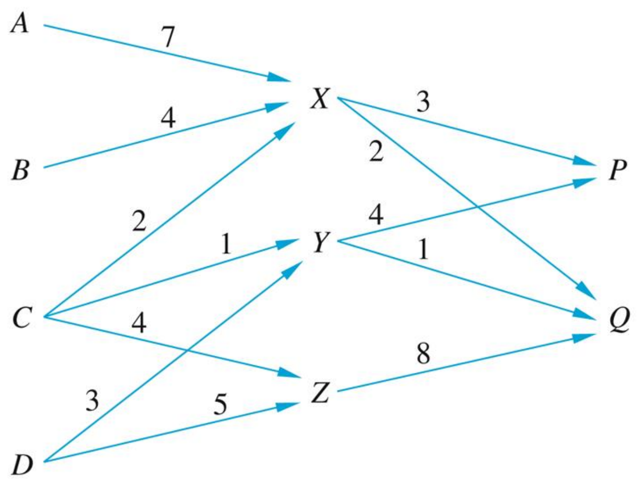
c) **Bestimme** den Rohstoffbedarf **und** die Rohstoffkosten des Auftrages. (6P)

Im Lager befinden sich 70 ME des Zwischenproduktes X, 60 ME von Y und 160 ME von Z.

d) **Untersuche**, wie viele ME der Endprodukte P und Q hergestellt werden können. (4P)

Block II: Mündliche Prüfung (Teil 1 – Folienvortrag) – Lösungen

In einem Unternehmen werden aus den **Rohstoffen A, B, C, D** in der ersten Produktionsstufe die **Zwischenprodukte X, Y, Z** hergestellt, die wiederum in einer zweiten Produktionsstufe zu den **Endprodukten P und Q** weiterverarbeitet werden, so wie es die nachfolgende Abbildung wiedergibt. Die Zahlen neben den Pfeilen geben an, wie viele **Mengeneinheiten (ME)** eines Stoffes für die Produktion benötigt werden.



a) **Gib** die Bedarfsmatrizen B_{RZ} und B_{ZE} der beiden Produktionsstufen **an**. (4P)

- $B_{RZ} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ und $B_{ZE} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

b) **Berechne** die Bedarfsmatrix $C = B_{RE}$ der Gesamtproduktion und **gib** die Bedeutung des Eintrages c_{32} der Matrix C **an**. (6P)

- Ansatz: $C = B_{RZ} \cdot B_{ZE} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 14 \\ 12 & 8 \\ 10 & \mathbf{37} \\ 12 & 43 \end{pmatrix}$ (4P)
- Bedeutung von **37**: Für 1 ME Q benötigt man **37** ME C. (2P)

c) **Bestimme** den Rohstoffbedarf **und** die Rohstoffkosten des Auftrages. (6P)

- Ansatz: $\vec{x} = C \cdot \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 21 & 14 \\ 12 & 8 \\ 10 & 37 \\ 12 & 43 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1330 \\ 760 \\ 2150 \\ 2510 \end{pmatrix}$ (4P)
- Ansatz: $K = \overrightarrow{k^T} \cdot C \cdot \vec{y} = \overrightarrow{k^T} \cdot \vec{x} \Leftrightarrow (0{,}25 \quad 2 \quad 16 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 1330 \\ 760 \\ 2150 \\ 2510 \end{pmatrix} = 43782{,}50 \text{ GE}$ (2P)

d) **Untersuche**, wie viele ME der Endprodukte P und Q hergestellt werden können. (4P)

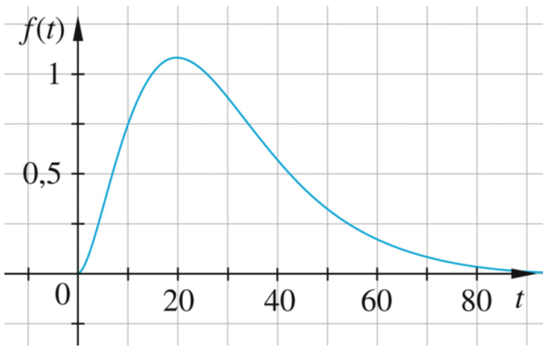
- Ansatz: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 60 \\ 160 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3p + 2q = 70, 4p + q = 60, 8q = 160 \Leftrightarrow p = 10, q = 20.$

Darstellungsleistung: 5P (1 = 5P, 2 = 4P, 3 = 3P, 4 = 2P, 5 = 1P, 6 = 0P)

1	2	3	4	5	6
25-21	20-17	16-13	12-10	9-5	< 5

Block II: Mündliche Prüfung (Teil 2 – Gespräch)

In der nebenstehenden Abbildung ist für $t \geq 0$ ein Graph einer Funktion angegeben. Die Funktion f beschreibt die Wachstumsgeschwindigkeit f(t) (in m pro Jahr) einer Fichte in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren). Die Fichtenlänge bei $t = 0$ beträgt 0,2 m.



a) **Markiere** im Graphen markante Punkte bzw. Bereiche des Graphen und **gib** ihre Bedeutung in der dargestellten Situation **an**. (6P)

Mindestens drei der fünf Aussagen müssen genannt werden.

- Wachstumsgeschwindigkeit zu Beginn (Koordinatenursprung) ist Null.
- Globale Maximalgeschwindigkeit wird nach 20 Jahren erreicht (entspricht globalem HP).
- Die Zunahme der Wachstumsgeschwindigkeit ist nach ca. 5 Jahren am größten (li-re-WP).
- Die Abnahme der Wachstumsgeschwindigkeit ist nach ca. 35 Jahren am größten (re-li-WP).
- Langfristig nähert sich die Wachstumsgeschwindigkeit Null an (Verhalten im Unendlichen).

b) **Begründe**, dass es sich **nicht** um den Graph einer GRF handeln kann. (2P)

- Das Verhalten im Unendlichen widerspricht dem Verhalten einer GRF.

Die Funktionsgleichung für f lautet $\mathbf{f(t) = 0{,}02t^2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}}$.

c) **Erkläre** anhand des Funktionsterms, dass G_f für $t > 0$ oberhalb der t-Achse liegt. (2P)

- $f(t) = 0{,}02t^2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} > 0$, da bei der Faktoren für $t > 0$ echt positiv sind.

d) **Bestimme** $f'(t)$ und **erläutere** die dabei verwendeten Rechenregeln. (5P)

- $f'(t) = 0{,}04t \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} + 0{,}02t^2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} \cdot (-0{,}1) = (0{,}04t - 0{,}002t^2) \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$ (3P)
- Produkt- und Kettenregel. (2P)

e) **Gib** die Bedeutung des Inhalts der Fläche, den der Graph und die t-Achse für $0 \leq t \leq 60$ einschließen, im Sachzusammenhang an. (1P)

- Längenzuwachs der Fichte in Metern.

f) **Erläutere**, wie man diesen Flächeninhalt berechnen kann. (2P)

- $\int_0^{20} f(t)dt = F(20) - F(0)$

g) **Interpretiere** für $x \geq 0$ den Term $\mathbf{W(x) = 0{,}2 + \int_0^x f(t)dt}$. (2P)

- Länge der Fichte nach x Jahren.

Darstellungsleistung: 5P (1 = 5P, 2 = 4P, 3 = 3P, 4 = 2P, 5 = 1P, 6 = 0P)

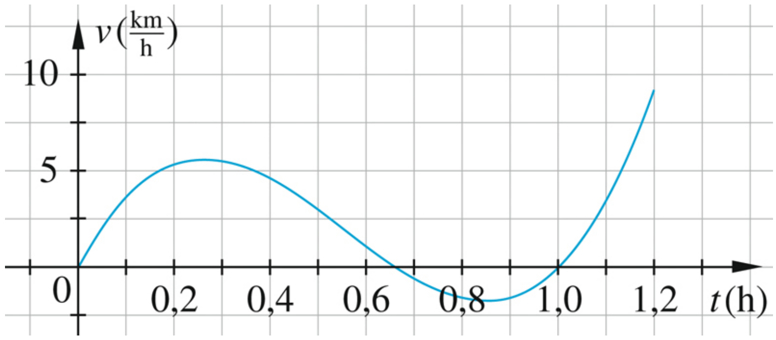
1	2	3	4	5	6
25-21	20-17	16-13	12-10	9-5	< 5

Block III: Mündliche Prüfung (Teil 1 – Folienvortrag)

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen des Geschwindigkeitsverlaufes eines sich geradlinig bewegenden Objekts. Seine **momentane**[1] **Geschwindigkeit** wird innerhalb der ersten 1,2 Stunden beschrieben durch die Funktion v mit

$$v(t) = 72t^3 - 120t^2 + 48t.$$

Der Graph der Funktion ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



a) **Erläutere** anhand des Graphen von v, …

a1) … wann das Objekt seine Richtung ändert. (2P)
a2) … wann das Objekt seine kleinste bzw. größte Geschwindigkeit erreicht. (2P)
a3) … wann die **Abnahme** der Geschwindigkeit am größten ist. (1P)

b) **Bestimme** innerhalb der ersten 1,2 Stunden den Zeitpunkt t_M, zu dem die Geschwindigkeit ihr globales Maximum erreicht. (7P)

c) **Berechne** eine Stammfunktion s zur Funktion v und **ermittle** mit dieser Stammfunktion, wie weit das Objekt 1,2 Stunden nach dem Start vom Startpunkt entfernt ist. (4P)

Ein zweites Objekt startet zum gleichen Zeitpunkt wie das erste Objekt und hat über den gesamten Zeitraum von 1,2 h eine konstante Geschwindigkeit von 2,5 $\frac{km}{h}$.

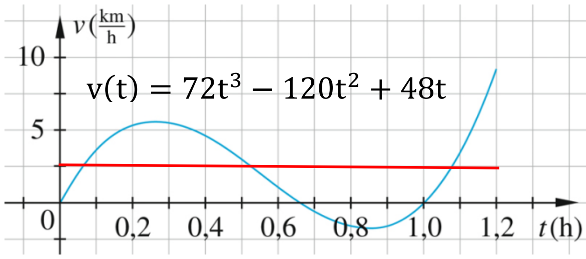
d) **Zeichne** den Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf des zweiten Objekts in die obige Abbildung **ein** und **gib an**, welche Strecke das zweite Objekt während der ersten 1,2 Stunden zurückgelegt hat. (2P)

e) **Interpretiere** im obigen Sachzusammenhang die Funktion d, die für $0 \leq x \leq 1{,}2$ durch die Gleichung $d(x) = \int_0^x [v(t) - 2{,}5]dt$ gegeben ist. (2P)

---

[1] Im Folgenden wird zur besseren Lesbarkeit nur der Begriff **Geschwindigkeit** verwendet; darunter ist stets die **momentane Geschwindigkeit** zu verstehen.

Block III: Mündliche Prüfung (Teil 1 – Folienvortrag) – Lösungen



a) **Erläutere** anhand des Graphen von v, … (5P)

a1) … wann das Objekt seine Richtung ändert. (2P)

- An den Nullstellen bei 40 und 60 Minuten ändert das Objekt seine Richtung, da die Geschwindigkeit ihr Vorzeichen wechselt.

a2) … wann das Objekt seine kleinste bzw. größte Geschwindigkeit erreicht.

- Zwei von drei Angaben reichen aus: Die kleinste Geschwindigkeit wird nach ca. 50 Minuten erreicht, die insgesamt größte nach 1,2 Stunden und eine lokal größte nach ca. 15 Minuten (lokale und globale Extrempunkte). (2P)

a3) … wann ist die **Abnahme** der Geschwindigkeit am größten ist.

- Nach ca. 35 Minuten ist die Abnahme am größten (Wendepunkt). (1P)

b) **Bestimme** innerhalb der ersten 1,2 Stunden den Zeitpunkt t_M, zu dem die Geschwindigkeit ihr globales Maximum erreicht. (7P)

- $v'(t) = 216t^2 - 240t + 48$ und $v''(t) = 432t - 240$ (2P)
- $v'(t) = 216t^2 - 240t + 48 = 0 \Leftrightarrow t \approx 0{,}26 \vee t \approx 0{,}85$ (3P)
- $v''(0{,}26) = 432 \cdot 0{,}26 - 240 \approx -127{,}68 < 0, v''(0{,}85) = 432 \cdot 0{,}85 - 240 \approx 127{,}2 > 0$ (1P)
- $v(1{,}2) = 9{,}216 > v(0{,}26) \approx 5{,}63$ ist globales Maximum (oder vergleichbares Argument). (1P)

c) **Berechne** eine Stammfunktion s zur Funktion v und **ermittle** mit dieser Stammfunktion die Entfernung des Objekts vom Startpunkt 1,2 Stunden nach dem Start. (4P)

- $s(t) = 18t^4 - 40t^3 + 24t^2$ (1P)
- $s(1{,}2) - s(0) = 2{,}7648$ (3P)

d) **Zeichne** den Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf des zweiten Objekts in die obige Abbildung **ein** und **gib an**, welche Strecke das zweite Objekt während der ersten 1,2 Stunden zurückgelegt hat. (2P)

- Siehe oben (1P)
- Die zurückgelegte Strecke beträgt $2{,}5\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1{,}2\text{ h} = 3\text{ km}$. (1P)

e) **Interpretiere** im obigen Sachzusammenhang die Funktion d, die für $0 \leq x \leq 1{,}2$ durch die Gleichung $d(x) = \int_0^x [v(t) - 2{,}5]dt$ gegeben ist. (2P)

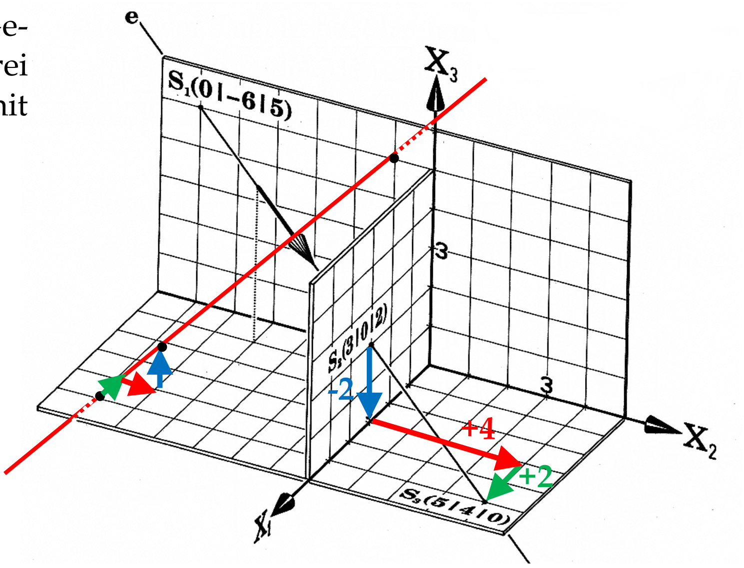
- Die Funktion d gibt den Abstand beider Objekte nach x Stunden an.

Darstellungsleistung: 5P (1 = 5P, 2 = 4P, 3 = 3P, 4 = 2P, 5 = 1P, 6 = 0P)

1	2	3	4	5	6
25-21	20-17	16-13	12-10	9-5	< 5

Block III: Mündliche Prüfung (Teil 2 – Gespräch)

Gegeben ist eine Gerade e und ihre drei Durchstoßpunkte mit den Grundebenen.



a) **Gib** eine Gleichung der Geraden e (durch Ablesung oder durch eine Rechnung) **an**. (4P)

- Z. B.: Aufpunkt S_2 und Richtungsvektor $\overrightarrow{S_2S_3}$ ergibt $\vec{X}(r_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) **Begründe**, dass die Gerade e auch durch $\mathbf{e}\text{:}\ \vec{\mathbf{X}}(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix} + \mathbf{s} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ darstellbar ist. (6P)

- Der Richtungsvektor von e ist kollinear zu dem der ersten Darstellung. (2P)
- (1/-4/4) kann z. B. durch $r = -1$ erreicht werden (Punktprobe). (4P)

Gegeben ist eine zweite Gerade $\mathbf{f}\text{:}\ \vec{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{-6} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathbf{t} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

c) **Zeichne** die Gerade f in das obige Koordinatensystem **ein** und **gib** mögliche Lagebeziehungen von e und f **an**. (4P)

- Gerade durch den Aufpunkt und den Spurpunkt (0/-1/5) (t = 5) zeichnen. (3P)
- Alternativ: Vom Aufpunkt den Richtungsvektor entlang zum Punkt (4/-5/1) gehen. (3P)
- e und f offenbar sind nicht parallel, haben also einen Schnittpunkt oder sind windschief. (1P)

d) **Erläutere** ein Verfahren, mit dem Du entscheiden kannst, ob die beiden Geraden e und f sich schneiden oder windschief sind. (4P)

- Durch Gleichsetzen erhält man ein 2x3-LGS. (2P)
- Dieses LGS ist entweder eindeutig lösbar (Schnittpunkt) oder unlösbar (windschief). (2P)

e) **Entscheide**, ob das 2x3-LGS **(I) s + t = 4, (II) -2s + t = 2, (III) s + t = 4** eindeutig lösbar ist. (2P)

- (I) und (II) haben die Lösung $s = \frac{2}{3}$, $t = \frac{10}{3}$, die wegen (I) = (III) Lösung des 2x3-LGS sind. (2P)

Darstellungsleistung: 5P (1 = 5P, 2 = 4P, 3 = 3P, 4 = 2P, 5 = 1P, 6 = 0P)

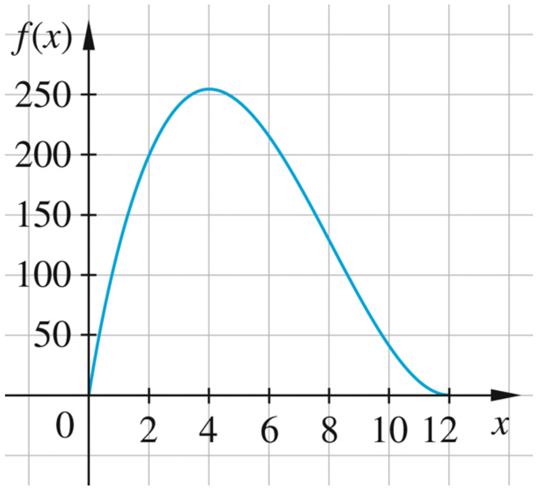
1	2	3	4	5	6
25-21	20-17	16-13	12-10	9-5	< 5

Block IV: Mündliche Prüfung (Teil 1 – Folienvortrag)

Die Funktion f beschreibt näherungsweise die **momentane**[1] **Zuflussgeschwindigkeit** des Wassers in einen Stausee einer Bergregion **in den ersten 12 Stunden** nach einem Sommergewitter, wenn **x** die Zeit **in Stunden** und **f(x)** die Zuflussgeschwindigkeit **in m³ pro Stunde** ist. Für die Funktionsgleichung ergibt sich

$$f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x.$$

Der Graph der Funktion f ist im Folgenden dargestellt.



a) **Beschreibe** den Verlauf des Graphen im Sachzusammenhang. (3P)

b) **Bestimme** den Zeitpunkt innerhalb der ersten 12 Stunden, an dem die Zuflussgeschwindigkeit am größten war. **Gib** einen Wert für die maximale Zuflussgeschwindigkeit **an**. (7P)

c) **Markiere** in der obigen Abbildung den Wendepunkt und **gib** die Bedeutung der Wendestelle in der dargestellten Situation **an**. (2P)

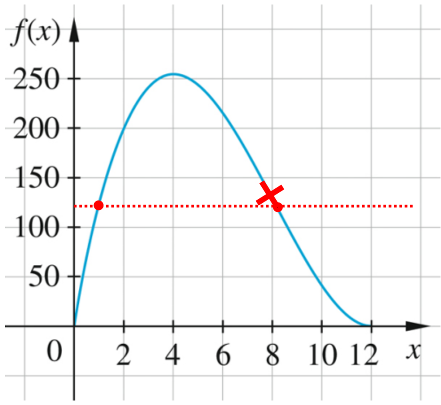
d) **Bestimme** eine Stammfunktion F zur Funktion f und **berechne** mit dieser Stammfunktion die Wassermenge, die in den ersten 2 Stunden in den Stausee zugeflossen ist. (4P)

e) **Begründe** mithilfe des Graphen von f und geeigneter Funktionswerte, dass der Zeitraum, in dem die Zuflussgeschwindigkeit mindestens 120 $\frac{m^3}{h}$ beträgt, länger als 7 Stunden ist. (4P)

---

[1] Im Folgenden wird zur besseren Lesbarkeit nur der Begriff **Zuflussgeschwindigkeit** verwendet; darunter ist stets die **momentane Zuflussgeschwindigkeit** zu verstehen.

Block IV: Mündliche Prüfung (Teil 1 – Folienvortrag) – Lösungen



Die Funktion f beschreibt näherungsweise die **momentane**[1] **Zuflussgeschwindigkeit** des Wassers in einen Stausee einer Bergregion **in den ersten 12 Stunden** nach einem Sommergewitter, wenn **x** die Zeit **in Stunden** und **f(x)** die Zuflussgeschwindigkeit **in m³ pro Stunde** ist. Für die Funktionsgleichung ergibt sich $\mathbf{f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x.}$

a) **Beschreibe** den Verlauf des Graphen im Sachzusammenhang. (3P)

Drei der vier Aussagen (je 1P) müssen genannt werden.

- Die Zuflussgeschwindigkeit zu Beginn war Null.
- Die global maximale Zuflussgeschwindigkeit wurde nach 4 Stunden erreicht (globaler HP).
- Die Abnahme der Zuflussgeschwindigkeit war nach 8 Stunden am größten (re-li-WP).
- Zuflussgeschwindigkeit nach 12 Stunden war Null.

b) **Bestimme** den Zeitpunkt, an dem die Zuflussgeschwindigkeit am größten war. (7P)

- $f'(x) = 3x^2 - 48x + 144$ und $f''(x) = 6x - 48$ (2P)
- $f'(x) = 3x^2 - 48x + 144 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 12$ (3P)
- $f''(4) = -24 < 0, f''(12) = 24 > 0$ (1P)
- f(4) = 256 m³ pro Stunde ist größer als f(0) = f(12) = 0 (oder vergleichbares Argument). (1P)

c) **Markiere** in der obigen Abbildung den Wendepunkt und **gib** die Bedeutung der Wendestelle in der dargestellten Situation **an**. (2P)

- siehe oben. (1P)
- Bedeutung der Wendestelle = Zeitpunkt, an dem die Abnahme am größten war. (1P)

d) **Bestimme** eine Stammfunktion F zur Funktion f und **berechne** mit dieser Stammfunktion die Wassermenge, die in den ersten 2 Stunden in den Stausee zugeflossen ist. (4P)

- $F(x) = 0{,}25x^4 - 8x^3 + 72x^2$ (1P)
- $F(2) - F(0) = 228$ m³ (3P)

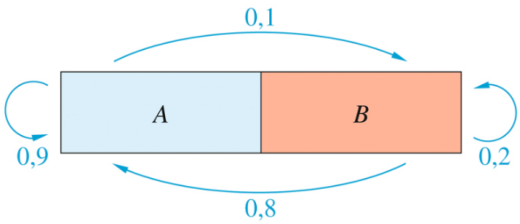
e) **Begründe** mithilfe des Graphen von f und geeigneter Funktionswerte, dass der Zeitraum, in dem die Zuflussgeschwindigkeit mindestens 120 $\frac{m^3}{h}$ beträgt, länger als 7 Stunden ist. (4P)

- Man ermittelt die Schnittstellen der Geraden y = 120 mit dem Graphen von f und erhält x ≈ 1 und x ≈ 8. Rechnerische Schnittstellenbestimmung liefert $x_1 \approx 0{,}99$, $x_2 \approx 8{,}16$, $x_3 \approx 14{,}84$ (2P)
- f(1) = 121 und f(8) = 128 liefern einen rechnerischen Nachweis. (2P)

Darstellungsleistung: 5P (1 = 5P, 2 = 4P, 3 = 3P, 4 = 2P, 5 = 1P, 6 = 0P)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
25-21	20-17	16-13	12-10	9-5	< 5

Block IV: Mündliche Prüfung (Teil 2 – Gespräch)



In einem Behälter mit zwei Kammern A und B befinden sich in jeder Kammer **50 mol** eines Gases (1 mol bezeichnet die Stoffmenge und beträgt etwa $6{,}022 \cdot 10^{23}$ Teilchen). Eine durchlässige Membran trennt die beiden Kammern voneinander. Die Ausgleichsbewegung zwischen den beiden Kammern bezeichnet man als **Diffusion**. Ein Teilchen gelangt **in einer Sekunde** mit einer Wahrscheinlichkeit von **10 %** von Kammer A in die Kammer B und mit einer Übergangswahrscheinlichkeit von **80 %** von Kammer B in Kammer A. Der Diffusionsprozess ist oben dargestellt.

a) **Beschreibe** den Diffusionsprozess mithilfe einer Matrix M und **begründe**, dass es sich um einen Austauschprozess handelt. (6P)

- $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}8 \\ 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ (4P)
- M ist quadratisch, die Spaltensummen sind 1, alle Einträge sind positiv (oder vergleichbare Argumentation). (2P)

b) **Berechne** die Verteilung der Teilchen auf die beiden Kammern nach einer und nach zwei Sekunde. (6P)

- $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}8 \\ 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 \\ 15 \end{pmatrix}$ (4P)
- $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}8 \\ 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 85 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 88{,}5 \\ 11{,}5 \end{pmatrix}$ (ohne ausführliche Rechnung) (2P)

c) **Erkläre**, wie man die Verteilung der Teilchen in beiden Kammern nach 16 Sekunden mithilfe der Ausgangsverteilung bestimmen kann. (2P)

- $\overrightarrow{x_{16}} = M^{16} \cdot \overrightarrow{x_0}$ mit $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$.

d) **Gib** die Bedeutung von M^{16} im Sachkontext **an.** (2P)

- M^{16} beschreibt den Diffusionsprozess für die ersten 16 Sekunden.

Es gilt $M^{16} \approx \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

e) **Interpretiere** die Matrix im obigen Sachkontext. (4P)

- M^{16} hat zwei gleiche Spalten und entspricht der Grenzmatrix G. (2P)
- Ca. 89 % der Teilchen (89 mol) befinden sich auf Dauer in Kammer A, ca. 11 % (11 mol) in Kammer B. (2P)

Darstellungsleistung: 5P (1 = 5P, 2 = 4P, 3 = 3P, 4 = 2P, 5 = 1P, 6 = 0P)

1	2	3	4	5	6
25-21	20-17	16-13	12-10	9-5	< 5