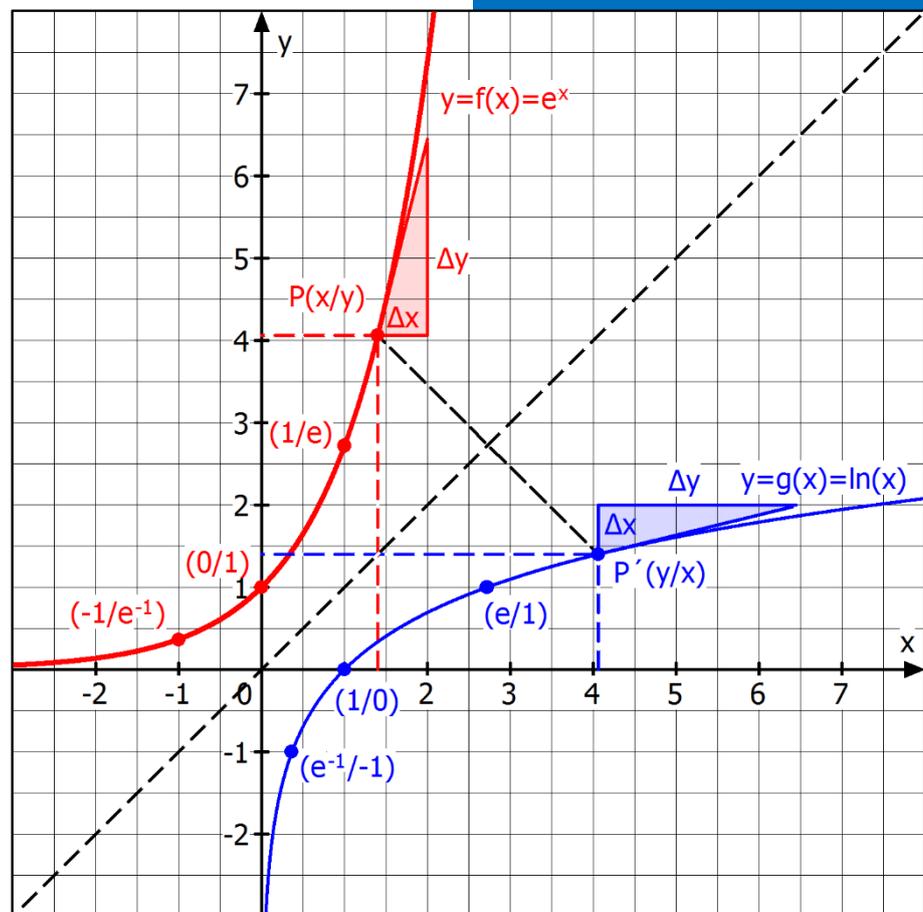


1. Unterrichtsvorhaben in der Q2-Phase

Exponential- und Logarithmusfunktion



Jörn Meyer

j.meyer@fals-solingen.de

www.maspole.de

Inhaltsverzeichnis

1 Grundwissen rund um Exponentialfunktionen.....	2
2 Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung	6
3 Natürlicher Logarithmus – Ableitung der Exponentialfunktion.....	10
4 Natürliche Logarithmusfunktion.....	14
5 Wachstumsvorgänge	18
6 Kontrollaufgaben.....	25
Lösungen	34

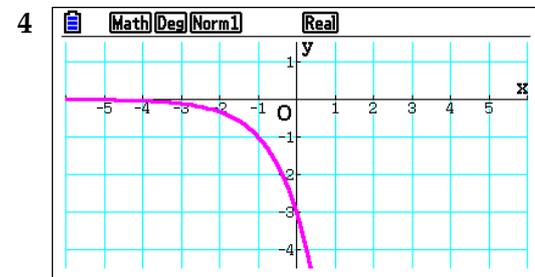
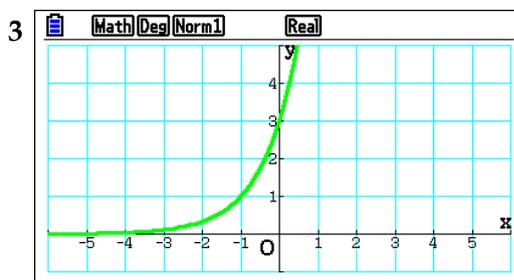
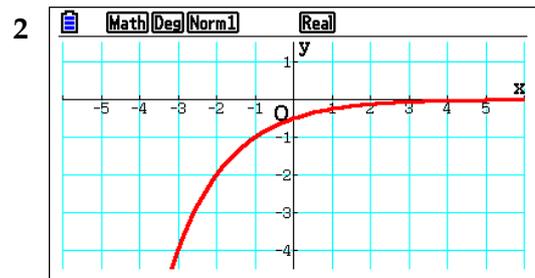
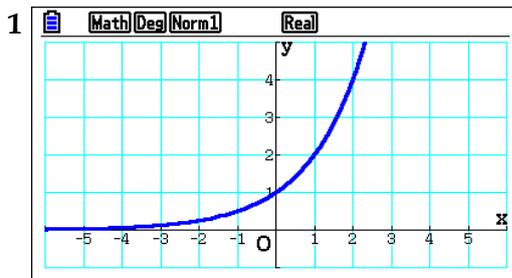
1 Grundwissen rund um Exponentialfunktionen



Aufgabe 1: Eigenschaften der Exponentialfunktionen

Die Funktion mit der Gleichung $f(x) = c \cdot a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$ und $c \in \mathbb{R}$) wird für verschiedene Werte a und c mithilfe des GTR als Graf (MENU 5) und als Tabelle (MENU 7) dargestellt.

(1) **Ermittle** die Funktionsgleichungen der Form $f(x) = c \cdot a^x$ für die folgenden vier Grafen.



(2) **Gib** die fehlenden Werte in der nachfolgenden Tabelle **an** und **beschreibe** die exponentielle Zunahme (Funktion f) bzw. die exponentielle Abnahme (Funktion g), indem Du Merksätze der Form „Wenn der x -Wert sich um k vergrößert (verkleinert), dann ... sich der Funktionswert der Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ um ...“.

x	-3	-2	-1	0	0,5	1	2	3
$f(x) = 4 \cdot 2^x$								
$g(x) = 2 \cdot 0,5^x$								

(3) **Erläutere**, wie man am Funktionsterm erkennen kann, ob es sich um eine exponentielle Zunahme bzw. um eine exponentielle Abnahme handelt. **Nenne** Anwendungsbeispiele für exponentielle Zu- und Abnahme.

(4) **Erkläre** anschaulich am Beispiel der Funktionen $y = 2^x$ und $y = x^2$, wie sich exponentielle Zunahme vom Wachstum einer Potenzfunktion unterscheidet. Vielleicht hilft Dir für ganzzahlige und positive x die Aussage: „Exponentielles Wachstum ist durch die besondere Eigenschaft gekennzeichnet, dass der letzte Eintrag größer ist als die Summe aller vorherigen Einträge.“

(5) **Bestimme** die sechs exponentiellen Funktionsgleichungen mit der Darstellung $f(x) = c \cdot a^x$ ($a > 0$ und $c \in \mathbb{R}$), die zu den sechs Spalten gehören, welche mit dem GTR unter MENU 7 erzeugt worden sind.

x	Y1	Y2	Y3
-1	1.5	-2	1
0	3	-1	3
1	6	-0.5	9

-1

FORMULA DELETE ROW EDIT (GPH-CO) (GPH-PLT)

x	Y4	Y5	Y6
-1	2.5	5	0.3333
2	20	0.04	9
5	160	$3.2 \cdot 10^{-4}$	243

-1

FORMULA DELETE ROW EDIT (GPH-CO) (GPH-PLT)

(6) **Begründe** mithilfe der Potenzgesetze¹ folgende Gleichheit:

$$(1) 2^{-x} = 0,5^x \quad (2) 3^{x-1} = \frac{1}{3} \cdot 3^x \quad (3) (3^x)^2 = 9^x \quad (4) 3^{2x+2} = 9 \cdot 9^x \quad (5) 25^{0,5x-0,5} = 0,2 \cdot 5^x$$

(7) **Übertrage** mit Beispielen in Dein Heft und **erkläre**, warum $a > 0$ und $a \neq 1$ sein muss.

Merksätze:

- (1) Eine Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$ und $c \in \mathbb{R}$) heißt **Exponentialfunktion**.
- (2) Wenn eine Exponentialfunktion einen Wachstumsvorgang beschreibt, handelt es sich für ...
 - $a > 1$ um eine **exponentielle Zunahme**.
 - $a < 1$ um eine **exponentielle Abnahme**.
- (3) Der Faktor a heißt **Wachstumsfaktor**.
- (4) Der Faktor c entspricht dem **Startwert bei $x = 0$** .

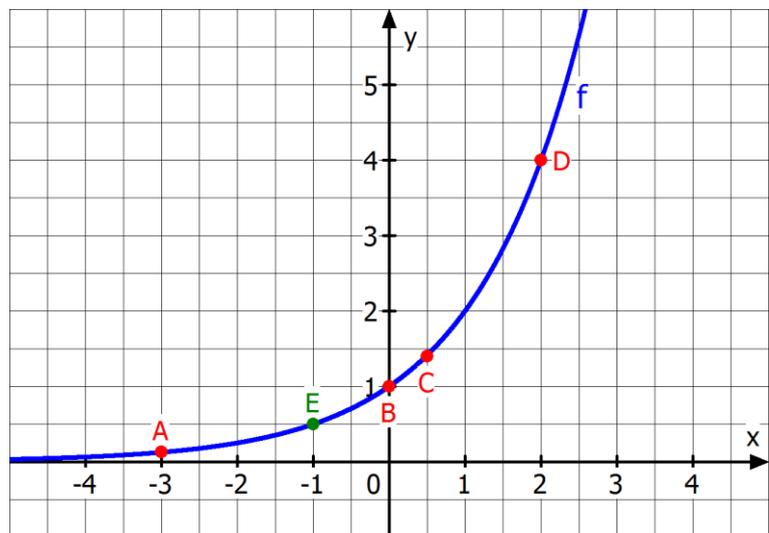


Aufgabe 2: Logarithmus und Exponentialgleichungen²

Gegeben sind 8 Kärtchen und 4 Punkte auf dem Grafen einer Exponentialfunktion.

a) **Gib** die Funktionsgleichung von f **an** und **untersuche** mithilfe des GTR, welche beiden Kärtchen zu den Punkten A, B, C bzw. D gehören.

$2^x = 4$
$x = \log_2\left(\frac{1}{8}\right)$
$x = \log_2(4)$
$2^x = 1$
$x = \log_2(1)$
$2^x = \sqrt{2}$
$x = \log_2(\sqrt{2})$
$2^x = \frac{1}{8}$



b) **Gib** die beiden entsprechenden Gleichungen für den Punkt E **an** und **erkläre** die Bedeutung des Ausdrucks $\log_2(b)$.

c) **Gib** die Lösungen der folgenden 8 Exponentialgleichungen als Logarithmus **an** und **ordne** sie ohne GTR der Größe nach. **Gib** dabei jeweils den Lösungssatz **an**.

E: $15 \cdot 1,3^x = 30$	H: $0,125 \cdot 0,5^x = 0,25$	U: $4 + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 6$	A: $1 = \left(\frac{1}{9}\right)^x \cdot 8$
S: $10 \cdot 2^{x+1} = 50$	D: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 10^3$	S: $2,5^{x-2} \cdot 2,5^2 = 99$	T: $1,95^{2-x} = 1$

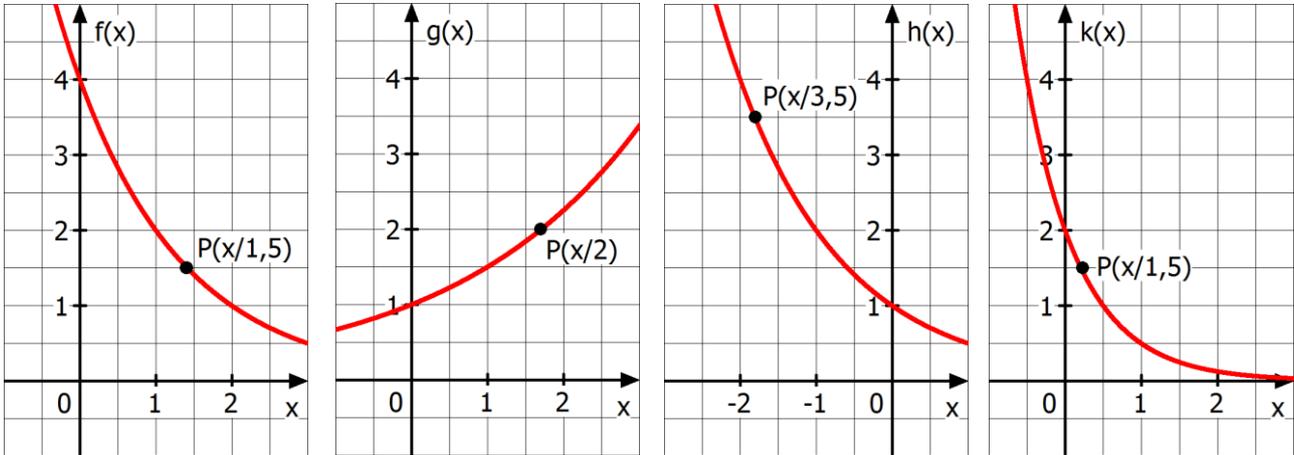
¹ $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; $a^r : a^s = a^{r-s}$; $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$; $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$;

² Ideen modifiziert nach Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)



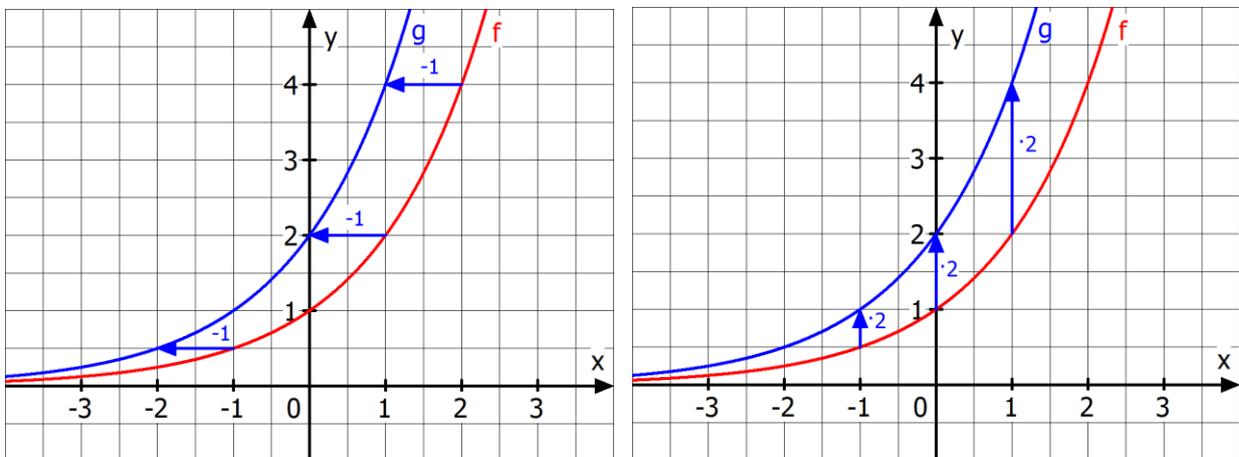
Aufgabe 3: Ermitteln von Funktionsterm und x-Wert

Ermittle den Funktionsterm für die folgenden 4 Exponentialfunktionen und gib den x-Wert des Grafenpunktes P als Logarithmus und als Lösung einer Exponentialgleichung an. Überprüfe Deine Rechnungen mit dem GTR.



Aufgabe 4: Transformationen von Exponentialfunktionen

- a) Der Graf zur Funktion f mit $f(x) = 2^x$ wird auf zwei Weisen transformiert. In der linken Abbildung wird der Graf von f um 1 Einheit nach links verschoben. In der rechten Darstellung erfolgt eine Streckung des Grafen von f von der x-Achse aus um den Faktor 2.



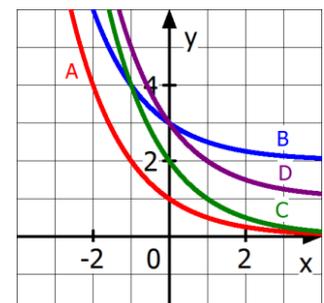
Zeige rechnerisch, dass in beiden Fällen derselbe Graf entsteht.

- b) Gegeben sind die Funktionen f , g und h mit $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^{x+2}$ und $h(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^x$.

Begründe grafisch mit den Funktionsgraphen und rechnerisch mit den Funktionstermen, dass die Grafen von g und h sowohl durch eine Verschiebung als auch eine Streckung aus dem Grafen von f hervorgehen können.

- c) Ordne die folgenden Funktionsgleichungen den Grafen A bis D in der Abbildung rechts zu. Begründe Deine Zuordnungen.

$$f(x) = 0,5^x \quad g(x) = 0,5^x + 2 \quad h(x) = 0,5^{x-1} \quad k(x) = 0,5^{x-1} + 1$$





Aufgabe 5: Kaninchenwachstum³

Auf einer unbewohnten Insel wurden zu Beginn des Jahres 2012 sechs Kaninchen ausgesetzt. Nach 42 Monaten zählte man 77 Tiere. Man geht davon aus, dass sich die Population exponentiell entwickelt.

- Beschreibe** die Entwicklung der Kaninchenpopulation in Abhängigkeit von der Zeit (in Jahren) durch eine Exponentialfunktion und **skizziere** den dazugehörigen Grafen für $0 \leq t \leq 5$.
- Ermittle** die zu erwartene Anzahl der Tiere am 1.1.2016, 1.2.2018 und 1.10.2022.
- Ab einer Population von 12000 Kaninchen wird diese zwecks Reduzierung zum Abschuss freigegeben. **Bestimme** den Zeitpunkt der ersten Abschussfreigabe.
- Erläutere**, welche Modellannahmen in Aufgabenteilen a) bis c) gemacht werden müssen.



Aufgabe 6: Gilt immer – gilt nie – kommt darauf an⁴

Entscheide begründend, ob die 4 Aussagen immer, nie oder unter bestimmten Bedingungen gelten.

- Eine Exponentialfunktion ist nicht symmetrisch.
- Eine Exponentialgleichung besitzt immer genau eine Lösung.
- Der Graf einer Exponentialfunktion nähert sich immer der x-Achse an.
- Ein und derselbe Wachstumsvorgang kann mit unterschiedlichen Wachstumsfunktionen beschrieben werden.

Infoblock: Was bedeutet Logarithmus und wie rechnet man damit?

Das Wort Logarithmus stammt aus dem Griechischen von *lógos* („Verständnis, Lehre, Verhältnis“) *arithmós* („Zahl“) ab. Der Logarithmus einer Zahl bezeichnet den Exponenten x (Hochzahl, Verhältniszahl), mit dem die Basis a potenziert werden muss, um die gegebene Zahl b zu erhalten. Fasst man diese Definition in Gleichungen, erhält man:

Unter dem **Logarithmus von b zur Basis a** ($a, b > 0$) versteht man die eindeutig bestimmte Lösung der Exponentialgleichung $a^x = b$. Man schreibt $x = \log_a(b)$. Damit sind Logarithmieren und Potenzieren gegenseitige Umkehroperationen. Zum Beispiel ist $\log_2(0,125) = -3$, da $2^{-3} = 0,125$.

Zur Erinnerung: Der Ausdruck $\sqrt[n]{a}$ ($a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$) ist definiert worden als nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$. Während beim Logarithmus die Hochzahl gesucht ist, ist bei der Wurzel die Basis die gesuchte Zahl.

Die **Logarithmusgesetze** lauten ($a, u, v > 0; r \in \mathbb{R}$):

- Produktregel:** $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
- Quotientenregel:** $\log_a(u : v) = \log_a(u) - \log_a(v)$
- Potenzregel:** $\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)$

Erläutere den Beweis zur Produktregel und **beweise** analog die Quotienten- und Potenzregel.

Beweis der Produktregel:

Setze $x = \log_a(u)$, $y = \log_a(v)$

Dann gilt: $a^x = u$; $a^y = v$

Also: $\log_a(u \cdot v)$

$= \log_a(a^x \cdot a^y)$

$= \log_a(a^{x+y})$

$= x + y = \log_a(u) + \log_a(v)$

³ Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

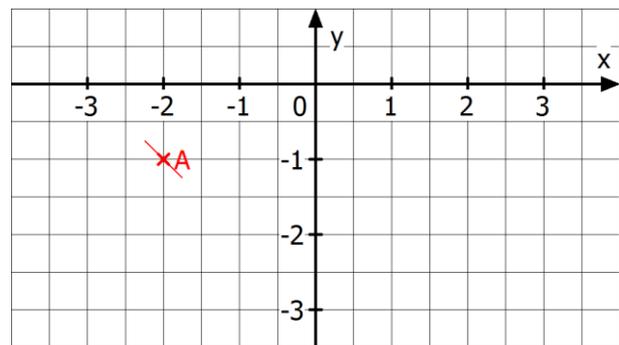
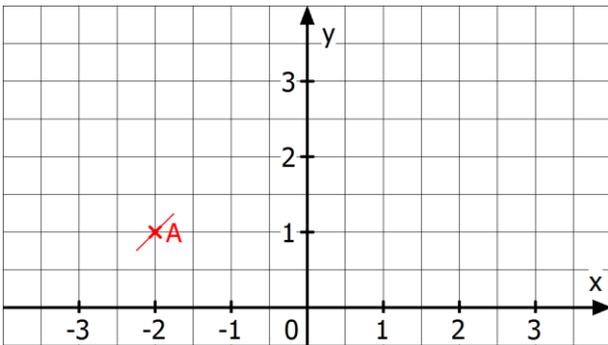
⁴ Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

2 Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung



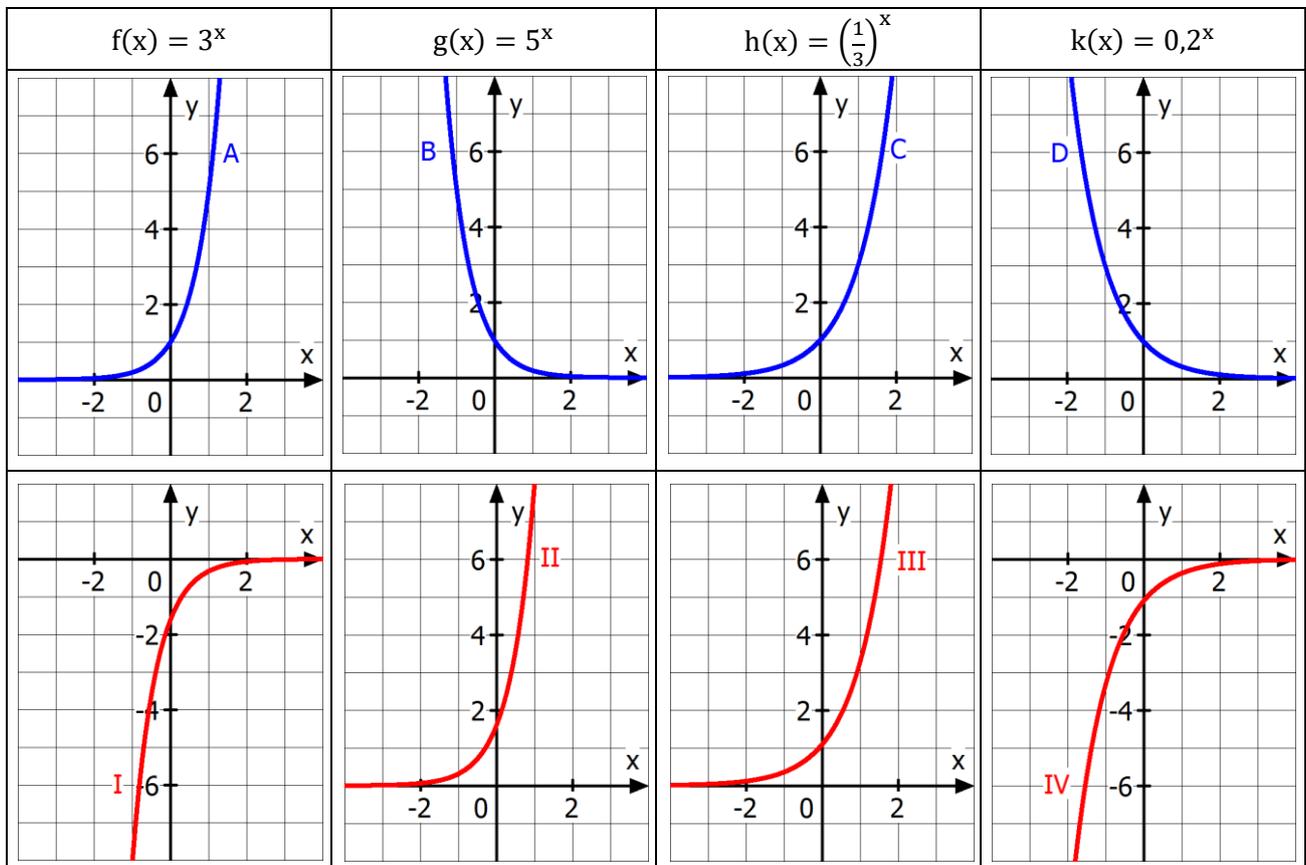
Aufgabe 1: Graf zeichnen mit der Eigenschaft $f'(x) = f(x)^5$

Zeichne einen beliebigen Startpunkt mit einem positiven y-Wert in ein Koordinatensystem. Zeichne nun einen Grafen durch A, dessen Steigung an jeder Stelle x genau dem y-Wert an der Stelle x entspricht. **Untersuche**, wie sich der Graph verändert, wenn der Startpunkt auf oder unterhalb der x -Achse liegt. **Vergleiche** die Ergebnisse mit Deinem Nachbarn.



Aufgabe 2: Graf von Exponentialfunktionen und deren Ableitungen

Ordne jedem der Funktionsterme f , g , h und k den passenden Grafen A, B, C bzw. D sowie den Grafen der Ableitungsfunktion I, II, III und IV zu. **Begründe** Deine Zuordnungen.



⁵ Aufgabe aus Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

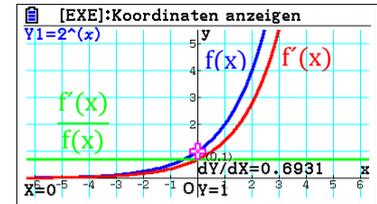


Aufgabe 3: Ableitung der Exponentialfunktionen

Bisher haben wir nur die Ableitungen für ganzrationale Funktionen und Potenzfunktionen berechnen können. Für Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a^x$ ist noch keine Ableitung bekannt. Wir betrachten zunächst die Funktion f mit $f(x) = 2^x$. Mithilfe des GTR sind Grafen und Wertetabellen zur Funktion f , f' und $\frac{f'}{f}$ dargestellt. Mit der Trace-Funktion ist darüber hinaus $f'(0)$ angegeben.

Math (Des) (Norm1) d/c (Real)	
Tabellenfkt.: Y=	
Y1	2^x [—]
Y2	$\frac{d}{dx}(2^x) _{x=x}$ [—]
Y3	$\frac{Y2}{Y1}$ [—]
[SELECT] [DELETE] [TYPE] [STYLE] [SET] [TABLE]	

Math (Rad) (Norm1) d/c (Real)			
X	Y1	Y2	Y3
-1	0.5	0.3465	0.6931
0	1	0.6931	0.6931
1	2	1.3862	0.6931
2	4	2.7725	0.6931
			-1
[FORMULA] [DELETE] [ROW] [EDIT] [GPH-COIN] [GPH-PLT]			



- Beschreibe deine Beobachtungen und **begründe**, dass $f'(x) = f'(0) \cdot f(x) \approx 0,6931 \cdot 2^x$ gilt.
- Zeichne zu f mit $f(x) = a^x$ mit dem GTR Grafen von f , f' und $\frac{f'}{f}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem und **ermittle** die Ableitung von f an der Stelle 0. **Variiere** die Basis a und **beschreibe** deine Beobachtungen.
- Es gibt eine Zahl e , die sogenannte **eulersche Zahl**, für die der Ableitungsgraf mit dem Funktionsgraf f mit $f(x) = e^x$ exakt übereinstimmt. Es gilt dann $f'(x) = f(x)$. **Ermittle** durch Variation der Werte von a eine Näherung für diese Zahl e .
- Im Folgenden sind Beweisschritte eines Nachweises angegeben, dass für eine Exponentialfunktion des Typs $f(x) = a^x$ gilt: $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$. **Bringe** die folgenden 8 Rechenschritte und Schlussfolgerungen in die logisch richtige Reihenfolge und **begründe** jede einzelne Termumformung und Schlussfolgerung. **Fülle** dazu die nachfolgende Tabelle **aus**.⁶

$a^x \cdot \frac{a^{0+h} - a^0}{h} =$	$\frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} =$	Für die Ableitung einer Exponentialfunktion von der Form $f(x) = a^x$ gilt: $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$	$a^x \cdot f'(0) = f'(0) \cdot a^x$
$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$	$a^x \cdot \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0}$	$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} =$	$\frac{a^x \cdot (a^h - 1)}{h} =$
Begründung			
Begründung			

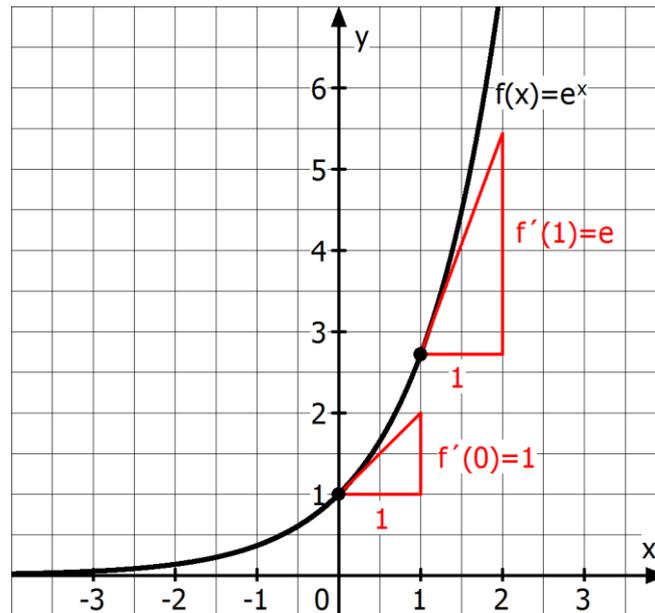
Merksatz zur Ableitung einer Exponentialfunktion: Für die Ableitung einer Exponentialfunktion vom Typ $f(x) = a^x$ ($a > 0$) gilt für die Ableitungsfunktion: $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$. Die Ableitungsfunktion einer Exponentialfunktion ist somit proportional zur Ausgangsfunktion.

⁶ Aufgabenidee aus dem Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)



Aufgabe 4: Natürliche Exponentialfunktion und eulersche Zahl e

Die Zahl e , für die $f'(x) = f(x) = e^x$ gilt, heißt **eulersche Zahl** (Leonard Euler lebte von 1707 bis 1783). Die Zahl e ist irrational (und transzendent, d. h. lässt sich nicht als Lösung einer Gleichung ausdrücken) und beträgt ungefähr 2,71828. Die dazugehörige Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = e^x$ heißt **natürliche Exponentialfunktion**. Insbesondere ist F mit $F(x) = e^x$ eine Stammfunktion von f . Der **Graf der natürlichen Exponentialfunktion** verläuft komplett oberhalb der x -Achse, ist linksgekrümmt, streng monoton wachsend und besitzt keine Null- und Extremstellen. Für $x \rightarrow +\infty$ streben die Funktionswerte gegen Unendlich. Für $x \rightarrow -\infty$ nähert sich der Graf der x -Achse an.



- a) **Erkläre**, warum die natürliche Exponentialfunktion an der Stelle 0 die Steigung 1 hat.
- b) **Begründe**, warum man mit dem Term $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n \rightarrow \infty$ einen Näherungswert für e berechnen kann. **Bringe** die folgenden Rechenschritte in die richtige Reihenfolge, **erläutere** die jeweiligen Äquivalenzumformungen und **bilde** abschließend den Grenzwert für $h \rightarrow 0$ bzw. $n \rightarrow \infty$.⁷

$e = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n$ $\approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	$\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \approx 1$	$\frac{e^{0+h} - e^0}{h} \approx 1$	$e^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n}$	Mit $h = \frac{1}{n}$ erhält man:	$e^{\frac{1}{n}} - 1 \approx \frac{1}{n}$
Begründung					

- c) **Zeige**, dass der Graf der Exponentialfunktion linksgekrümmt ist, keine Wende-, Extrem- und Nullstellen besitzt und streng monoton wachsend ist.

⁷ Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

- d) **Bestimme** den Flächeninhalt, den der Graf zu f mit $f(x) = e^x$ über folgenden Intervallen mit der x -Achse einschließt: $[0; 1]$; $[-1; 0]$; $[0; \ln(100)]$; $[-\ln(100); 0]$; $]-\infty; 0]$; $[0; +\infty[$.⁸

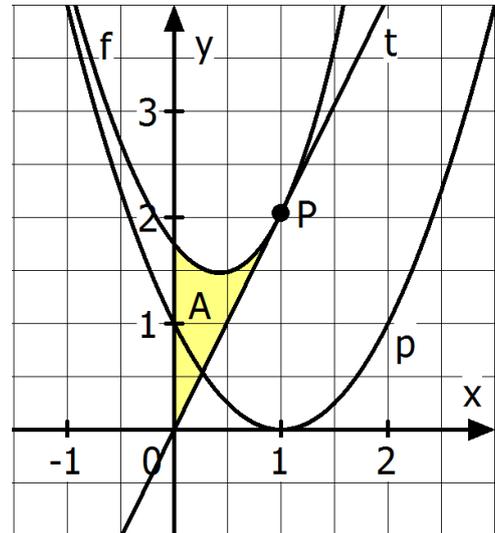
Merksatz: Es gilt für f mit $f(x) = e^x$ der Zusammenhang $f(x) = f'(x) = F(x) = e^x$.



Aufgabe 5: Berechnung von Ableitung, Tangente und Flächeninhalt

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 0,75e^x + x^2 - 2x + 1$. Im Punkt $P(1/f(1))$ wird eine Tangente angelegt. Die Tangente, der Graf von f sowie die beiden Koordinatenachsen schließen einen Flächeninhalt A ein. Darüber hinaus ist eine verschobene Normalparabel p gegeben. Die Gesamtsituation ist rechts dargestellt.

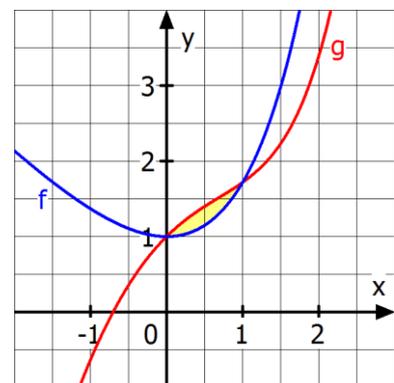
- Berechne** die Terme für $f'(x)$ und $f''(x)$ sowie $F(x)$.
- Bestimme** die Gleichung der Tangenten t im Punkt P .
- Zeige**, dass der Graf von f linksgekrümmt ist.
- Ermittle** den Flächeninhalt des Flächenstücks A .
- Beweise**, dass der Graf von f und die Normalparabel p keine gemeinsamen Punkte besitzen.



Aufgabe 6: Flächeninhalt zwischen zwei Kurven und markante Punkte

Es sind Grafen zu den beiden Funktionen f und g mit den dazugehörigen Gleichungen $f(x) = -x + e^x$ und $g(x) = -x^2 + e^x$ gegeben.

- Berechne** die Schnittstellen der Funktionsgraphen zu f und g .
- Bestimme** rechnerisch den Flächeninhalt, den die beiden Grafen zu f und g einschließen.
- Ermittle** den globalen Tiefpunkt des Grafen von f und zeige, dass er durchweg linksgekrümmt ist.
- Untersuche** den Grafen von g auf sein Krümmungsverhalten.



Aufgabe 7: Transformation der natürlichen Exponentialfunktion⁹

- Skizziere** die Grafen zu den Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 und f_5 mit den dazugehörigen Funktionsgleichungen $f_1(x) = e^x, f_2(x) = e^x + 1, f_3(x) = -e^x, f_4(x) = e^{x+2}$ und $f_5(x) = e^{-x}$.
- Beschreibe** begründend, wie die Grafen von f_2, f_3, f_4 und f_5 aus dem Grafen der natürlichen Exponentialfunktion hervorgehen.
- Begründe** anhand der Ergebnisse aus a) und b), dass $f_5'(x) = -e^{-x}$ sein muss.

⁸ $\ln(b)$ bezeichnet den Logarithmus von b zur Basis e , d. h. $\ln(b) = \log_e(b)$ (vgl. Kap. 5)

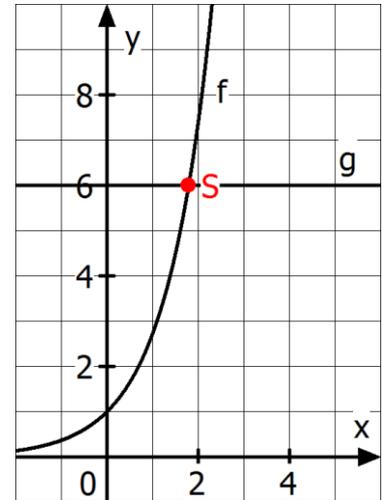
⁹ Modifiziert nach Aufgaben aus dem Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

3 Natürlicher Logarithmus – Ableitung der Exponentialfunktion



Aufgabe 1: Natürlicher Logarithmus

a) **Bestimme** zeichnerisch den Schnittpunkt S des Graphen der natürlichen Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ und der Geraden g mit $g(x) = 6$. **Überprüfe** Deine Ablesung durch eine Rechnung.



b) Wenn die Lösung der Gleichung $e^x = b$ ($b > 0$) gesucht ist, hilft uns der Logarithmus zur Basis e weiter. Denn $x = \log_e(b)$ ist Lösung genau dieser Gleichung. Hierfür schreiben wir zukünftig kürzer $\ln(b)$ und nennen diesen Ausdruck den **natürlichen Logarithmus von b** .

(1) **Überprüfe** die Ablesung aus a) geeignet mit dem natürlichen Logarithmus.

(2) **Begründe:** $e^{\ln(b)} = b$ ($b > 0$) und $\ln(e^b) = b$ ($b \in \mathbb{R}$)

(3) **Zeige:** $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$ und $\ln(x) \begin{cases} > \\ < \end{cases} 0$ für $x \begin{cases} > \\ < \end{cases} 1$.

(4) **Weise nach:** Jede Exponentialfunktion lässt sich durch $f(x) = a^x = e^{\ln(a) \cdot x}$ als Exponentialfunktion zur Basis e darstellen.

Definition:

Für eine positive reelle Zahl b heißt die Lösung x der Exponentialgleichung $e^x = b$ der **natürliche Logarithmus von b** . Man schreibt $x = \ln(b)$.

Merksätze:

(1) Es gilt: $e^{\ln(b)} = b$ ($b > 0$) und $\ln(e^c) = c$ ($c \in \mathbb{R}$). Die Rechenoperationen e^{\dots} und $\ln(\dots)$ heben sich gegenseitig auf, sind also Umkehroperationen zueinander.

(2) Jede Exponentialfunktion lässt sich zur Basis e schreiben durch $f(x) = a^x = e^{\ln(a) \cdot x}$.

c) **Schreibe** die Funktionen f , g , und h mit $f(x) = 3^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ und $h(x) = 0,2^x$ zur Basis e .

d) **Gib** die Lösungen mithilfe des natürlichen Logarithmus **an** und **bestimme** dann einen Näherungswert.¹⁰

(1) $e^x = 15$

(2) $e^x = 2,4$

(3) $e^{2x} = 7$

(4) $3 \cdot e^{4x} = 16,2$

(5) $e^{-x} = 10$

(6) $e^{4-x} = 1$

(7) $e^{4-4x} = 5$

(8) $2 \cdot e^{-x} = 5$

(9) $e^{2x+1} = 10$

(10) $3 \cdot e^{0,5x-1} = 1$

(11) $\frac{1}{3} \cdot e^{\frac{1}{4}x-1} = \frac{1}{5}$

(12) $-\frac{6}{7} \cdot e^{-\frac{2}{3}x+0,5} = \frac{7}{6}$

e) **Gib** die Lösungen mithilfe des natürlichen Logarithmus **an**. [Hinweis: Substituiere $u = e^x$, löse die quadratische Gleichung, bevor du x zurücksustituierst.]

(1) $e^{2x} - 2 \cdot e^x = 0$

(2) $e^{2x} - 2 \cdot e^x = -1$

(3) $\frac{1}{10} \cdot e^{2x} - e^x = -\frac{12}{5}$

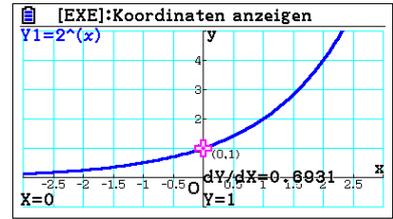
(4) $e^{4x} + e^{2x} + 1 = 0$

¹⁰ Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

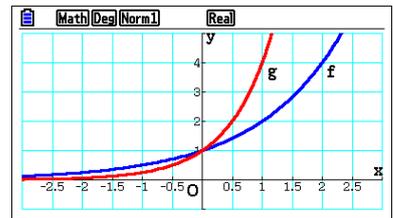


Aufgabe 2: Ableitung und Stammfunktion einer beliebigen Exponentialfunktion

In Kapitel 3 haben wir gezeigt, dass für eine beliebige Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ für den Term der Ableitung $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$ gilt. Wir wollen nun herausfinden, welchen Wert in Abhängigkeit von a der Proportionalitätsfaktor $f'(0)$ annimmt. Mithilfe des GTR¹¹ kann die Steigung an der Stelle Null bestimmt werden. Für die Funktion f mit $f(x) = 2^x$ ist dies in der Abbildung rechts dargestellt.



a) **Überprüfe** mit dem GTR die folgenden drei Aussagen für die beiden Funktionen f und g mit $f(x) = 2^x$ und $g(x) = 4^x$ (vgl. Abbildung rechts):¹²



- (1) Der Graf G_f ist an der Stelle 0 halb so steil wie der Graf G_g .
- (2) Der Graf G_f ist an jeder Stelle x_0 halb so steil wie der Graf G_g .
- (3) G_f ist an der Stelle x_0 halb so steil wie G_g bei $x_1 = \frac{1}{2} \cdot x_0$.

b) **Zeichne** mit dem GTR verschiedene Grafen von Exponentialfunktionen und **notiere** in der folgenden Tabelle $f'(0)$. **Stelle** einen funktionalen Zusammenhang zwischen a und $f'(0)$ **her**.

a	e^{-3}	e^{-2}	$e^{-1} = \frac{1}{e}$	0,5	2	$e^1 = e$	3	e^2	e^3
$f'(0) \approx$					0,6931				

c) Wir wollen nun zunächst in zwei Schritten zeigen, dass der Ableitungsterm zur Funktion f mit $f(x) = e^{kx}$ folgendermaßen lautet: $f'(x) = k \cdot e^{kx}$.

- (1) **Zeige**, dass die Funktion f mit $f(x) = e^{kx}$ eine Exponentialfunktion vom Typ $f(x) = a^x$ ist und daher für die Ableitung $f'(x) = f'(0) \cdot e^{kx}$ gilt. [Tipp: Potenzregel]
- (2) **Weise** mithilfe der h-Methode nach, dass $f'(0) = k$ ist und damit mit (1) die Behauptung erfüllt ist. **Bringe** dazu begründend die folgenden Beweisschritte in die richtige Reihenfolge.

$k \cdot \frac{e^{0+k \cdot h} - e^0}{k \cdot h} =$	$k \cdot \frac{e^{0+t} - e^0}{t} \xrightarrow[t=k \cdot h \rightarrow 0]{h \rightarrow 0}$	$\frac{e^{k \cdot (0+h)} - e^{k \cdot 0}}{h} =$	$k \cdot 1 = f'(0)$
$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$	$\frac{k}{k} \cdot \frac{e^{0+k \cdot h} - e^0}{h} =$	Für die Ableitung einer Exponentialfunktion von der Form $f(x) = e^{kx}$ gilt: $f'(x) = k \cdot e^{kx}$	$\frac{e^{0+k \cdot h} - e^0}{h} =$

Begründung			
Begründung			

¹¹ Stelle im SET UP Derivative auf ON.

¹² Idee aus Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)



Aufgabe 4: Skizzieren von Grafen, Flächenberechnung und Tangente

Gegeben seien die Funktion f mit $f(x) = 2^x$ und g mit $g(x) = -2x + 4$.

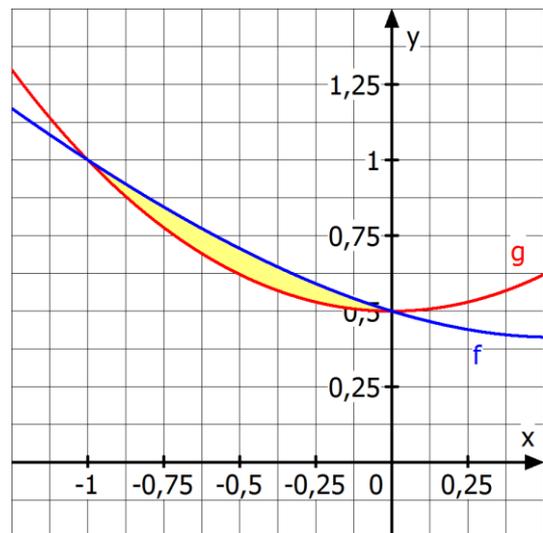
- Skizziere** die Grafen in ein Koordinatensystem.
- Weise nach**, dass $S(1/2)$ der einzige Schnittpunkt der beiden Grafen ist.
- Bestimme** mithilfe der Stammfunktionen zu f und g den Inhalt der Fläche, den die Grafen von f und g und die y -Achse einschließen.
- Bestimme** die Gleichung der Tangenten an den Grafen von f im Punkt S .
- Gesucht ist der Graf einer Exponentialfunktion der Form $f(x) = e^{k \cdot x}$ ($k \in \mathbb{R}^{\neq 0}$), der eine zu g parallele Gerade als Tangente besitzt. **Ermittle** einen Lösungsansatz für die Bestimmung der gesuchten Exponentialfunktion und **begründe**, warum $k < 0$ sein muss.



Aufgabe 5: Flächeninhalt zwischen zwei Kurven und markante Punkte

Es sind Grafen zu den beiden Funktionen f und g mit den dazugehörigen Gleichungen $f(x) = -x + 2^x - 0,5$ und $g(x) = 2^x + 2^{-x} - 1,5$ gegeben. Die Grafen sind rechts dargestellt.

- Zeige** rechnerisch, dass -1 und 0 Schnittstellen der Funktionsgraf zu f und g sind.
- Bestimme** rechnerisch den Flächeninhalt, den die beiden Grafen zu f und g einschließen (vgl. Abb.).
- Untersuche** die Grafen von f und g auf lokale und globale Extremstellen.
- Untersuche** beide Grafen auf ihr Krümmungsverhalten.



Aufgabe 6: Gilt immer – gilt nie – kommt darauf an

Entscheide begründend, ob die 6 Aussagen immer, nie oder unter bestimmten Bedingungen gelten.

- Die Grafen von f mit $f(x) = e^{k \cdot x}$ ($k \in \mathbb{R}^{\neq 0}$) haben weder Hoch- noch Tiefpunkte.
- Die Grafen von f mit $f(x) = e^{k \cdot x}$ ($k \in \mathbb{R}^{\neq 0}$) haben mit der Geraden $y = a$ genau 1 Schnittpunkt.
- Die Ableitung von f mit $f(x) = e^{k \cdot x}$ ($k \in \mathbb{R}^{\neq 0}$) ist an der Stelle $x = 0$ positiv.
- Die Grafen von f und g mit $f(x) = e^{-\ln(a) \cdot x}$ und $g(x) = a^x$ sind für $a > 0$ symmetrisch zueinander.
- Der Ableitungsgraf von f mit $f(x) = a^x$ verläuft für $a > 0$ immer oberhalb der x -Achse.
- Die Exponentialgleichung $c \cdot e^{k \cdot x} - 1 = 0$ ($c, k \in \mathbb{R}^{\neq 0}$) besitzt genau eine Lösung.

4 Natürliche Logarithmusfunktion



Aufgabe 1: Funktionspartner¹³

Im Folgenden sind 5 Aussagen und 8 Funktionen angegeben. **Ermittle** passende Begründungen für die Aussagen und ermittle fehlende Funktionspartner.

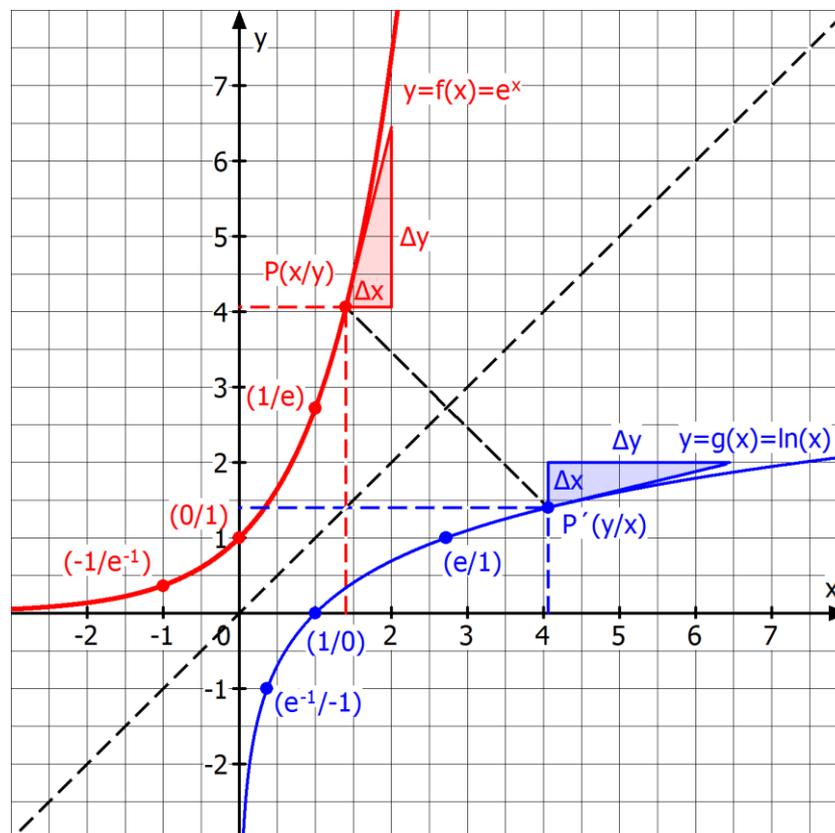
- (1) Der Funktionspartner von $y = x^2$ ist $y = \sqrt{x}$.
- (2) Der Funktionspartner von $y = x^3$ ist $y = \sqrt[3]{x}$.
- (3) Für $f(x) = x + 3$ ist keine Partnerfunktion genannt.
- (4) Der Funktionspartner von $y = 3x$ lautet $y = \frac{1}{3}x$.
- (5) Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ hat sich selbst als Partnerfunktion.

$y = x^2$	$y = \frac{1}{3}x$	$y = \sqrt{x}$	$y = 3x$	$y = x + 3$	$y = \sqrt[3]{x}$	$y = x^3$	$y = \frac{1}{x}$
-----------	--------------------	----------------	----------	-------------	-------------------	-----------	-------------------



Aufgabe 2: Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion

In der folgenden Abbildung siehst du den Grafen der natürlichen Exponentialfunktion f mit der Gleichung $f(x) = e^x$, der an der ersten Winkelhalbierenden $y = x$ gespiegelt wurde. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass der gespiegelte Graf den Grafen der natürlichen Logarithmusfunktion g mit $g(x) = \ln(x)$ darstellt, der die Ableitungsfunktion $g'(x) = \frac{1}{x}$ besitzt und **Umkehrfunktion** („Partnerfunktion“ aus Aufgabe 1) zur Funktion f genannt wird.



¹³ Aufgabenidee aus Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

- a) **Begründe** mithilfe elementargeometrischer Überlegungen, warum für den Spiegelpunkt eines beliebigen Punktes $P(x/y)$ des Grafen der natürlichen Exponentialfunktion $P'(y/x)$ gilt. [Tipp: Kongruenzsätze für Dreiecke.]
- b) In Aufgabenteil a) haben wir gezeigt, dass für einen beliebigen Punkt P des Grafen der natürlichen Exponentialfunktion den dazugehörigen Bildpunkt P' erhält, indem man x - und y -Wert vertauscht. **Führe** die Gleichung $y = e^x$ geeignet in die Gleichung $y = \ln(x)$ **über**.
- c) **Zeige** mithilfe der obigen Abbildung, den beiden Steigungsdreiecken in den Punkten P und P' sowie den Überlegungen aus a), dass die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion $y' = e^x$ geeignet in die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion $y' = \frac{1}{x}$ überführt werden kann.

Satz und Definition:

Der Graf der Funktion g , die man durch Spiegelung des Grafen der natürlichen Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ an der ersten Winkelhalbierenden erhält, ist der **Graf der natürlichen Logarithmusfunktion** mit der Gleichung $g(x) = \ln(x)$. Man nennt die Funktion g auch eine **Umkehrfunktion** der Funktion f . Das Umkehren eines Grafen einer Funktion f ist nur dann möglich, wenn zu jedem Funktionswert von f **genau ein** x -Wert existiert. Andernfalls würde man beim gespiegelten Graf einem x -Wert des Definitionsbereiches von g (= Wertebereich von f) mehr als ein Funktionswert aus dem Wertebereich von g (= Definitionsbereich von f) zuordnen, was für eine Funktion nicht möglich ist. Die wichtigsten Eigenschaften beider Funktionen sind in folgender Tabelle vergleichend dargestellt:

	Natürliche Exponentialfunktion (EXP)	Natürliche Logarithmusfunktion (LN)
Funktionsgleichung	$f(x) = e^x$	$g(x) = \ln(x)$
Graf		
Definitionsbereich	\mathbb{R}	$\mathbb{R}^{>0}$
Wertebereich	$\mathbb{R}^{>0}$	\mathbb{R}
Monotonie	streng monoton wachsend	streng monoton wachsend
Randverhalten	$x \rightarrow +\infty: f(x) \rightarrow +\infty$	$x \rightarrow +\infty: f(x) \rightarrow +\infty$
	$x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow 0$	$x \rightarrow 0: f(x) \rightarrow -\infty$
Nullstellen	keine	$x = 1$
y-Achsenschnittstelle	$y = 1$	keine
Krümmungsverhalten	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt
Ableitungsterm	e^x	$\frac{1}{x}$

- d) **Zeige** rechnerisch folgende Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion g mit $g(x) = \ln(x)$:
- (1) Die Funktion g ist auf $\mathbb{R}^{>0}$ monoton steigend und besitzt dort keine Extremstellen.
 - (2) 1 ist einzige Nullstelle von g .
 - (3) Die Funktion g ist auf $\mathbb{R}^{>0}$ rechtsgekrümmt.
 - (4) Der Graf der natürlichen Logarithmusfunktion überschreitet jede noch so große Schranke bzw. unterschreitet jede noch so kleine (betragsmäßig große) Grenze.
- e) **Gib** Beispiel für Funktionen an, die nicht auf ihrem gesamten Definitionsbereich umkehrbar sind. **Erläutere** bei diesen Funktionen die entsprechende Vorgehensweise für das Umkehren.

Merksatz: Da zu g mit $g(x) = \ln(x)$ für die Ableitung g' die Gleichung $g'(x) = \frac{1}{x}$ gilt, ist umgekehrt F mit $F(x) = \ln(x)$ für $x > 0$ eine Stammfunktion zu f mit $f(x) = \frac{1}{x}$.



Aufgabe 3: Flächenberechnung im Kontext der natürlichen Logarithmusfunktion

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und eine Gerade g mit $g(x) = -x + 2,5$.

- a) **Skizziere** beide Grafen in ein Koordinatensystem.
- b) **Berechne** die Schnittpunkte beider Grafen zu f und g .
- c) **Bestimme** der Inhalt der Fläche, den die Grafen von f und g vollständig umschließen.
- d) **Berechne** den Flächeninhalt, den der Graf der Funktion f über dem Intervall $[1; 10]$ mit der x -Achse einschließt.
- e) **Untersuche** die Integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ und $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ auf Existenz und **deute** das Ergebnis geometrisch.



Aufgabe 4: Flächenberechnung bei zusammengesetzten Funktionen

Berechne mithilfe der Stammfunktion den Inhalt der Fläche, den der Graf der Funktion f über dem Intervall I mit der x -Achse einschließt.

- a) $f(x) = \frac{1}{3x} + x$ und $I = [1; 3]$ b) $f(x) = \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}$ und $I = [1; 2]$ c) $f(x) = e^{2x} + \frac{1}{2x}$ und $I = [1; 2]$



Aufgabe 5: Wahr oder falsch¹⁴

Begründe die jeweilige Aussage oder **widerlege** sie durch ein Gegenbeispiel.

- (1) Ist eine ganzrationale Funktion gerade, ist sie nicht umkehrbar.
- (2) Ist eine ganzrationale Funktion nicht umkehrbar, dann ist sie gerade.
- (3) Hat eine ganzrationale Funktion keine Extremstellen, dann ist sie umkehrbar.
- (4) Ist eine ganzrationale Funktion umkehrbar, hat sie keine Extremstellen.
- (5) Jede umkehrbare Funktion ist monoton zunehmend oder monoton abnehmend.
- (6) Für die Funktion f mit $f(x) = x^2 (x > 0)$ ist g mit $g(x) = \sqrt{x}$ die Umkehrfunktion.

¹⁴ Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)



Aufgabe 6: Komplexe Aufgabe

Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = e^{2x}$ und g mit $g(x) = \ln(\sqrt{x})$ ($x > 0$).

a) **Zeige**, dass $g(x) = \frac{1}{2} \ln(x)$ und g für $x > 0$ eine Umkehrfunktion zu f ist.

b) **Weise** folgende Behauptungen **nach**:

(1) Die Funktion g hat die Nullstelle $x = 1$.

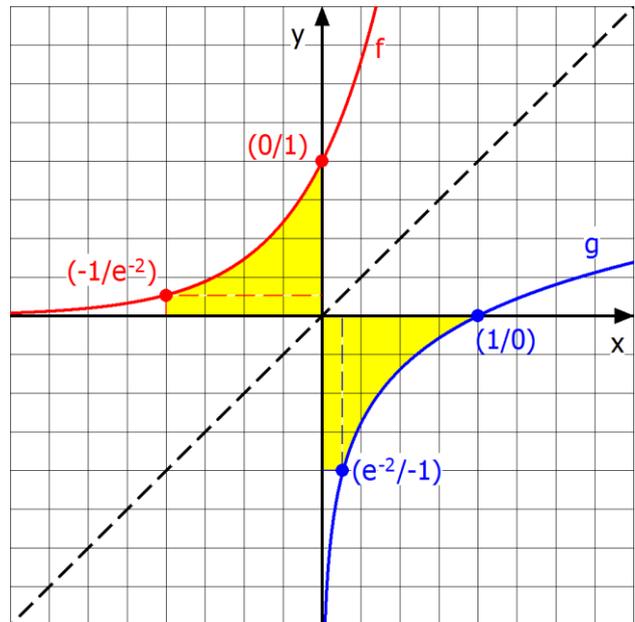
$$(2) \int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2}$$

$$(3) \int_{e^{-2}}^1 g(x) dx = \frac{3}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}$$

$$(4) \int_{-\infty}^0 f(x) dx = - \int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2}$$

c) **Ermittle** mithilfe von g' die Gleichung der Tangente t an den Grafen von f im Punkt $(1/0)$. [Kontrollergebnis: $t(x) = 0,5x - 0,5$]

d) **Bestimme** mithilfe von c) (4) den Inhalt der unbeschränkten Fläche, welche die Tangente t und der Graf von g über dem Intervall $[0; 1]$ und die y -Achse begrenzen.



5 Wachstumsvorgänge



Aufgabe 1: Populationsdynamik

In der **Populationsdynamik** wird die Frage untersucht, wie sich ein Bestand von Individuen $B(t)$ im Laufe der Zeit verändert. Die Wachstumsgeschwindigkeit des Bestands $B'(t)$ ist beim linearen Wachstum zu jedem Zeitpunkt konstant. Im Folgenden sollst du Wachstumsarten untersuchen, bei denen sich die Wachstumsgeschwindigkeit $B'(t)$ zu jedem Zeitpunkt ändert. Die folgende Tabelle benennt drei Wachstumsarten, gibt die Eigenschaft von $B'(t)$ an und zeigt einen möglichen Grafenverlauf für den Bestand $B(t)$.

Wachstumsart	exponentiell	beschränkt	logistisch
Eigenschaften von $B'(t)$	Die Wachstumsgeschwindigkeit $B'(t)$ ist proportional zum Bestand $B(t)$: $B'(t) = k \cdot B(t)$	Die Wachstumsgeschwindigkeit $B'(t)$ ist proportional zum Sättigungsmanko $S - B(t)$ (= Differenz aus Sättigungsgrenze S und Bestand $B(t)$): $B'(t) = k \cdot (S - B(t))$	Die Wachstumsgeschwindigkeit $B'(t)$ ist proportional zum Bestand und zum Sättigungsmanko: $B'(t) = k \cdot B(t) \cdot (S - B(t))$
Verlauf des Bestandes $B(t)$			
Beispiel	Algenwachstum	Leistungszuwachs im 100-m-Sprint	Verbreitung eines Gerüchts

- Gib** für alle Wachstumsarten den Anfangsbestand $B(0)$ an und **trage** ihn jeweils in die Abbildungen ein.
- Beim beschränkten und logistischen Wachstum wird für die Population eine Sättigung S angenommen, da es begrenzende Faktoren wie Nahrung, Lebensraum, Nistplätze usw. gibt. **Gib** jeweils die Sättigungsgrenze S an und **zeichne** die Werte in die Abbildungen ein.
- Erläutere** die angegebenen Beispiele und **gib** weitere Beispiele für die Wachstumsarten an. **Ordne** begründend zu jeder Wachstumsart eine der folgenden Prozesse zu: Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit, Guthabenzunahme auf einem Sparkonto, Erwärmung eines Tiefkühlprodukts bei Zimmertemperatur.
- Untersuche** mit dem GTR, welche der Wachstumsarten welcher der drei Bestandsfunktionen zugeordnet werden kann.

$$B_1(t) = 10 - (10 - 2)e^{-0,22t} \quad B_2(t) = \frac{2 \cdot 10}{2 + (10 - 2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}} \quad B_3(t) = 2 \cdot e^{0,22t}$$

- e) **Zeige**, dass $B_1(t)$ und $B_3(t)$ die dazugehörige Differentialgleichung aus Wachstumsgeschwindigkeit $B'(t)$ und Bestand $B(t)$ aus der obigen Tabelle erfüllen.¹⁵
- f) **Entscheide** begründend, zu welcher Wachstumsform die Formulierungen am ehesten passen.¹⁶

FORMULIERUNG	WACHSTUMSFORM
(1) Marcel ist 9 Jahre alt und erhält 2,50€ Taschengeld pro Woche. Zu jedem Geburtstag erhält er eine Erhöhung des Taschengeldes von 50Cent. Zu dem Betrag von 5€ „fehlen ihm“ noch 5 Jahre.	<input type="checkbox"/> linear <input type="checkbox"/> logistisch <input type="checkbox"/> exponentiell <input type="checkbox"/> beschränkt <input type="checkbox"/> kein Wachstum
(2) Das mobile Kommunikationsgerät „e-banana“ wird neu auf dem Markt eingeführt. Die Absatzzahlen hängen linear davon ab, wie viele Geräte schon verkauft sind und wie viele noch verkauft werden können.	<input type="checkbox"/> linear <input type="checkbox"/> logistisch <input type="checkbox"/> exponentiell <input type="checkbox"/> beschränkt <input type="checkbox"/> kein Wachstum
(3) Eine Grünpflanze erreicht eine maximale Wuchshöhe von 2,70m. Je kleiner die Pflanze, desto schneller wächst sie.	<input type="checkbox"/> linear <input type="checkbox"/> logistisch <input type="checkbox"/> exponentiell <input type="checkbox"/> beschränkt <input type="checkbox"/> kein Wachstum
(4) Frau Wegner legt ihr Geld in einem Rentenfond an, der ihr jährlich einen Zinssatz 3,5 % garantiert.	<input type="checkbox"/> linear <input type="checkbox"/> logistisch <input type="checkbox"/> exponentiell <input type="checkbox"/> beschränkt <input type="checkbox"/> kein Wachstum
(5) Im Verlauf eines Tages steht die Sonne unterschiedlich hoch.	<input type="checkbox"/> linear <input type="checkbox"/> logistisch <input type="checkbox"/> exponentiell <input type="checkbox"/> beschränkt <input type="checkbox"/> kein Wachstum
(6) Stellt man ein 25°C warmes Getränk in den Kühlschrank, so kühlt es ab, weil es sich seiner Umgebungstemperatur anpasst.	<input type="checkbox"/> linear <input type="checkbox"/> logistisch <input type="checkbox"/> exponentiell <input type="checkbox"/> beschränkt <input type="checkbox"/> kein Wachstum
(7) In einer Herde mit 750 Tieren sterben jährlich 3 % der Tiere; allerdings werden pro Jahr auch 15 Neue geboren.	<input type="checkbox"/> linear <input type="checkbox"/> logistisch <input type="checkbox"/> exponentiell <input type="checkbox"/> beschränkt <input type="checkbox"/> kein Wachstum
(8) Sandra und Maria setzen ein Gerücht in die Welt. Seine Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt zum einen davon ab, wie viele Leute das Gerücht schon vernommen haben; zum anderen davon, wie viele das Gerücht noch erreichen kann.	<input type="checkbox"/> linear <input type="checkbox"/> logistisch <input type="checkbox"/> exponentiell <input type="checkbox"/> beschränkt <input type="checkbox"/> kein Wachstum
(9) Das radioaktive Kohlenstoff-Isotop C-14 zerfällt mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren.	<input type="checkbox"/> linear <input type="checkbox"/> logistisch <input type="checkbox"/> exponentiell <input type="checkbox"/> beschränkt <input type="checkbox"/> kein Wachstum

¹⁵ Der Nachweis, dass B_2 die entsprechende Differenzialgleichung erfüllt, bedarf weiterer Ableitungsregeln (z. B. Kettenregel)

¹⁶ Aus dem Zusatzmaterial des Fokus Mathematik für die Q-Phase, Cornelsen-Verlag (2014)



Aufgabe 2: Exponentielles Wachstum

- a) Bei einem Würfelspiel wird eine bestimmte Anzahl von Würfeln geworfen. Alle Sechsen werden aussortiert. Dann werden die übrigen Würfel geworfen und die Sechsen werden aussortiert. So geht es weiter. Leah spielt das Spiel. Nach 10 Würfeln hat sie noch 5 Würfel. **Untersuche**, wie viele sie vermutlich zu Beginn hatte.¹⁷

Definition: Eine Gleichung, die den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen beschreibt, heißt **Differentialgleichung**.

Satz: Eine Bestandsfunktion der Form $\mathbf{B(t) = B(0) \cdot e^{kt}}$ beschreibt exponentielles Wachstum. Sie modelliert für $\mathbf{k > 0}$ eine **exponentielle Zunahme**, für $\mathbf{k < 0}$ eine **exponentielle Abnahme** und erfüllt eine Differentialgleichung der Form $\mathbf{B'(t) = k \cdot B(t)}$.

- b) **Innermathematische Zusammenhänge:**

- (1) **Beweise** die Richtigkeit des Satzes.¹⁸
- (2) **Zeige**, dass folgende Aussage gilt: Ist die Funktion B in der Form $\mathbf{B(t) = B(0) \cdot a^t}$ mit dem Wachstumsfaktor $a > 0$ gegeben, so erhält man durch $\mathbf{k = \ln(a)}$ den Basiswechsel von der Basis a zur Basis e . Es gilt: $\mathbf{B(t) = B(0) \cdot e^{kt} = B(0) \cdot a^t}$.¹⁹
- (3) **Gib** für die Beispielfunktion B_3 die Proportionalitätskonstante k **an** und **bestimme** den Wachstumsfaktor a .

- c) **Bevölkerungswachstum:** Im Jahre 1950 lebten 2,5 Milliarden Menschen auf der Erde, 1980 waren es 4,5 Milliarden. Das Bevölkerungswachstum wird durch eine exponentielle Bestandsfunktion B mit $B(t) = B(0) \cdot e^{kt}$ beschrieben.

- (1) **Ermittle** die Wachstumskonstante k , den Wachstumsfaktor a .
- (2) **Bestimme** die Verdopplungszeit und **interpretiere** das Ergebnis im Sachzusammenhang.
- (3) **Vergleiche** die Ergebnisse der Modellfunktion mit den Daten für 2005 (6,4 Milliarden) bzw. 1920 (1,8 Milliarden) und **berechne** jeweils die prozentuale Abweichung des Modellwertes vom tatsächlichen Wert.

- d) **Bakterienwachstum:** In einer Bakterienkultur wird stündlich die Anzahl der Bakterien gezählt.

Zeit t (in h)	0	1	2	3	4	5
Bakterienanzahl $B(t)$	80	145,9	266,4	482,4	875,7	1597,8
$\mathbf{a = \frac{f(t+1)}{f(t)}}$		1,824	1,826	1,811	1,815	1,825
Wachstumsgeschwindigkeit $B'(t)$						

- (1) **Zeige**, dass es sich um ein exponentielles Wachstum handelt und **bestimme** die Bestandsfunktion B der Formen $B(t) = B(0) \cdot e^{kt} = B(0) \cdot a^t$ (k auf 4 Nachkommastellen).

¹⁷ Aus Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

¹⁸ Für die Funktion B_3 hast du dies in Aufgabe 1 e) bereits erledigt.

¹⁹ Vergleiche Kapitel 4 Merksatz (2) unter Aufgabe 1

- (2) **Bestimme** mit dem GTR die Wachstumsgeschwindigkeiten $B'(t)$ zu den Zeitpunkten in der Tabelle.
- (3) **Gib** einen Term für die Wachstumsgeschwindigkeit $B'(t)$ an und **berechne**, wann sich die Wachstumsgeschwindigkeit verdoppelt hat.
- e) **Bestimmung einer Zerfallsfunktion:** Zur Untersuchung der Langzeitwirkung eines Medikaments wurde einer Versuchsperson eine Dosis von 70 mg verabreicht und im täglichen Abstand die Konzentration des Medikaments im Blut gemessen.

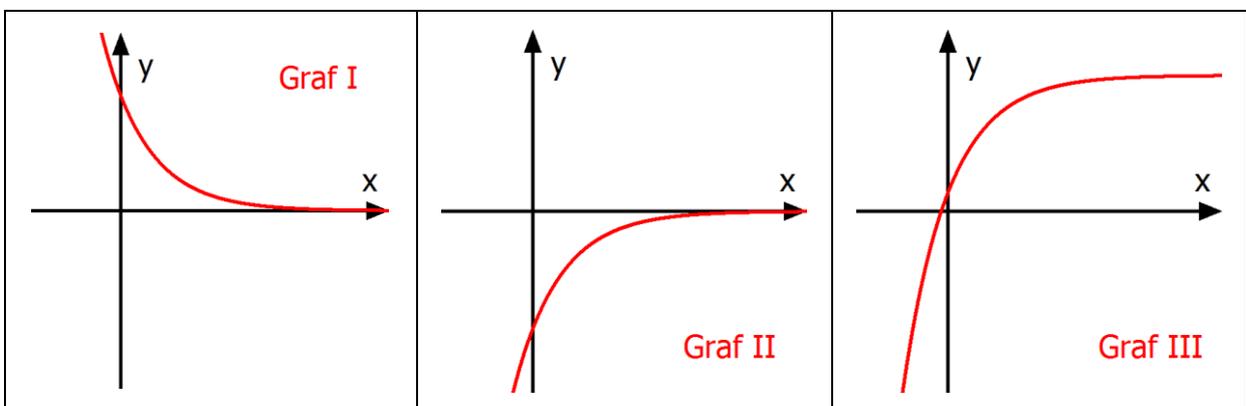
Zeit t (in Tagen)	0	1	2	3	4	5
Konzentration (in mg/l)	10	7,20	5,18	3,73	2,68	1,98
$a = \frac{f(t+1)}{f(t)}$						

- (1) **Zeige**, dass es sich um eine exponentielle Abnahme handelt und **bestimme** die Bestandsfunktion B der Form $B(t) = B(0) \cdot e^{kt}$ (k auf 4 Nachkommastellen).
- (2) **Ermittle** eine zweite exponentielle Funktion C falls nur bekannt ist, dass die Konzentrationen nach 2 Tagen 5 mg/l und nach 5 Tagen 2 mg/l betragen.
- f) **Exponentielles Wachstum und Integralrechnung:** Die Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze (in cm pro Woche) kann durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden: $v(t) = 3,8 \cdot 0,9^t$. Dabei gibt t die Anzahl der Wochen seit dem Einpflanzen der Pflanze an. Zu Beginn bei $t = 0$ war die Pflanze 10 cm hoch.
- (1) **Berechne** mithilfe der Funktion v die zu erwartende Höhe der Pflanze 10 Wochen nach dem Einpflanzen.
- (2) **Ermittle** die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit innerhalb der ersten 10 Wochen.
- (3) **Bestimme** die Halbwertszeit der Wachstumsgeschwindigkeit.
- (4) **Interpretiere** das Integral $\int_0^t v(x) dx$ im Sachkontext.



Aufgabe 3: Beschränktes Wachstum²⁰

- a) Im Folgenden sind drei Grafen gegeben.



²⁰ Ideen aus Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

- (1) **Gib an**, welche Transformationen den Grafen I in den Grafen III überführen.
- (2) Graf I gehört zur Funktionsgleichung f mit $f(x) = ce^{kx}$. **Erläutere**, was man über die Parameter c und k sagen kann.
- (3) **Nenne** eine mögliche Funktionsgleichung für den Grafen III.

Satz: Eine Bestandsfunktion $\mathbf{B(t) = S - (S - B(0)) \cdot e^{-kt}}$ ($k > 0$) beschreibt beschränktes Wachstum und erfüllt eine Differentialgleichung der Form $\mathbf{B'(t) = k \cdot (S - B(t))}$. Die Wachstumsgeschwindigkeit $B'(t)$ des beschränkten Wachstums ist proportional zum Sättigungsmanko $S - B(t)$.

- b) **Ökologische Ackernutzung:** In einem landwirtschaftlich genutzten Gebiet mit einer Gesamtfläche von 700 ha beginnen einige Bauern auf einer Fläche von 80 ha ihre Felder ökologisch zu bewirtschaften. Sie erwarten, dass sich in jedem der folgenden Jahre die Besitzer von 10% der jeweils restlichen Anbaufläche ihrer Anbaumethode anschließen werden.
- (1) **Bestimme** für die nächsten 5 Jahre die jeweils ökologisch genutzte Ackerfläche.
 - (2) **Skizziere** ein Schaubild, wie sich unter der genannten Erwartung die ökologisch genutzte Ackerfläche in Abhängigkeit von der Zeit verändert und **erläutere**, warum es sich dabei um ein beschränktes Wachstum handelt.
 - (3) **Bestimme** eine Funktionsgleichung $f(t)$, welche die ökologisch genutzte Ackerfläche nach t Jahren angibt.
- c) **Abkühlen von Kaffee:** Frisch aufgebrühter 80°C heißer Kaffee wird in einem 20°C warmen Raum stehen gelassen. $f(t)$ sei nun die Temperatur des Kaffees zum Zeitpunkt t . In der folgenden Wertetabelle wird die Temperatur $B(t)$ des Kaffees, die Temperaturdifferenz $D(t) = 20 - B(t)$ zur Raumtemperatur und die Wachstumsgeschwindigkeit $B'(t)$ für die Zeitpunkte $t = 0, 1, \dots, 10$ angegeben.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B(t)	80	71	63,4	56,8	51,3	46,6	42,6	39,2	36,3	33,9	31,8
B'(t)	-9,8	-8,3	-7,1	-6	-5,1	-4,3	-3,7	-3,1	-2,7	-2,3	-1,9
D(t) = 20 - B(t)	-60	-51	-43,4	-36,8	-31,3	-26,6	-22,6	-19,2	-16,3	-13,9	-11,8
B'(t):D(t)											

- (1) **Zeichne** den Grafen zu B.
 - (2) **Berechne** den Quotienten aus Abkühlgeschwindigkeit und Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur für die Zeitpunkte $t = 0, 1, \dots, 10$ und **begründe**, dass es sich bei der Funktion B um ein beschränktes Wachstum handelt.
 - (3) **Ermittle** eine Funktion, dessen Graf den Verlauf des Abkühlvorgangs gut wiedergibt (runde k auf die vierte Nachkommastelle). [Zur Kontrolle: $B(t) = 20 + 60 \cdot e^{-0,1625t}$.]
 - (4) **Berechne** mit Hilfe des Funktionsterms die Temperatur des Kaffees nach 20 Minuten und den Zeitpunkt, an dem der Kaffee die Temperatur von 40°C unterschritten hat.
 - (5) **Gib** die Abkühlungsrate (in $\frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$) der noch vorhandenen Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur **an**.
- d) **Karpfenpopulation:** In einem Karpfenteich, in dem 1000 Karpfen leben können, werden zu Beginn 100 Tiere ausgesetzt. Diese vermehren sich so, dass die jährliche Zuwachsgeschwindigkeit 15% des Unterschiedes zwischen 1000 und aktuellem Fischbestand beträgt. **Ermittle** den Term für die Anzahl der Fische im Teich in Abhängigkeit von der Zeit.

- e) **Wachstum einer Sonnenblume:** Unter günstigen Bedingungen kann eine Sonnenblume 3 m groß werden. Wöchentlich kann sie um 12% der Differenz zwischen 3 m und aktueller Höhe wachsen. Eine Pflanze ist am Anfang 50 cm hoch. **Bestimme** den Term für ihre Größe in Abhängigkeit von der Zeit.
- f) **Kabelanschluss:** Eine Gemeinde mit 5000 Haushalten erhält Kabelanschluss. Zu Beginn werden 200 Haushalte angeschlossen. Danach kommen monatlich 5% der Differenz zu 5000 hinzu. **Ermittle** den Term für die Anzahl der Haushalte in Abhängigkeit von der Zeit und **untersuche**, ab wann 90 % aller Haushalte verkabelt sind.
- g) **Fieberentwicklung:** Ein Patient hat Fieber mit 40°C Körpertemperatur. Er erhält ein fiebersenkendes Mittel, das die Körpertemperatur nach Wirkungseintritt stündlich um 80% der Differenz zur normalen Körpertemperatur von 36,8°C erniedrigt. **Gib** den Term für die Körperkerntemperatur an.
- h) **Beschränktes Wachstum und Integralrechnung:**

Eine Tasse Tee hat eine Ausgangstemperatur von 80 °. Die Umgebungstemperatur beträgt 25 °C. Die momentane Änderungsrate der Temperatur des Tees (in °C pro Minute) kann näherungsweise durch die Funktion v mit $v(t) = -6,6 \cdot e^{-0,12t}$ beschrieben werden.

- (1) **Bestimme** eine Stammfunktion von v .
 - (2) **Berechne** mithilfe einer Stammfunktion $\int_0^{10} v(t) dt$ und $\frac{1}{10-0} \int_0^{10} v(t) dt$ und **deute** die beiden Werte im obigen Sachkontext.
 - (3) **Gib** eine Funktion f **an**, mit der die Temperatur nach t Minuten beschrieben werden kann.
 - (4) **Untersuche**, wann die Temperatur des Tees auf 40 °C abgekühlt ist.
 - (5) **Stelle** die Grafen von f und v in einem Koordinatensystem **dar**.
- i) **Exponentielles Wachstum mit $k < 0$:**
- (1) **Gib** die Sättigungsgrenze S , den Anfangswert $B(0)$, den Proportionalitätsfaktor k und den Wachstumsfaktor a für die beiden Zerfallsfunktionen B und C aus Aufgabe 2 e) **an**.
 - (2) **Begründe**, dass es sich bei der exponentiellen Abnahme im Rahmen des exponentiellen Wachstums ($k < 0$) um einen Spezialfall des beschränkten Wachstums handelt.



Aufgabe 4: Logistisches Wachstum²¹

Bei vielen Wachstumsvorgängen in der Natur fällt auf, dass das Wachstum anfangs annähernd exponentiell verläuft. Mit zunehmender Zeitdauer verlangsamt es sich allerdings und kommt schließlich zum Erliegen.

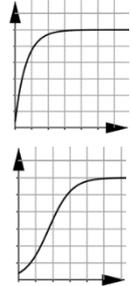
Beschreibt man diesen Verlauf mithilfe der momentanen Wachstumsgeschwindigkeit $B'(t)$, so ist anfangs, wenn das Wachstum annähernd exponentiell verläuft, $B'(t)$ in etwa proportional zum momentanen Bestand $B(t)$. Gegen Ende des Beobachtungszeitraumes nähert sich das Wachstum dem beschränkten Wachstum, damit ist $B'(t)$ näherungsweise proportional zum Sättigungsmanko $S - B(t)$, wobei S die Sättigungsgrenze ist. Insgesamt kann bei der beschriebenen Situation angenommen werden, dass $B'(t)$ zum Produkt aus $B(t)$ und $S - B(t)$ proportional ist. Wachstum, das in dieser Form beschrieben werden kann, heißt **logistisches Wachstum**.

²¹ fakultativ

Dabei gilt folgender Satz:

Satz: Eine Bestandsfunktion $B(t) = \frac{B(0) \cdot S}{B(0) + (S - B(0)) \cdot e^{-k \cdot S \cdot t}}$ ($k > 0$) beschreibt logistisches Wachstum und erfüllt eine Differentialgleichung der Form $B'(t) = k \cdot B(t) \cdot (S - B(t))$.

- a) **Verbreitung von Gerüchten:** Bei zwei unterschiedlichen Gruppen von amerikanischen Farmern wurde untersucht, wie sich Informationen zu einem neuen Düngemittel verbreiten. Die Farmer der ersten Gruppe lebten weitgehend isoliert und erhielten ihre Informationen vorwiegend aus Fachzeitschriften und Massenmedien. Die der zweiten Gruppe hatten intensiven Umgang miteinander und wurden überwiegend durch „Mund-zu-Mund-Propaganda“ informiert. Für den Informationsgrad B in Abhängigkeit von der Zeit ergaben sich zwei Graphen, die am rechten Rand dargestellt werden. **Begründe** welcher Graph zu welcher Gruppe gehört.



- b) **Hopfen und Malz:** Hopfen, der zur Herstellung von Bier benötigt wird, ist eine schnell wachsende Schlingpflanze. Um Aussagen über das Höhenwachstum zu machen, wurde bei einer Untersuchung die folgende Messreihe aufgenommen:

Zeit t in Wochen	0	2	4	6	8	10	12	16
Höhe $B(t)$ in m	0,6	1,2	2,0	3,3	4,1	5,0	5,5	5,8

- (1) **Trage** die Messwerte in ein geeignetes Koordinatensystem **ein**.
 - (2) **Lege** anhand der Tabelle den Anfangswert $B(0)$ und die Sättigungsgrenze S des Wachstums **fest** und **gib** die dazugehörige Differentialgleichung **an**, wenn man logistisches Wachstum voraussetzt.
 - (3) **Bestimme** die fehlenden Parameter k mithilfe eines Messpunktes und **gib** eine mögliche Funktionsgleichung $B(t)$ an.
 - (4) **Zeichne** den Graphen von B in das vorhandene Koordinatensystem.
 - (5) **Bestimme** die Höhe des Hopfens nach 18 Wochen.
 - (6) **Untersuche** mit und ohne GTR, ob der Hopfen nach 4 Wochen schneller wächst als nach 8 Wochen.
- c) **Krankheitsentwicklung:** Im tropischen Regenwald lebt isoliert ein 5000 Menschen zählender Indianerstamm. Einer seiner Bewohner wird unabsichtlich mit einer ungefährlichen, aber sehr ansteckenden Grippe infiziert. Durch gegenseitige Ansteckung in den darauffolgenden Wochen zählt man nach 4 Wochen bereits 300 Kranke. Um die Ausbreitung dieser Grippe zu modellieren, geht man von logistischem Wachstum der Anzahl B der Erkrankten aus.
- (1) **Erläutere**, was für diese Annahme eines logistischen Wachstums spricht.
 - (2) **Bestimme** den Funktionsterm $B(t)$.
 - (3) **Untersuche**, nach welcher Zeit die Hälfte der Stammesbewohner krank ist und **gib an**, welche Bedeutung dieser Zeitpunkt für die weitere Ausbreitung der Krankheit hat.
 - (4) **Ermittle** die mittlere Zunahme an Erkrankten pro Woche in den ersten 2 Monaten.

6 Kontrollaufgaben

Kompetenzraster zu den Kontrollaufgaben

Kompetenzen im Bereich der hilfsmittelfreien Aufgaben

Ich kann ...	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
den Graf einer Exponentialfunktion sowie einer Tangente an den Grafen der Exponentialfunktion skizzieren.	1a)				
eine Gleichung einer Tangente an den Grafen einer Exponentialfunktion rechnerisch mittels Ableitungsterm bestimmen.	1b)				
die Funktionsgleichung eines transformierten Grafen angeben.	1c)				
begründend Funktionsgleichungen von Exponentialfunktionen entsprechenden Grafen zuordnen.	2a)				
mithilfe von Funktionsgleichungen und grafisch beschreiben, wie ein Graf einer Exponentialfunktion durch einfache Transformationen aus dem Grafen einer natürlichen Exponentialfunktion hervorgeht.	2b), 2c), 2d)				
Exponentialgleichungen lösen.	3a)				
Integrale mithilfe von Stammfunktionen aus der Funktionsklasse von natürlicher Exponential- und Logarithmusfunktion lösen.	3b)				
Aussagen zu einer Geschwindigkeitsfunktion eines beschränkten Wachstumsprozesses begründend überprüfen, ob sie wahr oder falsch sind.	4				
höhere Ableitungen von \sinh und \cosh bestimmen und eine Regelmäßigkeit erkennen.	5a)				
rechnerisch zeigen, dass die Grafen von \sinh und \cosh keine Schnittpunkte haben.	5b)				
die Grafen von \sinh und \cosh auf Symmetrie prüfen.	5c)				
die Grafen von \sinh und \cosh auf globale Extremstellen und Krümmungsverhalten untersuchen.	5d), 5e)				
Flächeninhalte von beschränkten und unbeschränkten Flächen, die durch die Grafen von \sinh und \cosh begrenzt werden mit einer Stammfunktion berechnen.	5f)				
$[\cosh(x)]^2 - [\sinh(x)]^2 = 1$ beweisen.	5g)				

Kompetenzen im Bereich der Aufgaben unter Nutzung von Hilfsmitteln

Ich kann ...	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
eine beliebige Exponentialfunktion von der Basis 2 mithilfe des natürlichen Logarithmus zur Basis e darstellen.	1a)				
mithilfe der Ableitung Tangenten an den Grafen einer beliebigen Exponentialfunktion bestimmen.	1b)				
den Grafen einer Exponentialfunktion sowie zweier Tangenten mithilfe des GTR in einem Koordinatensystem darstellen.	1c)				
unter Nutzung einer Stammfunktion Flächeninhalte von unbeschränkten und beschränkten Flächen berechnen, die durch den Graf einer Exponentialfunktion und der x-Achse sowie zweier Tangenten und der x-Achse begrenzt werden.	1d)				
rechnerisch nachweisen, dass bei einer Exponentialfunktion eine Streckung in y-Richtung gleichbedeutend ist mit einer geeigneten Verschiebung in x-Richtung.	1e)				
auf der Basis von Datenvorgaben rechnerisch die Parameter a und b einer exponentiellen Wachstumsfunktion der Form $f(t) = a \cdot e^{bt}$ ermitteln.	2a)				
mit einer Modellfunktion Problemstellungen lösen, bei denen Exponentialgleichungen gelöst werden müssen.	2b), 3a)				
den Ableitungsterm einer exponentiellen Wachstumsfunktion berechnen und ihre Bedeutung im Sachzusammenhang angeben.	2c)				
Geschwindigkeiten einer Bestandsfunktion zum beschränkten Wachstum mithilfe des GTR bestimmen und grafisch darstellen.	2d)				
begründen, warum eine vorgegebene Modellfunktion ungeeignet ist, um einen Wachstumsvorgang zu modellieren.	2e)				
einen Grafen zum beschränkten Wachstum im vorgegebenen Kontext skizzieren.	2f)				
begründen, warum eine Funktionsgleichung zum Wachstumsprozess des beschränkten Wachstums passt.	2f), 3f)				
Parameter c, d und k einer Funktionsgleichung $f(t) = c - d \cdot e^{-kt}$ zum beschränkten Wachstum im Sachkontext interpretieren und passende Werte für c, d und k angeben.	2g), 3f), 3g)				
durch Termumformung und Angabe von Parametern zeigen, dass eine Funktionsgleichung von der Form $f(t) = c \cdot e^{kt}$ ist und ein exponentielles Wachstum beschreibt.	3b)				
Parameter c und k einer Funktionsgleichung $f(t) = c \cdot e^{kt}$ zum exponentiellen Wachstum im Sachkontext interpretieren und den Wachstumsfaktor $a = e^k$ angeben.	3c)				
mittels Ableitungen der Modellfunktion nachweisen, dass der Graf einer Funktion streng monoton wachsend und linksgekrümmt ist.	3d)				
den Randwert als maximale Steigung identifizieren und die zugehörige Wachstumsgeschwindigkeit mittels Ableitung berechnen.	3e)				
die Tauglichkeit einer Modellfunktion für einen bestimmten Zeitraum kritisch prüfen.	3e)				

mittels Integralrechnung die Bestandsfunktion eines beschränkten Wachstums bestimmen, wenn die Funktion zur Wachstumsgeschwindigkeit gegeben ist.	3f)				
durch Termumformung und Angabe von Parametern zeigen, dass eine Funktionsgleichung von der Form $f(t) = S - d \cdot e^{-kt}$ ist und ein beschränktes Wachstum beschreibt.	3f)				
prüfen, ob eine Übergangsstelle zweier Teilfunktionen knickfrei ist.	3f)				
auf der Basis von Datenvorgaben rechnerisch die Parameter S , d und k einer beschränkten Wachstumsfunktion der Form $f(t) = S - d \cdot e^{-kt}$ ermitteln.	3g)				
<i>nachweisen, dass einen Funktion logistisches Wachstum beschreibt.</i>	3h)				
anhand des Krümmungsverhaltens begründen, welches Modell am besten geeignet ist.	3h)				
ein Verfahren beschreiben, mit dem man die größte Differenz zwischen Modellfunktion f und der Funktion h in einem Intervall berechnen kann.	3h)				



Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

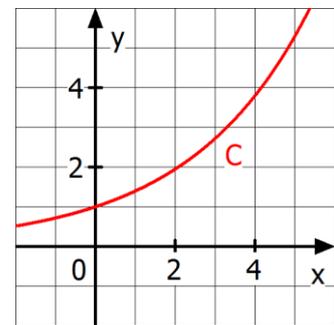
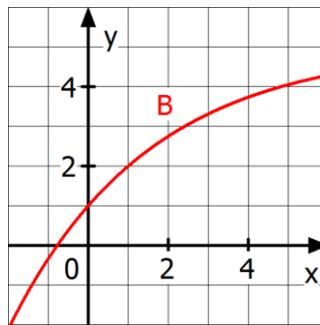
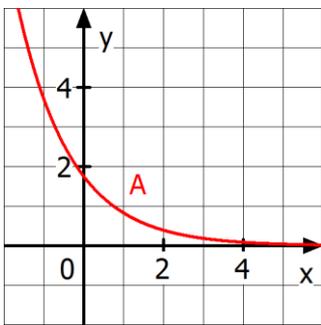
Aufgabe 1: Skizzieren eines Grafen, Tangente und Punktspiegelung.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot e^{0,5x}$.

- Skizziere den Grafen von f und die Tangente t an den Grafen an der Stelle 2.
- Berechne die Gleichung der Tangenten t an den Grafen von f an der Stelle $x = 2$.
- Der Graf von f wird am Ursprung gespiegelt. Bestimme den dazugehörigen Funktionsterm.

Aufgabe 2: Transformationen von Exponentialfunktionen

Gegeben sind drei Grafen und sechs Funktionsgleichungen.



$$f_1(x) = 5 - 4 \cdot 0,75^x$$

$$f_4(x) = \frac{7}{4} \cdot e^{-\frac{3}{4}x}$$

$$f_2(x) = e^{\frac{1}{3}x}$$

$$f_5(x) = 5 + 4 \cdot e^{-0,7x}$$

$$f_3(x) = 5 - 4 \cdot e^x$$

$$f_6(x) = 5 - 4 \cdot e^{\ln(0,75)x}$$

- Ordne jedem Graf die passenden Funktionsgleichungen zu.²² Begründe Dein Vorgehen.
- Gib die Transformationen an, die notwendig sind, um vom Grafen der natürlichen Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ zum Grafen zur Funktion f_5 zu gelangen.
- Beschreibe, wie sich eine Funktionsgleichung verändern, wenn man bei der Beschriftung der
 - y-Achse alle Werte verdoppelt bzw. halbiert.
 - x-Achse alle Werte verdoppelt bzw. halbiert.
- Gib für die Vorgänge (1) und (2) die Funktionsgleichungen an, die man in Bezug auf die Ausgangsfunktion f_1 und f_2 erhält.

Aufgabe 3: Gleichungen und Integrale lösen

- Bestimme die Zahl x , die folgende Gleichungen löst.

$$e^{x+1} = 7 \quad e^x = \frac{1}{e} \quad \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(10) \quad e^x + 7 = 0 \quad \ln(x) = 6 \quad e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$$

- Berechne mithilfe der Stammfunktion folgende Integrale.

$$\int_0^{\ln(3)} e^x dx \quad \int_0^{\ln(3)} e^{2x} dx \quad \int_1^3 (e^x + x + 1) dx \quad \int_1^e \frac{1}{x} dx \quad \int_1^e \left(\frac{2}{5x} + \sqrt{x} \right) dx \quad \int_1^e \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx$$

²² Es kann auch mehr als eine Funktionsgleichung zugeordnet werden.

Aufgabe 4: Sinkgeschwindigkeit eines Steins²³

Ein Stein sinkt in einem See. Für seine Sinkgeschwindigkeit gilt: $v(t) = 2,5 \cdot (1 - e^{-0,1t})$. Dabei ist t die Zeit in Sekunden seit Beobachtungsbeginn und $v(t)$ die Sinkgeschwindigkeit in Meter pro Sekunde.

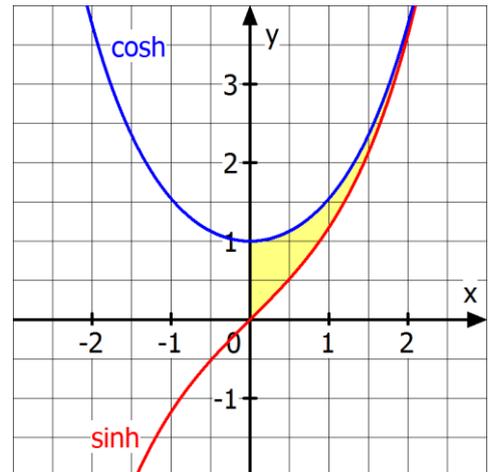
Entscheide unter Angabe einer Begründung, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Wahr	Falsch	Begründung
Die Sinkgeschwindigkeit des Steins ist immer positiv.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Die maximale Sinkgeschwindigkeit wird zu Beginn erreicht.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Der Stein erreicht den Boden des Sees niemals.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Die maximale Beschleunigung des Steines wird zu Beginn erreicht.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Man kann mithilfe eines Integrals berechnen, wie tief der Stein insgesamt gesunken ist.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Die Sinkgeschwindigkeit ist immer kleiner als 2,5 Meter pro Sekunden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Die Sinkgeschwindigkeit verdoppelt sich jeweils in 0,9 Sekunden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

²³ Aufgabe modifiziert nach Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

Aufgabe 5: Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus

Die Funktionen \sinh und \cosh mit $\sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})$ und $\cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})$ heißen **Sinus Hyperbolicus** und **Cosinus Hyperbolicus**. Ihre Graphen sind rechts dargestellt.



- Berechne** die 1. und 2. Ableitung von \sinh und \cosh . **Gib** die 1810. und die 2013. Ableitung von \sinh und \cosh **an**.
- Zeige**, dass die beiden Graphen keine gemeinsamen Schnittpunkte haben.
[Tipp: Setze die Funktionsterme gleich und zeige, dass die Gleichung unlösbar.]
- Begründe**, dass \sinh punktsymmetrisch zum Ursprung und \cosh achsensymmetrisch zur y -Achse ist.
- Zeige**, dass $(0/1)$ globaler Tiefpunkt von \cosh ist und \cosh durchweg linksgekrümmt ist.
- Untersuche** den Grafen von \sinh auf sein Krümmungsverhalten.
- Berechne** mithilfe der Stammfunktion den Flächeninhalt der Fläche, den beide Grafen
(1) über dem Intervall $[0; 1]$ einschließen.
(2) über dem Intervall $[0; +\infty[$ einschließen.
- Beweise**: $[\cosh(x)]^2 - [\sinh(x)]^2 = 1$.
[Tipp: 1. und 2. Binomische Formel und $e^x \cdot e^{-x} = 1$]



Teil II: Aufgaben unter Zuhilfenahme des GTR

Aufgabe 1: Ableitung, Tangente, Flächenberechnung und Transformation

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2^x$.

- Stelle** den Funktionsterm zur Basis e dar und bestimme die erste Ableitung.
- Ermittle** rechnerisch mithilfe von $f'(x)$ die Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2 an den Grafen von f in den Punkten $(1/f(1))$ und $(-1/f(-1))$.
[Kontrollergebnisse zum Weiterarbeiten: $t_1(x) \approx 1,39x + 0,61$; $t_2(x) \approx 0,35x + 0,85$]
- Stelle** die Situation in einem Koordinatensystem **dar**.
- Ermittle** mit der Stammfunktion den Flächeninhalt der Fläche, die
 - vom Grafen von f über dem Intervall $[-1; 0]$ mit der x -Achse eingeschlossen wird.
 - vom Grafen von f über dem Intervall $] -\infty; 0]$ mit der x -Achse eingeschlossen wird.
 - von den beiden Tangenten t_1 und t_2 und der x -Achse begrenzt wird.
 [Hinweis: Verwende die Tangentengleichung aus dem Kontrollergebnis aus b) und runde Schnitt- und Nullstellen sowie den Flächeninhalt auf die zweite Nachkommastelle.]
- Der Graf von f wird in y -Richtung um den Faktor 2 gestreckt, so dass der Graf von g entsteht. Ermittle eine Verschiebung, so dass der Graf von g aus dem Grafen von f entsteht.

Aufgabe 2: Abkühlen von Kaffee

Peter kauft sich bei einem Fußballspiel in der Halbzeitpause zum Aufwärmen eine Tasse Kaffee. Bei einer Außentemperatur von frostigen 0°C kühlt der warme Kaffee schon nach einer Minute auf $86,04^\circ\text{C}$ ab. Nach zwei Minuten beträgt die Kaffeetemperatur nur noch $82,25^\circ\text{C}$. Die Temperatur des Kaffees kann durch eine Funktion der Form $f(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$ beschrieben werden ($t \geq 0$, t in Minuten, $f(t)$ in $^\circ\text{C}$, $a \geq 0$ und $b < 0$).

- Ermittle** die Parameter a und b und **gib** die Anfangstemperatur **an**.

Für die Temperatur des Kaffees (in $^\circ\text{C}$) wird nachfolgend die exponentielle Funktionsgleichung $f(t) = 90 \cdot e^{-0,045 \cdot t}$ ($t \geq 0$; t in Minuten) angenommen.

- Bestimme** die Temperatur des Kaffees nach 10 Minuten und **berechne** den Zeitpunkt, an dem die Kaffeetemperatur unter 45°C gesunken ist.
- Ermittle** $f'(t)$ und **gib** die Bedeutung des Ableitungsterms im Sachzusammenhang **an**.
- Bestimme** mit dem GTR die Geschwindigkeit der Temperaturabnahme in $^\circ\text{C}$ pro Minute nach einer, fünf, zehn und 30 Minuten. **Beschreibe** den Abkühlungsvorgang und **skizziere** den Grafen von f' .
- Begründe**, warum die Modellfunktion für den Abkühlungsvorgang bei einer Raumtemperatur von 20°C ungeeignet ist.
- Frank hat VIP-Karten und trinkt im VIP-Raum in der Pause ebenfalls einen Kaffee. Sei g die Funktion, die den Abkühlungsvorgang von 90°C heißem Kaffee bei einer Raumtemperatur von 20°C beschreibt.

- (1) **Skizziere** neben dem Grafen von f einen möglichen Graphen zur Funktion g und **begründe**, dass g von der Form $g(t) = c - d \cdot e^{-kt}$ ist.
- (2) **Interpretiere** die Parameter c , d und k und **gib** passende Werte für c und d und k an.

Aufgabe 3: Modifizierte Abituraufgabe zu Wachstumsprozessen²⁴

Die Höhe eines Strauches in den ersten zwanzig Tagen nach dem Auspflanzen wird durch die Funktion h mit

$$h(t) = 0,2 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,9} \quad (t \text{ in Tagen, } h(t) \text{ in Metern})$$

beschrieben. Diese Pflanze hat zum Zeitpunkt des Auspflanzens eine Höhe von 8 cm und ist am Ende des 20. Tages ($t = 20$) auf eine Höhe von etwa 60 cm gewachsen. Der Graf ist in der Abbildung unten links angegeben.



- a) **Berechne**, zu welchem Zeitpunkt der Strauch eine Höhe von 50 cm hat.
- b) **Zeige** durch Angabe der Parameter c und k , dass die Funktion h ein exponentielles Wachstum der Form $h(t) = c \cdot e^{kt}$ beschreibt.
[Tipp: Wende zunächst ein Potenzgesetz an.]
- c) **Gib** die Bedeutung der Parameter c und k im Sachkontext an und bestimme den Wachstumsfaktor a .
- d) **Weise** nach, dass der Graf zu h für $0 \leq t \leq 20$ streng monoton wachsend und linksgekrümmt ist.
- e) **Bestimme** rechnerisch den Zeitpunkt innerhalb der ersten zwanzig Tage ($0 \leq t \leq 20$), an dem die Pflanze am schnellsten wächst und **berechne** die zugehörige Wachstumsgeschwindigkeit. **Begründe**, warum die angegebene Funktion h nur für einen begrenzten Zeitraum die Höhe der Pflanze beschreiben kann.
- f) Vom Beginn des 21. Tages an verringert sich die Wachstumsgeschwindigkeit des Strauches. Von diesem Zeitpunkt an ist nur noch die Wachstumsgeschwindigkeit (in Meter pro Tag) bekannt, sie wird beschrieben durch die Funktion z mit

$$z(t) = 0,02 \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1} \quad (t \text{ in Tagen, } z(t) \text{ in Meter pro Jahr})$$

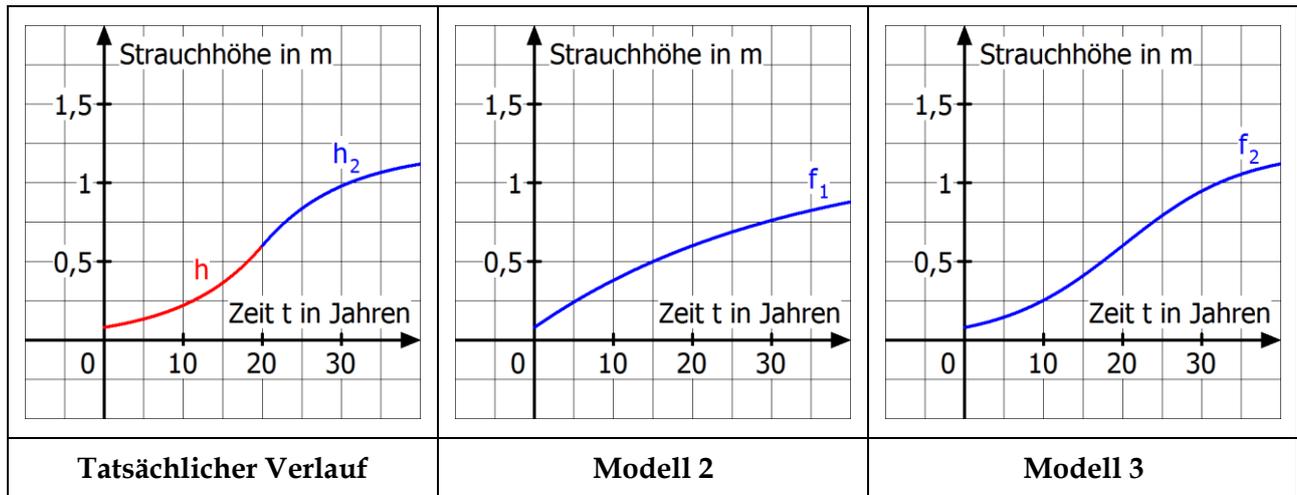
Die Höhe des Strauches für $t \geq 20$ soll durch eine Funktion h_2 beschrieben werden.

- (1) **Ermittle** einen Term $h_2(t)$, der die Höhe des Strauches nach t Tagen für $t \geq 20$ beschreibt.
[Zur Kontrolle: $h_2(t) \approx 1,2 - 0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1}$ ($t \geq 20$), vgl. Abb. links unten]
- (2) **Begründe** anhand des Terms $h_2(t)$, dass der Strauch nicht beliebig hoch wird, und **gib** die maximale Höhe des Strauches an.
- (3) **Weise** rechnerisch durch Angabe der Parameter S , b und k nach, dass die Funktion h_2 ein beschränktes Wachstum der bekannten Form $h_2(t) = S - b \cdot e^{-kt}$ beschreibt.
[Tipp: Wende zunächst ein Potenzgesetz an.]
- (4) **Interpretiere** die Werte der Parameter S , b und k im Sachkontext.
- (5) **Untersuche**, ob die Übergangsstelle $t = 20$ knickfrei ist, d. h. $h'(20) = h_2'(20)$ gilt.

Nun soll eine Funktion die Pflanzenhöhe für den **gesamten** Zeitraum, also über die ersten zwanzig Tage hinaus, möglichst zutreffend modellieren. Die mittlere Abbildung stellt den Grafen einer Funktion f_1 zu einem beschränkten Wachstum dar (**Modell 1**). Rechts ist der Graf einer Funktion f_2 zu

²⁴ Modifiziert nach Zentralabitur NRW 2009

sehen, der ein logistisches Wachstum beschreibt (**Modell 2**). Die linke Abbildung zeigt den Graphen, der aus den beiden Funktionen h ($0 \leq t \leq 20$) und h_2 ($t > 20$) zusammengesetzt ist und den tatsächlichen Verlauf der Strauchhöhe wiedergibt.



g) **Modell 1 (beschränktes Wachstum):** Da der Strauch nicht höher als ungefähr 1,2 m wird, muss die Modellfunktion beschränkt sein. Zunächst wird dafür eine Modellfunktion f_1 gewählt, die die Form $f_1(t) = S - d \cdot e^{-kt}$ hat. Dabei ist $S = 1,2$ die obere Grenze, welche die Höhe der Pflanze auf lange Sicht nicht überschreitet.

- (1) **Bestimme** die Parameter d und k so, dass der Strauch beim Auspflanzen und am 20. Tag die beobachteten Höhen von 0,08 m bzw. von 0,60 m besitzt.
- (2) **Gib** die Bedeutung des Parameters d an.

h) **Modell 2 (logistisches Wachstum):** In einem alternativen Ansatz soll ein logistisches Wachstum der bekannten Form $f_2(t) = \frac{f_2(0) \cdot S}{f_2(0) + (S - f_2(0)) \cdot e^{-k \cdot S \cdot t}}$ angenommen werden.

Zeige, dass die Funktion f_2 mit $f_2(t) = \frac{0,096}{0,08 + 1,12 \cdot e^{-0,132 \cdot t}}$ ein logistisches Wachstum beschreibt, bei dem die Anfangshöhe 0,08 m beträgt, nach 20 Tagen eine Höhe von 0,60 m vorhanden ist und langfristig 1,2 m nicht überschritten werden.

- i) **Begründe** anhand des Krümmungsverhaltens, welche der Modellfunktionen f_1 und f_2 eher geeignet ist, die Strauchhöhe (in Abb. 1) in Metern in Abhängigkeit von der Zeit in Tagen zu beschreiben (vgl. Abb. 1, 2 und 3).
- j) **Beschreibe** ein Verfahren zur Berechnung der größten Differenz zwischen einer (differenzierbaren) Modellfunktion f und der Funktion h im Intervall $[0; 20]$.

Lösungen

1 Grundwissen rund um Exponentialfunktionen

1a)

1	2	3	4
$f(x) = 2^x$	$f(x) = -0,5 \cdot 0,5^x$	$f(x) = 3 \cdot 3^x$	$f(x) = -3 \cdot 3^x$

1b)

x	-3	-2	-1	0	0,5	1	2	3
$f(x) = 4 \cdot 2^x$	0,5	1	2	4	5,67	8	16	32
$g(x) = 2 \cdot 0,5^x$	16	8	4	2	1,41	1	0,5	0,25

- Wenn der x-Wert einer exponentiellen Funktion sich um 1 vergrößert, dann verändert sich der Funktionswert mit dem Wachstumsfaktor a.
- Wenn der x-Wert einer exponentiellen Funktion sich um 1 verkleinert, dann verändert sich der Funktionswert mit dem Kehrwert a^{-1} des Wachstumsfaktors a.
- Wenn der x-Wert einer exponentiellen Funktion sich um k vergrößert, dann verändert sich der Funktionswert mit dem Faktor a^k .
- Wenn der x-Wert einer exponentiellen Funktion sich um k verkleinert, dann verändert sich der Funktionswert mit dem Faktor a^{-k} .

1c)

Eine Funktionsgleichung der Form $f(x) = c \cdot a^x$ beschreibt ein exponentielles Wachstum. Ist $a > 1$ handelt es sich um eine exponentielle Zunahme (z. B. Zinswachstum). Im Falle $0 < a < 1$ spricht man von einer exponentiellen Abnahme (z. B. radioaktiver Zerfall).

1d)

Bei der Normalparabel verläuft der Graf für beide Ränder gegen + unendlich. Bei der Exponentialfunktion $y = 2^x$ nähert sich der Graf für kleine x der x-Achse an, während er auf der anderen Seite für große x ebenfalls unbeschränkt wächst. Stellt man nun beide Funktionen für ganzzahlige positive x mithilfe einer Wertetabelle dar, erhält man:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
2^x	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

Man erkennt: Die Exponentialfunktion wächst schon recht früh sehr viel stärker als die quadratische Funktion. Darüber hinaus ist bei der Exponentialfunktion jeder neue Wert in der Wertetabelle (um 1) größer als die Summe aller vorherigen Einträge (z. B. $32 > 24 + 8 + 4 + 2 + 1$). Bei der quadratischen Funktion gilt für $x > 4$: Jeder neue Eintrag in der Wertetabelle ist kleiner als die Summe der vorherigen Einträge (z. B. $25 < 16 + 9 + 4 + 1 + 0 = 30$). Während bei der quadratischen Funktion bei Vergrößerung des x-Wertes um 1 der vorherige Funktionswert um eine ungerade Zahl vergrößert wird (1, 3, 5, 7, usw.) wird bei der Exponentialfunktion der Vorgänger um den Faktor 2 erhöht.

1e)

Y1: $f(0) = 3 \Rightarrow f(x) = 3 \cdot a^x$; $f(1) = 6 \Leftrightarrow 3 \cdot a^1 = 6 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 3 \cdot 2^x$

Y2: $f(0) = -1 \Rightarrow f(x) = -a^x$; $f(1) = -0,5 \Leftrightarrow -a = -0,5 \Leftrightarrow a = 0,5 \Rightarrow f(x) = -0,5^x$

Y3: $f(0) = 3 \Rightarrow f(x) = 3 \cdot a^x$; $f(1) = 9 \Leftrightarrow 3a = 9 \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow f(x) = 3 \cdot 3^x = 3^{x+1}$

Y4: $f(x) = c \cdot a^x$; $a^3 = \frac{f(5)}{f(2)} = \frac{160}{20} = 8 \Leftrightarrow a = 2$; $f(2) = 20 \Leftrightarrow c \cdot 2^2 = 20 \Leftrightarrow c = 5 \Rightarrow f(x) = 5 \cdot 2^x$

Y5: $f(x) = c \cdot a^x$; $a^3 = \frac{f(2)}{f(-1)} = \frac{0,04}{5} = 0,008 \Leftrightarrow a = \frac{1}{5}$; $f(-1) = 5 \Leftrightarrow c \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5 \Leftrightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

$$\mathbf{Y6:} f(x) = c \cdot a^x; a^3 = \frac{f(5)}{f(2)} = \frac{243}{9} = 27 \Leftrightarrow a = 3; f(2) = 9 \Leftrightarrow c \cdot 3^2 = 9 \Leftrightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = 3^x$$

1f)

$$(1) 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,5^x \quad (2) 3^{x-1} = \frac{3^x}{3^1} = \frac{1}{3} \cdot 3^x \quad (3) (3^x)^2 = 3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$$

$$(4) 3^{2x+2} = 3^{2x} \cdot 3^2 = (3^2)^x \cdot 9 = 9 \cdot 9^x \quad (5) 25^{0,5x-0,5} = \frac{25^{0,5x}}{25^{0,5}} = \frac{(\sqrt{25})^x}{\sqrt{25}} = \frac{5^x}{5} = 0,2 \cdot 5^x$$

1g)

Der Wachstumsfaktor a muss positiv sein, da z. B. für $x = 0,5$ die Wurzel aus a gezogen wird und dann $a^{0,5} = \sqrt{a}$ nicht definiert wäre. Der Fall $a = 1$ liefert keine Exponentialfunktion, sondern die Konstante $y = c$.

2a)

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = 2^x$.

$$\text{Punkt A: } 2^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \log_2\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2(2^{-3}) = -3$$

$$\text{Punkt B: } 2^x = 1 \Leftrightarrow x = \log_2(2^0) = 0$$

$$\text{Punkt C: } 2^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \log_2(\sqrt{2}) = x = \log_2(2^{0,5}) = 0,5$$

$$\text{Punkt D: } 2^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_2(2^2) = 2$$

2b)

$$\text{Punkt E: } 2^x = 0,5 \Leftrightarrow x = \log_2(0,5) = x = \log_2(2^{-1}) = -1$$

Der Logarithmus von b zur Basis 2 bezeichnet den Exponenten x (Hochzahl, Verhältniszahl), mit dem die Basis 2 potenziert werden muss, um die gegebene Zahl b zu erhalten. Gesucht ist also die Zahl x , so dass $2^x = b$. Diese Zahl x wird als Logarithmus von b zur Basis 2 definiert.

2c)

$$\text{E: } 15 \cdot 1,3^x = 30 \Leftrightarrow 1,3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{1,3}(2); 2 < x < 3$$

$$\text{H: } 0,125 \cdot 0,5^x = 0,25 \Leftrightarrow 0,5^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{0,5}(2) = \log_{0,5}(0,5^{-1}) = -1$$

$$\text{U: } 4 + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 6 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{3}}(2); -2 < x < -1$$

$$\text{A: } 1 = \left(\frac{1}{9}\right)^x \cdot 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{1}{8}\right); 0 < x < 1$$

$$\text{S: } 10 \cdot 2^{x+1} = 50 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 5 \Leftrightarrow 2^x = 2,5 \Leftrightarrow x = \log_2(2,5); 1 < x < 2$$

$$\text{D: } \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 10^3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 10^3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{10^3}{2} = 500 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{1}{2}}(500); -9 < x < -8$$

$$\text{S: } 2,5^{x-2} \cdot 2,5^2 = 99 \Leftrightarrow 2,5^x = 99 \Leftrightarrow x = \log_{2,5}(99); 5 < x < 6$$

$$\text{T: } 1,95^{2-x} = 1 \Leftrightarrow 1,95^2 = 1,95^x \Leftrightarrow x = \log_{1,95}(1,95^2) = 2$$

Es gilt nun folgende Rangfolge: DU HAST ES.

3)

$$f(0) = 4 \Rightarrow f(x) = 4 \cdot a^x; f(1) = 2 \Leftrightarrow 4 \cdot a^1 = 2 \Leftrightarrow a = 0,5 \Rightarrow f(x) = 4 \cdot 0,5^x$$

$$f(x) = 1,5 \Leftrightarrow 4 \cdot 0,5^x = 1,5 \Leftrightarrow 0,5^x = \frac{3}{8} \Leftrightarrow x = \log_{0,5}\left(\frac{3}{8}\right) \approx 1,42$$

$$g(0) = 1 \Rightarrow g(x) = a^x; g(1) = 1,5 \Leftrightarrow a^1 = 1,5 \Leftrightarrow a = 1,5 \Rightarrow g(x) = 1,5^x$$

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow 1,5^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{1,5}(2) \approx 1,71$$

$$h(0) = 1 \Rightarrow h(x) = a^x; h(-1) = 2 \Leftrightarrow a^{-1} = 2 \Leftrightarrow a = 0,5 \Rightarrow h(x) = 0,5^x$$

$$h(x) = 3,5 \Leftrightarrow 0,5^x = 3,5 \Leftrightarrow x = \log_{0,5}(3,5) \approx -1,81$$

$$k(0) = 2 \Rightarrow k(x) = 2 \cdot a^x; k(1) = 0,5 \Leftrightarrow 2 \cdot a^1 = 0,5 \Leftrightarrow a = 0,25 \Rightarrow k(x) = 2 \cdot 0,25^x$$

$$k(x) = 1,5 \Leftrightarrow 2 \cdot 0,25^x = 1,5 \Leftrightarrow 0,25^x = 0,75 \Leftrightarrow x = \log_{0,25}(0,75) \approx 0,21$$

4a)

$$f(x) = 2^x \xrightarrow{\text{Verschiebung um 1 nach links}} g(x) = 2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^x$$

$$f(x) = 2^x \xrightarrow{\text{Streckung um den Faktor 2 von der y-Achse aus}} g(x) = 2 \cdot 2^x$$

4b)

$$f(x) = 3^x \xrightarrow{\text{Verschiebung um 2 nach links}} g(x) = 3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x$$

$$f(x) = 3^x \xrightarrow{\text{Streckung um den Faktor 9 von der y-Achse aus}} g(x) = 9 \cdot 3^x = 3^{x+2}$$

$$f(x) = 3^x \xrightarrow{\text{Verschiebung um 1 nach rechts}} h(x) = 3^{x-1} = 3^x \cdot 3^{-1} = \frac{1}{3} \cdot 3^x$$

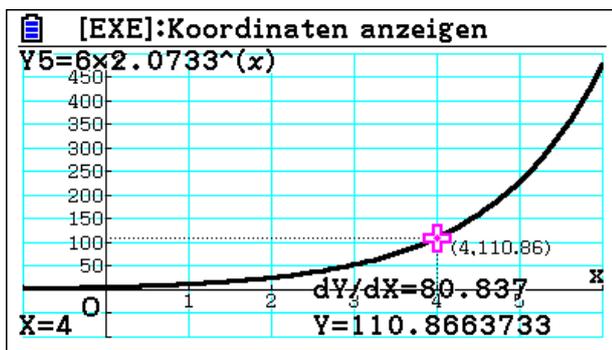
$$f(x) = 3^x \xrightarrow{\text{Streckung um den Faktor } \frac{1}{3} \text{ von der y-Achse aus}} h(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^x = 3^{x-1}$$

4c)

Über den y-Achsenabschnitt lassen sich f und h zuordnen: $f(0) = 1$ und $h(0) = 2$. Daher gilt $A = f$ und $C = h$. Über die Stelle $x = -1$ erkennt man: Der Graf von k entsteht durch Verschiebung des Grafen von h um 1 nach oben. Deshalb gilt $k = D$. Ebenso wird der Graf zu f um 2 nach oben verschoben, so dass der Graf von g entsteht. Also ist $B = g$.

5a)

$$f(0) = 6 \Rightarrow f(x) = 6 \cdot a^x; f\left(\frac{7}{6}\right) = 77 \Leftrightarrow 6 \cdot a^{\frac{7}{6}} = 77 \Leftrightarrow a = \left(\frac{77}{6}\right)^{\frac{6}{7}} \approx 2,0733 \Rightarrow f(x) \approx 6 \cdot 2,0733^x$$



5b)

$$f(4) = 6 \cdot 2,0733^4 \approx 111; f\left(\frac{73}{12}\right) = 6 \cdot 2,0733^{\frac{73}{12}} \approx 506; f\left(\frac{130}{12}\right) = 6 \cdot 2,0733^{\frac{130}{12}} \approx 15215$$

5c)

$f(x) = 12000 \Leftrightarrow 6 \cdot 2,0733^x = 12000 \Leftrightarrow 2,0733^x = 2000 \Leftrightarrow x = \log_{2,0733}(2000) \approx 10,42$ Jahre. Anfang Mai des Jahres 2012 würde eine Abschlussfreigabe erfolgen.

5d)

Mögliche Antworten für die Gültigkeit des Modells:

- Die Fortpflanzungsbedingungen bleiben unverändert.
- Es ist ausreichend Lebensraum für eine derartige Population vorhanden.
- Die Kaninchen pflanzen sich kontinuierlich fort (entspricht nicht den realen Bedingungen)
- Im Modell ist wegen des zu kurzen Zeitraums die Sterberate nicht ausreichend berücksichtigt worden, ebenso die Dezimierung durch Krankheiten o. ä.

6)

(1) „Gilt immer“. Punktsymmetrie fällt aus, da $f(x) > 0$ (für $c > 0$) oder $f(x) < 0$ ($c < 0$). Auch Achsensymmetrie ist nicht möglich: $f(-x) = f(x)$ gilt nur für $x = 0$, denn $c \cdot a^{-x} = c \cdot a^x \Leftrightarrow a^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) „Kommt darauf an“. Die Gleichung $c \cdot a^x = d$ (Schnitt der Exponentialfunktionen mit der Geraden $y=d$) besitzt genau eine Lösung $x = \log_a\left(\frac{d}{c}\right)$ genau dann, wenn c und d beide das gleiche Vorzeichen haben und beide ungleich Null sind. Andernfalls gibt es keine Lösung.

(3) „Gilt immer“. Der Term a^x strebt im Falle $a > 1$ für x gegen minus unendlich gegen Null, im Falle $0 < a < 1$ für x gegen plus unendlich gegen Null. Der Faktor c beeinflusst nur, ob der Graf sich von oben ($c > 0$) oder von unten ($c < 0$) der x -Achse nähert.

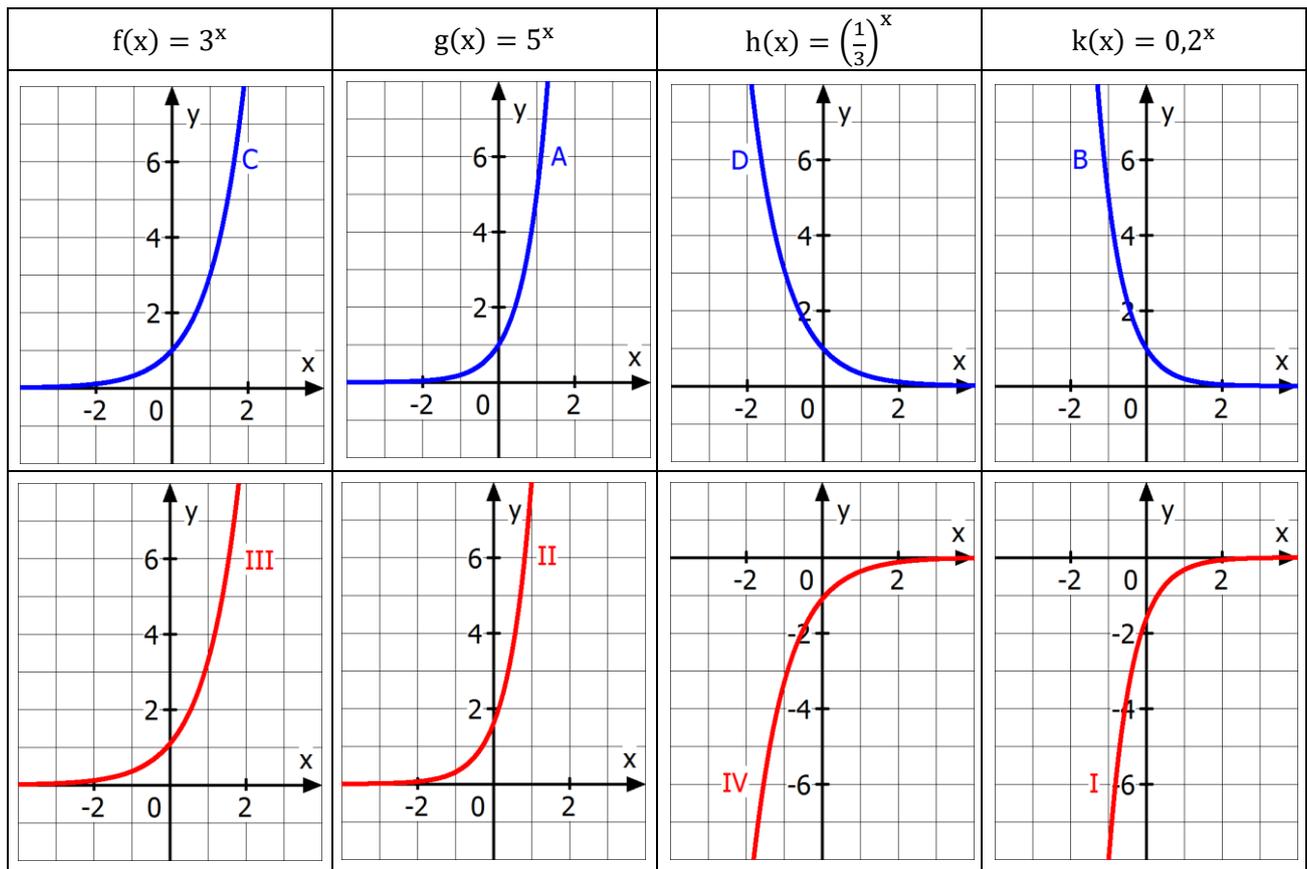
(4) „Gilt immer“. Zum einen erhält man für den gleichen Wachstumsvorgang unterschiedliche Wachstumsfaktoren, wenn man den Startzeitpunkt nach vorne oder nach hinten verschiebt. Zum Beispiel beschreiben f und g mit $f(x) = c \cdot a^x$ und $g(x) = c \cdot a^{x+2}$ denselben Wachstumsvorgang, nur dass der Start bei g um 2 Einheiten früher einsetzt. Zum anderen kann der Startwert zu unterschiedlichen Zeitpunkten gewählt werden, ohne dass sich dadurch der Wachstumsvorgang als solcher verändert. Beispiel: f und g mit $f(x) = c \cdot a^x$ und $g(x) = \frac{c}{a^p} \cdot a^x = c \cdot a^{x-p}$ beschreiben denselben Vorgang, nur, dass der Startwert bei g um p Zeiteinheiten später erfolgt.

2 Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung

1)

Im linken Diagramm entsteht ein steigender Graf, der komplett oberhalb der x -Achse liegt. Im rechten Diagramm erhält man einen fallenden Grafen, der unterhalb der x -Achse liegt. Sollte sich der Startpunkt auf der x -Achse liegen, erfüllt offenbar nur die Nullfunktion die geforderte Bedingung. Gesucht ist also eine Funktion f mit $f(x) = f'(x)$. Wir werden sehen, dass $f(x) = c \cdot e^x$ ($e \approx 2,72$; $c \neq 0$) und $f(x) = 0$ die einzigen Funktionen sind, die diese Bedingung – man auch diese Differenzialgleichung – erfüllen.

2)



Die Zuordnung der Funktionsgleichung zu den Funktionsgrafen kann folgendermaßen begründet werden:

- An der Stelle $x = 1$ haben die beiden steigenden Grafen den Funktionswert 3 bzw. 5. Daher gehört f zu C und g zu A.
- An der Stelle $x = -1$ haben die beiden fallenden Grafen den Funktionswert 3 bzw. 5. Daher gehört h zu D und k zu B.

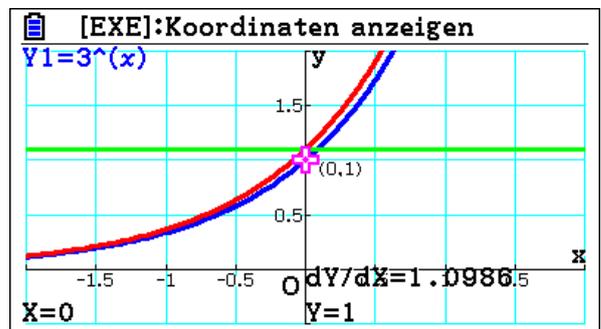
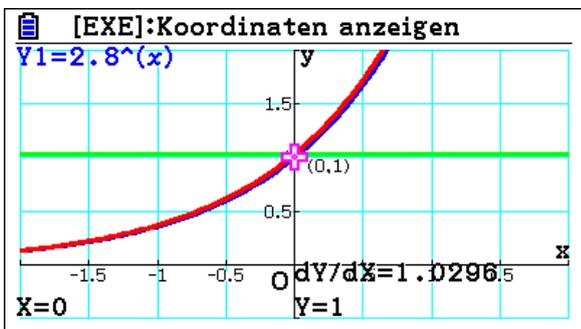
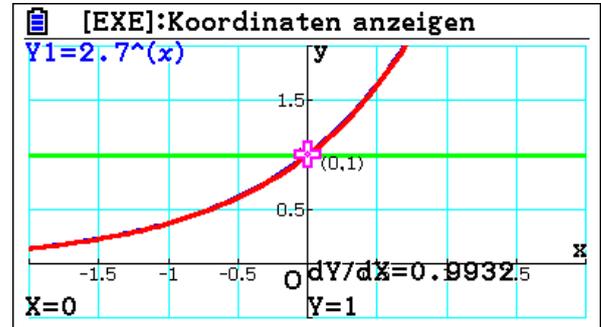
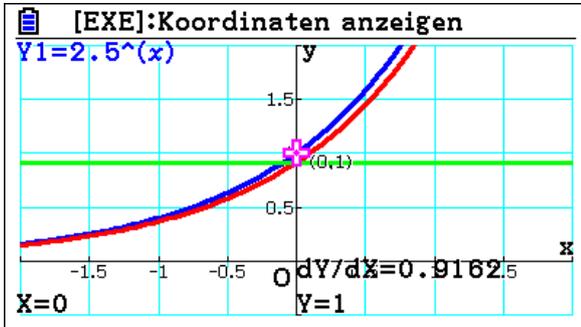
Für die Zuordnung von Graf und Ableitungsgraf können folgende Begründungen herangezogen werden:

- Die beiden steigenden Grafen A und C haben überall eine positive Steigung. Daher muss der Graf der Ableitung komplett oberhalb der x -Achse liegen und es kommen nur die Grafen III und II in Frage. An der Stelle 0 ist Graf A steiler als Graf C. Somit besitzt der Ableitungsgraf bei $x = 0$ einen größeren Funktionswert. Also: A gehört zu II und C zu III.
- Mit der gleichen Argumentation ist die Steigung des Grafen von B an der Stelle 0 steiler als bei Graf D, so dass Ableitungsgrafen I zu Graf B gehört und Graf D zu IV.

3a)

Für f mit $f(x) = 2^x$ gilt: $f'(0) \approx 0,6931$ und $\frac{f'(x)}{f(x)} \approx 0,6931$. Formt man die zweite Gleichung nach $f'(x)$ um und setzt $f'(0)$ entsprechend ein, erhält man: $f'(x) = f'(0) \cdot f(x) = 0,6931 \cdot 2^x$.

3b) und 3c)



Es lässt sich der Zusammenhang von Aufgabenteil a für weitere Exponentialfunktionen bestätigen. Die Ableitung ist proportional zur Ausgangsfunktion. Die Proportionalitätskonstante entspricht dem Ableitungswert an der Stelle 0. Für einen Wert von ungefähr $a = 2,72$ liegen Graf und Ableitungsgraf übereinander. Dieser Graf hat an der Stelle 0 die Steigung 1.

3d)

	$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$	$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} =$	$\frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} =$	$\frac{a^x \cdot (a^h - 1)}{h} =$
Begründung	Differenzenquotient von f an der Stelle x	Funktionsterm für f mit $f(x) = a^x$ eingesetzt	Potenzgesetz angewendet: $a^{x+h} = a^x \cdot a^h$	a^x faktorisiert
	$a^x \cdot \frac{a^{0+h} - a^0}{h} =$	$a^x \cdot \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0}$	$a^x \cdot f'(0) = f'(0) \cdot a^x$	Für die Ableitung einer Exponentialfunktion von der Form $f(x) = a^x$ gilt: $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$
Begründung	Es gilt: $a^{0+h} = a^h$ sowie $a^0 = 1$	$\frac{a^{0+h} - a^0}{h}$ ist der Differenzenquotient von f an der Stelle 0	Für h gegen Null ergibt sich der Ableitungswert von f an der Stelle x	

4a)

Da für eine beliebige Exponentialfunktion $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$ und für die natürliche Exponentialfunktion $f'(x) = f(x)$ gilt, muss bei der natürlichen Exponentialfunktion $f'(0) = 1$ sein.

4b)

$\frac{e^{0+h} - e^0}{h} \approx 1$		Mit $h = \frac{1}{n}$ erhält man:	$\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \approx 1$	$e^{\frac{1}{n}} - 1 \approx \frac{1}{n}$	$e^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n}$	$e = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n$ $\approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
Begründung	$f'(0) = 1.$	Ersetze h durch $\frac{1}{n}$.	$\frac{1}{n}$ strebt für $n \rightarrow \infty$ auch gegen Null.	Man multipliziert mit dem Nenner $\frac{1}{n}$.	Man addiert 1.	Man bildet die n -te Potenz

4c)

Der Graf von f liegt oberhalb der x -Achse, weil $f(x) = e^x > 0$. Der Graf besitzt daher keine Nullstellen. Da $f'(x) = f''(x) = e^x > 0$ ist, ist der Graf von f streng monoton steigend und linksgekrümmt. Aus diesem Grund existieren auch keine Extrem- und Wendestellen.

4d)

Es gilt allgemein: $\int_a^b e^x dx = [e^x]_a^b = e^b - e^a$. Für die angegebenen Intervalle gilt:

$[0; 1]$	$[-1; 0]$	$[0; \ln(100)]$	$[-\ln(100); 0]$	$] -\infty; 0]$	$[0; +\infty[$
$e^1 - e^0$ $= e - 1$	$e^0 - e^{-1}$ $= 1 - \frac{1}{e}$	$e^{\ln(100)} - e^0$ $= 100 - 1$ $= 99$	$e^0 - e^{-\ln(100)}$ $= 1 - e^{\ln(\frac{1}{100})}$ $= 1 - \frac{1}{100}$ $= 0,99$	$e^0 - e^b \xrightarrow{b \rightarrow -\infty} 1,$ da der Term e^b für $b \rightarrow -\infty$ gegen Null strebt.	$e^b - e^0 \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} +\infty$ da der Term e^b für $b \rightarrow +\infty$ gegen $+\infty$ strebt.

5a)

$$f(x) = 0,75e^x + x^2 - 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 0,75e^x + 2x - 2 \Rightarrow f''(x) = 0,75e^x + 2$$

$$F(x) = 0,75e^x + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$$

5b)

$$f'(1) = 0,75e \Rightarrow t(x) = 0,75e \cdot x + b; f(1) = 0,75e \Rightarrow 0,75e \cdot 1 + b = 0,75e \Rightarrow b = 0 \Rightarrow t(x) = 0,75e \cdot x$$

5c)

$$f''(x) = 0,75e^x + 2 > 2, \text{ da jeder } e\text{-Term} > 0 \Rightarrow \text{Graf von } f \text{ ist linksgekrümmt.}$$

5d)

Der Graf von f schließt über dem Intervall $[0; 1]$ mit der x -Achse den folgenden Flächeninhalt B ein:

$$B = \int_0^1 f(x) dx = \left[0,75e^x + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_0^1 = 0,75e + \frac{1}{3} - 0,75 = 0,75e - \frac{5}{12}$$

Die Tangente t schließt über dem Intervall $[0; 1]$ mit der x -Achse den folgenden Flächeninhalt C ein:

$$C = 0,375e \text{ (Dreiecksfläche)}$$

$$\text{Es gilt } A = B - C = 0,75e - \frac{5}{12} - 0,375e = 0,375e - \frac{5}{12} \approx 0,60.$$

Eine Überprüfung mit dem GTR liefert für die Formel des Flächeninhalts zwischen zwei Kurven:

$$\int_0^1 [f(x) - t(x)] dx = \int_0^1 [0,75e^x + x^2 - 2x + 1 - 0,75e \cdot x] dx \approx 0,60$$

5e)

Die Normalparabel hat die Gleichung $p(x) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$. Durch Gleichsetzen mit $f(x)$ erhält man: $0,75e^x + x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 0,75e^x = 0$. Dies ist nicht möglich, da jede Potenz von e echt positiv ist. Daher haben die Grafen zu p und f keine Schnittpunkte. Vielmehr ist der Graf

zu p für $x \rightarrow -\infty$ eine Asymptote, der sich der Graf von f annähert. Denn: $0,75e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ und somit $f(x) \approx t(x)$ für $x \rightarrow -\infty$.

6a)

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x + e^x = -x^2 + e^x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

6b)

$$f(x) - g(x) = -x + e^x - (-x^2 + e^x) = x^2 - x$$

$$\text{Also: } A = \left| \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx \right| = \left| \int_0^1 (x^2 - x) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \right| = \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{6}$$

6c)

$$f(x) = -x + e^x \Rightarrow f'(x) = -1 + e^x \Rightarrow f''(x) = e^x > 0$$

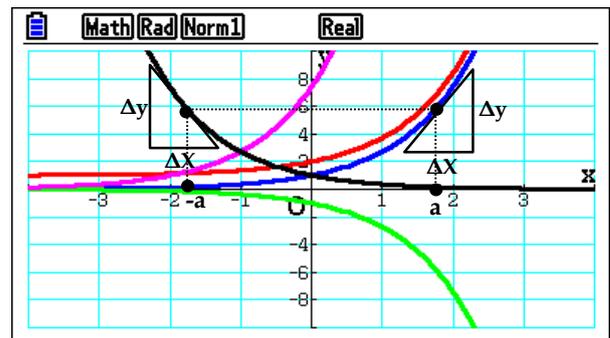
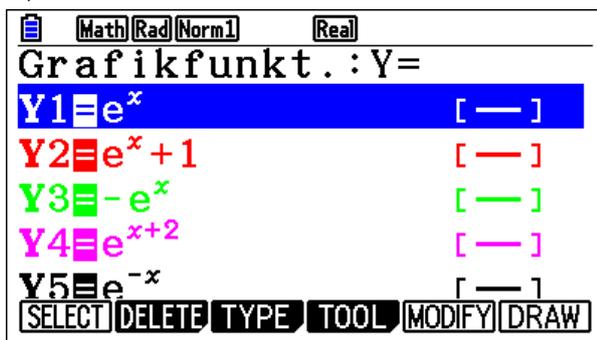
$f'(x) = -1 + e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $f(0) = 1$; $f''(0) = e^0 = 1 > 0$: (0/1) ist lokaler Tiefpunkt, der global, da der Graf wegen $f''(x) > 0$ durchweg linksgekrümmt ist (oder an den Rändern jeweils gegen unendlich strebt).

6d)

$$g(x) = -x^2 + e^x \Rightarrow g'(x) = -2x + e^x \Rightarrow g''(x) = -2 + e^x \Rightarrow g'''(x) = e^x$$

$g''(x) = -2 + e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$; $g'''(\ln(2)) = e^{\ln(2)} = 2 > 0$ (RrLiPo): $x = \ln(2)$ ist Rechts-Links-Wendestelle.

7a)



7b)

$$f_1(x) = e^x \xrightarrow{\text{Verschiebung um 1 nach oben}} f_2(x) = e^x + 1$$

$$f_1(x) = e^x \xrightarrow{\text{Spiegelung an der x-Achse}} f_3(x) = -e^x$$

$$f_1(x) = e^x \xrightarrow{\text{Verschiebung um 2 nach links}} f_4(x) = e^{x+2}$$

$$f_1(x) = e^x \xrightarrow{\text{Spiegelung an der y-Achse}} f_5(x) = e^{-x}$$

7c)

Da der Graf von f_5 an der y-Achse gespiegelt wurde, ist jeder negative Steigungswert des Grafen von f_5 an einer Stelle $-a$ genau der positive Steigungswert des Grafen von f_1 an der Stelle a . Dies sieht man zum Beispiel daran, dass das Steigungsdreieck der Tangente an der Stelle a das gleiche Δy besitzt wie die vergleichbare Tangente des gespiegelten Grafen, aber Δx sich um das Vorzeichen unterscheidet (vgl. Abb. oben rechts). Es gilt daher $f_5'(-a) = -f_1'(a) = -e^a$. Mit der folgenden Substitution $x = -a \Leftrightarrow a = -x$ gilt: $f_5'(x) = -e^{-x}$.

3 Natürlicher Logarithmus - Ableitung der Exponentialfunktion

1a)

$$e^x = 6 \Leftrightarrow x = \log_e(6) \approx 1,8$$

1b)

$$(1) e^x = 6 \Leftrightarrow x = \log_e(6) = \ln(6)$$

(2) Sei $e^x = b$. Dann ist nach der Definition des natürlichen Logarithmus $x = \ln(b)$ und damit gilt auch durch Einsetzen von x in der Startgleichung: $e^{\ln(b)} = b$. Für die zweite Gleichung kann folgendermaßen geschlossen werden: $e^x = e^b$ hat die nach der Definition des natürlichen Logarithmus die Lösung $x = \ln(e^b)$. Andererseits gilt offenbar $x = b$. Also: $b = \ln(e^b)$.

(3) $\ln(1) = \ln(e^0) = 0$, $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$. Es gilt $x = e^{\ln(x)} > 1 = e^0$, dann kann wegen der streng steigenden Monotonie der natürlichen Exponentialfunktion $\ln(x) > 0$ gefolgert werden. Analog gilt auch $x = e^{\ln(x)} < 1 = e^0 \Rightarrow \ln(x) < 0$.

(4) $e^{\ln(a) \cdot x} = e^{\ln(a^x)}$ nach der Potenzregel für Logarithmen.

1c)

$$f(x) = 3^x = e^{\ln(3) \cdot x}, g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right) \cdot x} = e^{-\ln(3) \cdot x}, h(x) = e^{\ln(0,2) \cdot x} = e^{\ln\left(\frac{1}{5}\right) \cdot x} = e^{-\ln(5) \cdot x}$$

1d)

$$(1) e^x = 15 \Leftrightarrow x = \ln(15) \approx 2,71$$

$$(2) e^x = 2,4 \Leftrightarrow x = \ln(2,4) \approx 0,88$$

$$(3) e^{2x} = 7 \Leftrightarrow 2x = \ln(7) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln(7) = \ln(\sqrt{7}) \approx 0,97$$

$$(4) 3 \cdot e^{4x} = 16,2 \Leftrightarrow e^{4x} = 5,4 \Leftrightarrow 4x = \ln(5,4) \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \ln(5,4) = \ln\left(\sqrt[4]{5,4}\right) \approx 0,42$$

$$(5) e^{-x} = 10 \Leftrightarrow -x = \ln(10) \Leftrightarrow x = -\ln(10) = \ln(0,1) \approx -2,3$$

$$(6) e^{4-x} = 1 \Leftrightarrow 4-x = \ln(1) = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$(7) e^{4-4x} = 5 \Leftrightarrow 4-4x = \ln(5) \Leftrightarrow -4x = \ln(5) - 4 \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{4} \ln(5) = 1 - \ln(\sqrt[4]{5}) \approx 0,60$$

$$(8) 2 \cdot e^{-x} = 5 \Leftrightarrow e^{-x} = 2,5 \Leftrightarrow -x = \ln(2,5) \Leftrightarrow x = -\ln(2,5) = \ln(0,4) \approx -0,91$$

$$(9) e^{2x+1} = 10 \Leftrightarrow 2x+1 = \ln(10) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln(10) - \frac{1}{2} \approx 0,65$$

$$(10) 3 \cdot e^{0,5x-1} = 1 \Leftrightarrow e^{0,5x-1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0,5x-1 = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = 2 \ln\left(\frac{1}{3}\right) + 2 = \ln\left(\frac{1}{9}\right) + 2 \approx -0,20$$

$$(11) \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{1}{4}x-1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{4}x-1} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{4}x-1 = \ln\left(\frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow x = 4 \ln\left(\frac{3}{5}\right) + 4 \approx 1,96$$

$$(12) -\frac{6}{7} \cdot e^{-\frac{2}{3}x+0,5} = \frac{7}{6} \Leftrightarrow e^{-\frac{2}{3}x+0,5} = -1 \text{ ist unlösbar, da jede Potenz von } x \text{ echt positiv ist.}$$

1e)

$$(1) e^{2x} - 2 \cdot e^x = 0 \stackrel{u=e^x}{\Leftrightarrow} u^2 - 2u = u(u-2) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee u = 2 \stackrel{u=e^x}{\Leftrightarrow} e^x = 0 \vee e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$$

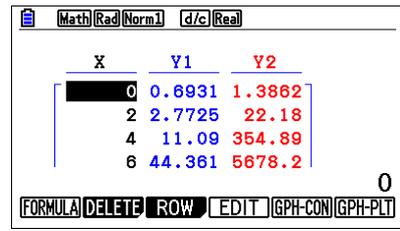
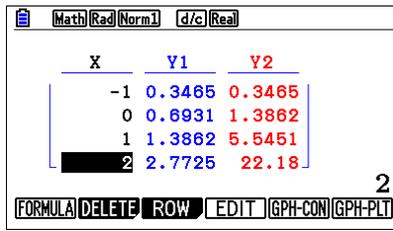
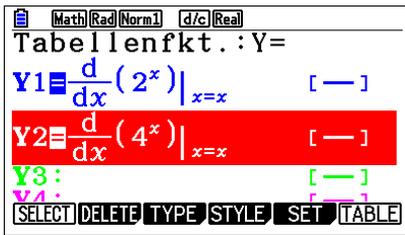
$$(2) e^{2x} - 2 \cdot e^x = -1 \stackrel{u=e^x}{\Leftrightarrow} u^2 - 2u + 1 = (u-1)^2 = 0 \Leftrightarrow u = 1 \stackrel{u=e^x}{\Leftrightarrow} e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0$$

$$(3) \frac{1}{10} \cdot e^{2x} - e^x = -\frac{12}{5} \stackrel{u=e^x}{\Leftrightarrow} u^2 - 10u + 24 = 0 \Leftrightarrow u = 5 \pm 1 \stackrel{u=e^x}{\Leftrightarrow} e^x = 5 \pm 1 \Leftrightarrow x = \ln(4) \vee x = \ln(6)$$

$$(4) e^{4x} + e^{2x} + 1 = 0 \text{ ist unlösbar, da } e^{4x} + e^{2x} + 1 > 1 \text{ gilt.}$$

2a)

Aussage (1) stimmt. Aussage (2) ist falsch. Aussage (3) stimmt. Vergleiche dazu die beiden Tabellen, die mit dem GTR erstellt wurden.



2b)

a	e^{-3}	e^{-2}	$e^{-1} = \frac{1}{e}$	0,5	2	$e^1 = e$	3	e^2	e^3
$f'(0) \approx$	-3	-2	-1	-0,6931	0,6931	1	1,0986	2	3

Es gilt: $f'(0) = \ln(a)$

2c)

(1) $f(x) = e^{kx} = (e^k)^x$. Also ist $a = e^k$. Damit gilt nach dem Merksatz zu Aufgabe 3 aus dem letzten Kapitel für die Ableitung: $f'(x) = f'(0) \cdot e^{kx}$ gilt.

(2)

	$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$	$\frac{e^{k(0+h)} - e^{k \cdot 0}}{h} =$	$\frac{e^{0+k \cdot h} - e^0}{h} =$	$\frac{k}{k} \cdot \frac{e^{0+k \cdot h} - e^0}{h} =$
Begründung	Differenzenquotient an der Stelle 0	Einsetzen der Funktionswerte für f mit $f(x) = e^{kx}$	Ausmultiplizieren	Multiplizieren mit $\frac{k}{k}$ (als eine „unsichtbare“ 1)
	$k \cdot \frac{e^{0+k \cdot h} - e^0}{k \cdot h} =$	$k \cdot \frac{e^{0+t} - e^0}{t} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{t=k \cdot h \rightarrow 0}$	$k \cdot 1 = f'(0)$	Für die Ableitung einer Exponentialfunktion von der Form $f(x) = e^{kx}$ gilt: $f'(x) = k \cdot e^{kx}$
Begründung	Multiplikation von Brüchen	Ersetze $k \cdot h$ durch t . Beide Zahlen konvergieren gegen Null, da k beliebig aber fest ist.	Der Bruch konvergiert für $t \rightarrow 0$ gegen $g'(0) = 1$ für $g(x) = e^x$ (e-Funktion hat bei 0 die Steigung 1)	

2d)

$$f(x) = a^x = e^{\ln(a) \cdot x} \Rightarrow f'(x) = \ln(a) \cdot e^{\ln(a) \cdot x} = \ln(a) \cdot a^x$$

2e)

$$(1) F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(a) \cdot a^x = a^x$$

$$(2) F(x) = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{k} \cdot k \cdot e^{kx} = e^{kx}$$

2f)

$$(1) f(x) = 3^x = e^{\ln(3) \cdot x} \Rightarrow f'(x) = \ln(3) \cdot e^{\ln(3) \cdot x} \Rightarrow f''(x) = \ln(3) \cdot \ln(3) \cdot e^{\ln(3) \cdot x} = [\ln(3)]^2 \cdot e^{\ln(3) \cdot x}$$

$$F(x) = \frac{1}{\ln(3)} \cdot e^{\ln(3) \cdot x}$$

$$m_t = f'(1) = \ln(3) \cdot e^{\ln(3) \cdot 1} = 3 \ln(3) = \ln(27) \text{ und } t(1) = 3 \Rightarrow \ln(27) \cdot 1 + b = 3 \Rightarrow b = 3 - \ln(27)$$

$$\Rightarrow t(x) = \ln(27) x + 3 - \ln(27)$$

$$(2) f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot x} \Rightarrow f'(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot x} \Rightarrow f''(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot x} = \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot x}$$

$$F(x) = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot x}$$

$$m_t = f'(-1) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot e^{\ln(2)} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = \ln(0,25); t(-1) = 4$$

$$\Rightarrow \ln(0,25) \cdot (-1) + b = 4 \Rightarrow b = 4 - \ln(4) \Rightarrow t(x) = \ln(0,25)x + 4 - \ln(4)$$

$$(3) f(x) = x^2 - 2^x = x^2 - e^{\ln(2) \cdot x} \Rightarrow f'(x) = 2x - \ln(2) \cdot e^{\ln(2) \cdot x} \Rightarrow f''(x) = 2 - [\ln(2)]^2 \cdot e^{\ln(2) \cdot x}$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{\ln(2)} \cdot e^{\ln(2) \cdot x}$$

$$m_t = f'(2) = 4 - \ln(2) \cdot e^{\ln(2) \cdot 2} = 4 - \ln(2) \cdot e^{\ln(2^2)} = 4 - 4 \ln(2); t(2) = f(2) = 0$$

$$\Rightarrow (4 - 4 \ln(2)) \cdot 2 + b = 0 \Rightarrow b = 8 \ln(2) - 8 \Rightarrow t(x) = (4 - 4 \ln(2)) \cdot x + 8 \ln(2) - 8$$

$$(4) f(x) = e^{-2x} + 4^{-x} = e^{-2x} + (4^{-1})^x = e^{-2x} + 0,25^x = e^{-2x} + e^{\ln(0,25) \cdot x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2e^{-2x} + \ln(0,25) \cdot e^{\ln(0,25) \cdot x} \Rightarrow f''(x) = 4e^{-2x} + [\ln(0,25)]^2;$$

$$F(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + \frac{1}{\ln(0,25)} \cdot e^{\ln(0,25) \cdot x}$$

$$m_t = f'(0) = -2 + \ln(0,25) = \ln(0,25) - 2; t(0) = f(0) = 2 = b \Rightarrow t(x) = (\ln(0,25) - 2) \cdot x + 2$$

3a)

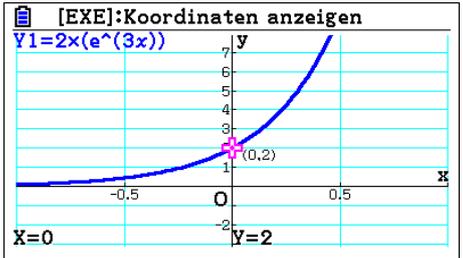
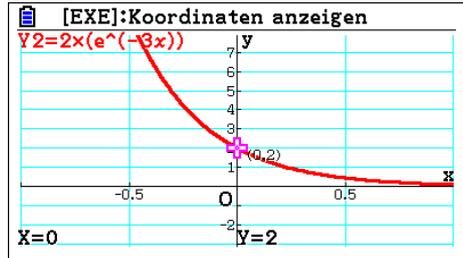
(1) Durch die Streckung in x-Richtung halbiert sich beim Steigungsdreieck der Tangente des gestreckten Graf Δx , während Δy gleich bleibt. Daher ist die Steigung des gestreckten Grafen an der Stelle 0 doppelt so groß.

(2) Da die natürliche Exponentialfunktion an der Stelle 1 die Steigung 1 besitzt und mit (1) der gestreckte Graf dort die Steigung 2 hat, gilt für den gestreckten Grafen $g'(0) = 2$. Da der gestreckte Graf der Graf einer Exponentialfunktion mit der Basis e^2 ist, gilt nach dem Merksatz zu Aufgabe 3 aus dem letzten Kapitel für die Ableitung: $g'(x) = 2 \cdot g(x) = 2 \cdot e^{2x}$.

3b)

(1) Der Parameter c streckt den Grafen von der x-Achse aus in y-Richtung und verändert damit auch die Schnittstelle mit der y-Achse. Sollte c negativ sein, findet eine Spiegelung an der x-Achse statt. Der Parameter k streckt von der y-Achse in x-Richtung. Für $k > 1$ und $k < -1$ wird der Graf der natürlichen Exponentialfunktion in Richtung y-Achse zusammengedrückt. Für $0 < k < 1$ und auch für $-1 < k < 0$ findet eine Stauchung in x-Richtung statt. Der Graf wird von der y-Achse weg „auseinandergezogen“. Ein Vorzeichenwechsel bei k lässt den Grafen an der y-Achse spiegeln.

(2)

$f(x) = ce^{kx}$	$c > 0$ und $k > 0$: z. B. $f(x) = 2e^{3x}$	$c > 0$ und $k < 0$: z. B. $f(x) = 2e^{-3x}$
Graf		
Monotonie	streng monoton zunehmend	streng monoton abnehmend
Randverhalten	$x \rightarrow +\infty: f(x) \rightarrow +\infty$	$x \rightarrow +\infty: f(x) \rightarrow 0$
	$x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow 0$	$x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow +\infty$
Nullstellen	keine	keine
y-Achsenchnittstelle	$y = c$	$y = c$
Krümmungsverhalten	linksgekrümmt	linksgekrümmt

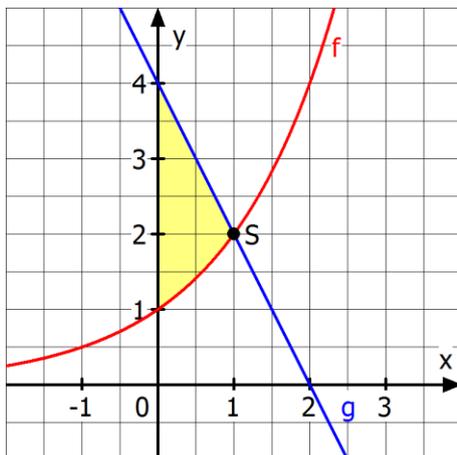
$f(x) = ce^{kx}$	$c < 0$ und $k > 0$: z. B. $f(x) = -2e^{3x}$	$c < 0$ und $k < 0$: z. B. $f(x) = -2e^{-3x}$
Graf		
Monotonie	streng monoton abnehmend	streng monoton zunehmend
Randverhalten	$x \rightarrow +\infty: f(x) \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow +\infty: f(x) \rightarrow 0$
	$x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow 0$	$x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow -\infty$
Nullstellen	keine	keine
y-Achsenchnittstelle	$y = c$	$y = c$
Krümmungsverhalten	rechtsgekrümmt	rechtsgekrümmt

(4)

$$f_{c,k}(x) = ce^{kx} \Rightarrow f_{c,k}'(x) = c \cdot k \cdot e^{kx} \Rightarrow f_{c,k}''(x) = c \cdot k^2 \cdot e^{kx} \text{ und } F_{c,k}(x) = \frac{c}{k} \cdot e^{kx}$$

$f_{c,k}'(x) = c \cdot k \cdot e^{kx} > 0$, falls c und k beide positiv bzw. beide negativ sind. Daher ist der Graph streng monoton zunehmend, falls c und k dasselbe Vorzeichen haben. Bei unterschiedlichen Vorzeichen ist der Graph streng monoton abnehmend. $f_{c,k}''(x) = c \cdot k^2 \cdot e^{kx} > 0$ für $c > 0$. Daher ist der Graph linksgekrümmt für $c > 0$ und rechtsgekrümmt für $c < 0$.

4a)



4b)

Es gilt $f(1) = g(1) = 2$. Daher ist S Schnittpunkt der beiden Grafen. Aufgrund des Verhaltens an den Rändern kann es keinen weiteren Schnittpunkt geben.

4c)

Die gesuchte Fläche lässt sich berechnen über den Ansatz $\int_0^1 [g(x) - f(x)] dx$. Berechne dafür zunächst die Differenzfunktion $d(x) = g(x) - f(x) = -2x + 4 - 2^x$. Die Stammfunktion D ist gegeben durch: $D(x) = -x^2 + 4x - \frac{1}{\ln(2)} 2^x$. Daher gilt:

$$\int_0^1 [g(x) - f(x)] dx = \left[-x^2 + 4x - \frac{1}{\ln(2)} 2^x \right]_0^1 = -1 + 4 - \frac{2}{\ln(2)} - \left(-\frac{1}{\ln(2)} \right) = 3 - \frac{1}{\ln(2)}$$

4d)

$$f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x; m_t = f'(1) = 2 \ln(2); t(1) = 2 \Rightarrow 2 \ln(2) \cdot 1 + b = 2 \Rightarrow b = 2 - 2 \ln(2) \\ \Rightarrow t(x) = 2 \ln(2) \cdot x + 2 - \ln(2)$$

4e)

Ansatz: $f'(x) = k \cdot e^{kx} = -2 \Leftrightarrow e^{kx} = \frac{-2}{k}$. Diese Gleichung ist nur lösbar, wenn k negativ ist, da sonst e^{kx} negativ wäre. Formt man sie nach x um, ergibt sich: $kx = \ln\left(\frac{-2}{k}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{-2}{k}\right)$. Für den y -Wert des Berührungspunktes berechnet man: $y = e^{k \cdot \frac{1}{k} \ln\left(\frac{-2}{k}\right)} = \frac{-2}{k}$. Also: $B\left(\frac{1}{k} \ln\left(\frac{-2}{k}\right) / \frac{-2}{k}\right)$

5a)

Man setzt $f(x)$ und $g(x)$ gleich und zeigt, dass $x = 0$ und $x = -1$:

$-x + 2^x - 0,5 = 2^x + 2^{-x} - 1,5 \Leftrightarrow 1 - x = 2^{-x}$. Offenbar erfüllen sowohl $x = 0$ und $x = -1$ diese Gleichung.

5b)

$$d(x) = f(x) - g(x) = -x + 2^x - 0,5 - (2^x + 2^{-x} - 1,5) = 1 - x - 2^{-x} = 1 - x - (2^{-1})^x \\ = 1 - x - 0,5^x \Rightarrow D(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{\ln(0,5)} \cdot 0,5^x$$

$$\int_{-1}^0 [f(x) - g(x)] dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{\ln(0,5)} \cdot 0,5^x \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{\ln(0,5)} - \left(-1 - 0,5 - \frac{1}{\ln(0,5)} \cdot 0,5^{-1} \right) \\ = -\frac{1}{\ln(0,5)} + 1,5 + \frac{2}{\ln(0,5)} = 1,5 + \frac{1}{\ln(0,5)} \approx 0,06$$

5c) und 5d)

$$f'(x) = -1 + \ln(2) \cdot 2^x \text{ und } f''(x) = [\ln(2)]^2 \cdot 2^x > 0$$

$f'(x) = -1 + \ln(2) \cdot 2^x = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{\ln(2)} \Leftrightarrow x = \log_2\left(\frac{1}{\ln(2)}\right) \approx 0,53$. Da der Graf von f wegen $f''(x) > 0$ durchweg linksgekrümmt ist, ist $x = \log_2\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)$ eine globale Minimumstelle.

$$g'(x) = \ln(2) \cdot 2^x + \ln(0,5) \cdot 0,5^x; g''(x) = [\ln(2)]^2 \cdot 2^x + [\ln(0,5)]^2 \cdot 0,5^x > 0$$

$g'(x) = \ln(2) \cdot 2^x + \ln(0,5) \cdot 0,5^x = 0 \Leftrightarrow \ln(2) \cdot 2^x = -\ln(0,5) \cdot 0,5^x \Leftrightarrow 2^x = 0,5^x \Leftrightarrow x = 0$. Da der Graf von g wegen $f''(x) > 0$ durchweg linksgekrümmt ist, ist $x = 0$ eine globale Minimumstelle.

6

Aussage (1) ist wahr, da $f'(x) = k \cdot e^{kx} \neq 0$ für $k \neq 0$

Aussage (2) ist wahr, falls $e^{kx} = a$ genau eine Lösung hat. Dies ist genau für $a > 0$ der Fall.

Aussage (3) ist wahr, falls $f'(x) = k \cdot e^{kx}$ an der Stelle 0 positiv ist. Also $f'(0) = k > 0$. Dies ist für positive k der Fall.

Aussage (4) ist wahr, da $f(x) = e^{-\ln(a) \cdot x} = e^{\ln(a^{-x})} = a^{-x}$ die Funktion des an der y -Achse gespiegelten Grafen zu g mit $g(x) = a^x$ ist.

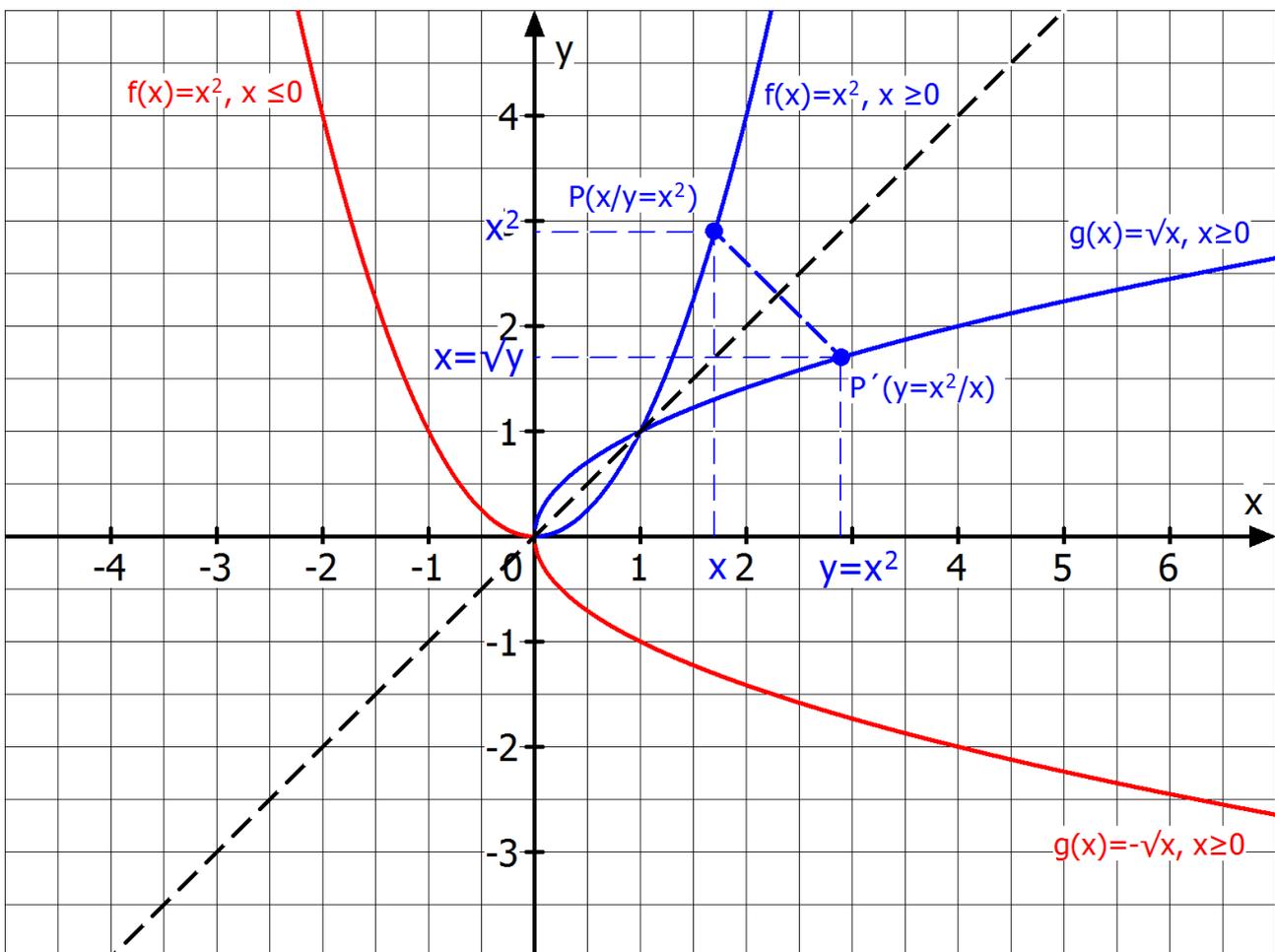
Aussage (5) ist nur wahr für $a > 1$, da $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x > 0 \Leftrightarrow \ln(a) > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

Aussage (6) ist nur wahr für $c > 0$, da $ce^{kx} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{kx} = \frac{1}{c}$ nur für $c > 0$ genau eine Lösung besitzt.

4 Natürliche Logarithmusfunktion

1

„Funktionspartner sein“ bedeutet, dass der Graf einer Funktion an der 1. Winkelhalbierenden gespiegelt wird, um den Grafen der Partnerfunktion zu erzeugen. Man erhält zum Punkt $P(x/y)$ eines Grafen den Bildpunkt durch Vertauschen von x - und y -Wert. Also gilt $P'(y/x)$. Beispiel: Der Punkt P auf dem rechten Normalparabelast mit $f(x) = x^2$ und $x \geq 0$ hat den allgemeinen Parabelpunkt $P(x/y = x^2)$. Der Bildpunkt lautet $P'(y = x^2/x)$. Für den Bildpunkt wird nun jedem $y = x^2 \geq 0$ ein Funktionswert $x \geq 0$ zugeordnet. Wegen $y = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y}$ und $x \geq 0$ wird jedem $y \geq 0$ der Funktionswert \sqrt{y} zugeordnet. Es gilt für die Funktionsgleichung g des gespiegelten Grafen also: $g(y) = \sqrt{y}$. Ersetzt man x durch y ($y, x \geq 0$) erhält man die bekannte Form $g(x) = \sqrt{x}$.

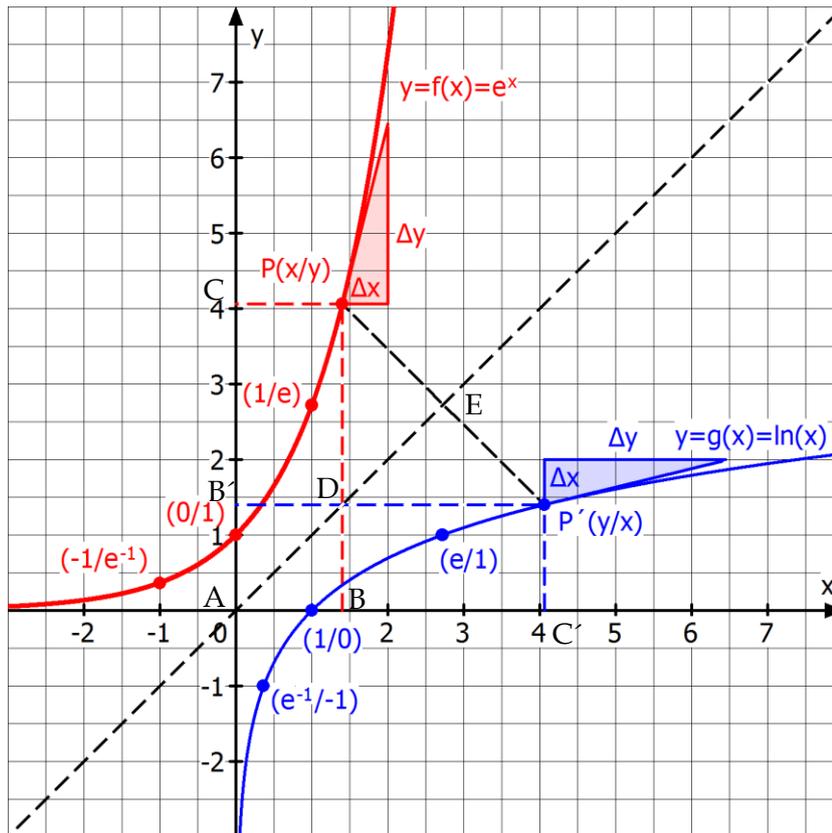


Analog gilt $y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$ und $x \geq 0$ und es folgt die Funktion $g(y) = \sqrt[3]{y}$ für $y \geq 0$. Setzt man x statt y , erhält man die gewohnte Form $g(x) = \sqrt[3]{x}$ mit $x \geq 0$.

Die Partnerfunktion zu $f(x) = x + 3$ lautet $g(x) = x - 3$. Begründung: Der allgemeine Geradenpunkt der Gerade f lautet $P(x/y = x + 3)$ und hat den Bildpunkt $P'(y = x + 3/x)$. Wegen der Umformung $y = x + 3 \Leftrightarrow x = y - 3$ liefert $g(y) = y - 3$ bzw. $g(x) = x - 3$ die Funktionsgleichung des gespiegelten Grafen.

Ebenso erhält man aus $y = 3x$ die Gleichung $x = \frac{1}{3}y$ und aus $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$. In allen Fällen nennt man die Funktionen der gespiegelten Grafen Umkehrfunktionen zu den Funktionen der Ausgangsgraf.

2a)



Es sei $P(x/y)$. Daher hat das Rechteck $ABPC$ die Seitenlängen x und y . Zu Zeigen ist, dass das Rechteck $AC'P'B'$ die Seitenlängen y und x hat. Beweis: Sei D der Schnittpunkt der längeren Rechteckseiten und $\overline{AB} = x$ und $\overline{AC} = y$. Die Dreiecke ABD und ADB' sind kongruent nach SWW (gemeinsame Seite \overline{AD} , 45-Grad-Winkel als Steigungswinkel der Geraden $y = x$ und 90-Grad-Winkel). Daher gilt: $\overline{B'D} = \overline{BD}$. Beide Seiten entsprechen der Strecke \overline{AB} , da die beiden Dreiecke ABD und ADB' auch gleichschenkelig sind (Basiswinkel betragen beide 45 Grad). Also: $\overline{BD} = \overline{C'P'} = x$. Ebenso sind die Dreiecke $DP'E$ und DEP kongruent z. B. nach SWS (Seite \overline{DE} , $\overline{PE} = \overline{P'E}$ und rechter Winkel). Daher gilt $\overline{PD} = \overline{P'D}$ und mit $\overline{B'D} = \overline{BD}$ auch $\overline{BP} = \overline{B'P'} = y$.

2b)

Der x -Wert des Bildpunktes beträgt $y = e^x$. Ihm wird der y -Wert x zugeordnet. Wegen der Umformung $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$ und der Tatsache, dass e^x alle positiven Zahlen durchläuft, wird jedem $y = e^x > 0$ der Funktionswert $x = \ln(y)$ zugeordnet. Man erhält also für $y > 0$ die Funktionsgleichung $g(y) = \ln(y)$ mit $y > 0$. [Eine alternative Argumentation kann folgendermaßen aussehen: $y = e^x > 0 \xrightarrow{\text{Spiegelung: } x \text{ und } y\text{-Wert vertauschen}} x = e^y > 0 \xrightarrow{\text{nach } y \text{ auflösen}} y = \ln(x) \text{ mit } x > 0.$]

2c)

Sei $f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x$. Offenbar gilt für die Umkehrfunktion $g: g'(y) = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{e^x}$. Da aber $y = f(x) = e^x$ und e^x alle positiven Zahlen durchläuft, folgt für $y > 0$: $g'(y) = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{y}$. Ersetzt man y durch x , erhält man die gängige Form: $g'(x) = \frac{1}{x}$. Kurzform: $f'(x) = e^x \xrightarrow{\text{gespiegeltes Steigungsdreieck}} g'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$ mit $y > 0$

2d)

(1) Wegen $g'(x) = \frac{1}{x} > 0$ ist der Graf der natürlichen Logarithmusfunktion für $x > 0$ streng monoton wachsend und besitzt daher keine Extremstellen.

(2) Es gilt $\ln(1) = 0$, da $e^0 = 1$. Da der Graf wegen (1) streng monoton wachsend für $x > 0$ ist, existiert keine weitere Nullstelle von g .

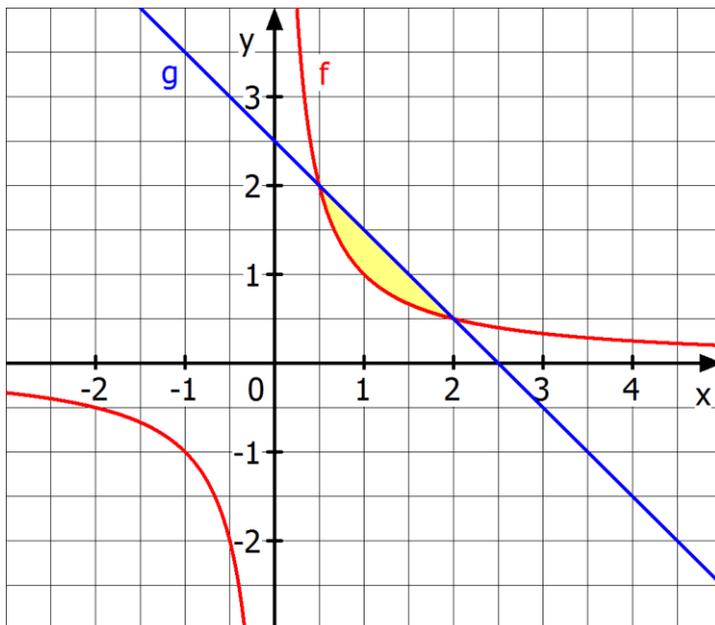
(3) $g''(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} < 0$: Der Graf von g ist für $x > 0$ rechtsgekrümmt.

(4) Dies kann aus dem Verhalten der natürlichen Exponentialfunktion an den Rändern und der Tatsache, dass der Graf der natürlichen Logarithmusfunktion an der Geraden $y = x$ gespiegelt wurde gefolgert werden: $y = e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \xrightarrow{\text{Spiegelung}} x = \ln(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} -\infty$. Analog kann für das Verhalten $x \rightarrow +\infty$ gefolgert werden: $y = e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \xrightarrow{\text{Spiegelung}} x = \ln(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} -\infty$.

2e)

Ein Beispiel ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$. Würde man den kompletten Grafen spiegeln, was gleichbedeutend ist mit der Bildung einer Umkehrfunktion auf dem kompletten Definitionsbereich, erhielte man keinen Grafen einer Funktion, da einem x -Wert zwei y -Werte zugeordnet wären. Wichtig ist also, dass beim Definitionsbereich der Ausgangsfunktion jedem y -Wert genau ein x -Wert zugeordnet ist. Denn dann entsteht erst eine Funktion, die jedem x -Wert (y -Wert der Ausgangsfunktion) genau ein y -Wert (x -Wert der Ausgangsfunktion) zugeordnet wird.

3a)



3b)

Die Schnittstellen der Funktionen f und g berechnet man durch Gleichsetzen der Funktionsterme: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -x + 2,5 \Leftrightarrow 1 = -x^2 + 2,5x \Leftrightarrow x^2 - 2,5x + 1 = 0$. Die Diskriminante lautet dann: $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1 = \frac{25}{16} - \frac{16}{16} = \frac{9}{16}$. Daher gilt für die Lösungen der quadratischen Gleichung und damit für die Schnittstellen: $x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 0,5$.

3c)

Für den Flächeninhalt A , den beide Grafen einschließen gilt: $A = \int_{0,5}^2 [g(x) - f(x)] dx$
 $= \int_{0,5}^2 \left(-x + 2,5 - \frac{1}{x}\right) dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2,5x - \ln(x)\right]_{0,5}^2 = (-2 + 5 - \ln(2)) - \left(-\frac{1}{8} + \frac{5}{4} - \ln(0,5)\right)$
 $= 3 - \ln(2) - \frac{9}{8} + \ln(0,5) = \frac{15}{8} - 2 \ln(2) \approx 0,49$

3d)

$$\int_1^{10} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^{10} = \ln(10) - \ln(1) \approx 2,30$$

3e)

$$\int_1^R \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^R = \ln(R) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} +\infty \text{ (Aufgabe 2d(4))}$$

$$\int_L^1 \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_L^1 = -\ln(L) \xrightarrow{L \rightarrow 0} +\infty \text{ (Aufgabe 2d(4))}$$

Daher existieren beide Integrale nicht.

4a)

$$\int_1^3 \left(\frac{1}{3x} + x \right) dx = \left[\frac{1}{3} \ln(x) + \frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 = \frac{1}{3} \ln(3) + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{3} \ln(3) \approx 4,37$$

4b)

$$\int_1^2 \left(\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[5 \ln(x) - \frac{1}{x} \right]_1^2 = 5 \ln(2) - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 5 \ln(2) \approx 3,97$$

4c)

$$\int_1^2 \left(e^{2x} + \frac{1}{2x} \right) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} \ln(x) \right]_1^2 = \frac{1}{2} e^4 + \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} e^2 = \frac{1}{2} (e^4 - e^2 + \ln(2)) \approx 23,95$$

5

Aussage (1) ist wahr, wenn man sich auf den kompletten Definitionsbereich bezieht. Denn aufgrund der Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse können jeden y-Wert aus dem Wertebereich der Funktion immer mindestens zwei x-Werte aus dem Definitionsbereich zugeordnet werden.

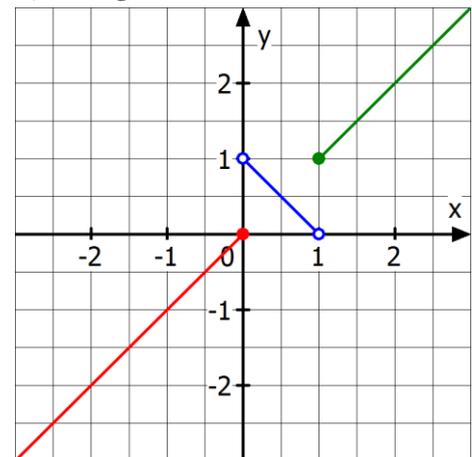
Gegenbeispiel zu Aussage (2): Die Funktion f mit $f(x) = (x-1)^2$ ist als nicht gerade Funktion nicht umkehrbar auf \mathbb{R} , da jeden Funktionswert > 0 genau zwei x-Werte zugeordnet sind.

Aussage (3) ist wahr. Denn wenn $f'(x) \neq 0$ für alle x-Werte des Definitionsbereiches, dann muss $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$ für alle x des Definitionsbereiches sein (sonst gäbe es eine Nullstelle der ersten Ableitung). Daher muss der Graf von f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend sein. Somit ist die Funktion auch umkehrbar.

Aussage (4) ist wahr. Denn hätte eine umkehrbare Funktion auf ihrem Definitionsbereich eine Extremstelle a , gäbe es in einer Umgebung von a zwei Stelle c und d mit $f(c) = f(d)$, was ein Widerspruch zur Umkehrbarkeit der Funktion wäre.

Aussage (5) ist falsch, da die Funktion nicht unbedingt sprunfrei sein muss. Betrachte zum Beispiel folgende

Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{für } 0 < x < 1 \\ x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ (Graf rechts)



Aussage (6) ist wahr: $y = x^2 > 0 \xrightarrow{\text{x und y-Wert vertauschen}} x = y^2 > 0 \xrightarrow{\text{nach y auflösen}} y = \sqrt{x} \text{ mit } x > 0.$

6a)

Man vertauscht x und y-Wert und löst na y auf. Dabei sind Definitions- und Wertebereich von Funktion und Umkehrfunktion jeweils vertauscht. In Kurzschreibweise gilt:

$$y = e^{2x} > 0; x \in \mathbb{R} \xrightarrow{x \Leftrightarrow y} x = e^{2y} > 0; y \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{nach } y \text{ auflösen}} 2y = \ln(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln(x) = \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \in \mathbb{R}; x > 0$$

6b)

$$(1) \ln(\sqrt{x}) = 0$$

$$(2) \int_{-1}^0 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2}$$

$$(3) \int_{-1}^0 e^{2x} dx = -\int_{e^{-2}}^1 g(x) dx + \text{Rechteck mit den Seitenlängen } 1 \text{ und } e^{-2} = -\int_{e^{-2}}^1 g(x) dx + e^{-2}. \text{ Also gilt: } \int_{e^{-2}}^1 g(x) dx = -\int_{-1}^0 e^{2x} dx + e^{-2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2} + e^{-2} = \frac{3}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}$$

$$(4) \int_L^0 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_L^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2L} \xrightarrow{L \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}. \text{ Aus Symmetriegründen gilt } \int_0^1 g(x) dx = -\frac{1}{2}$$

6c)

$$g'(x) = \frac{1}{2x}; m_t = g'(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow t(x) = \frac{1}{2}x + b; t(1) = 0: \frac{1}{2} \cdot 1 + b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}. \text{ Also gilt für die Tangente } t \text{ im Punkt } (1/0): t(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

6d)

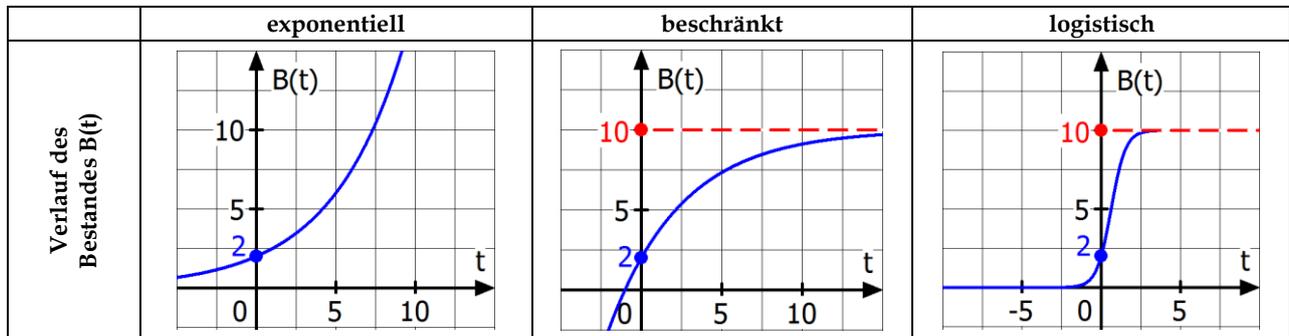
Man subtrahiert vom Flächeninhalt der unbeschränkten Fläche, die der Graf von g über dem Intervall $[0; 1]$ mit der x -Achse einschließt (er beträgt nach b)(4) $0,5$) den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreieck, das die Tangente t mit den beiden Koordinatenachsen begrenzt (er beträgt $0,25$). Also beträgt der gesuchte Flächeninhalt $0,25$.

5 Wachstumsvorgänge

1a) Der Anfangsbestand $B(0)$ beträgt in allen Fällen 2.

1b)

B_1 beschreibt das beschränkte Wachstum ($x \rightarrow -\infty: B_1(t) \rightarrow -\infty; x \rightarrow +\infty: B_1(t) \rightarrow 10$), B_2 das logistische Wachstum ($x \rightarrow -\infty: B_2(t) \rightarrow 0; x \rightarrow +\infty: B_2(t) \rightarrow 10$) und B_3 das exponentielle Wachstum ($x \rightarrow -\infty: B_3(t) \rightarrow 0; x \rightarrow +\infty: B_3(t) \rightarrow +\infty$).



1c) Die Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit verläuft logistisch, der Guthabenzins auf einem Sparkonto exponentiell, die Erwärmung eines Tiefkühlprodukts bei Zimmertemperatur beschränkt.

1d) B_1 gehört zum beschränkten Wachstum, B_3 zum exponentiellen Wachstum und B_2 zum logistischen Wachstum.

1e)

$$B_3(t) = 2 \cdot e^{0,22t} \Rightarrow B_3'(t) = 2 \cdot 0,22 \cdot e^{0,22t} = 0,22 \cdot 2 \cdot e^{0,22t} = 0,22 \cdot B_3(t) = k \cdot B_3(t)$$

$$B_1(t) = 10 - (10 - 2)e^{-0,22t} = 10 - 8 \cdot e^{-0,22t} \Rightarrow B_1'(t) = -8 \cdot (-0,22) \cdot e^{-0,22t} = 1,76 \cdot e^{-0,22t}$$

$$\text{Andererseits gilt: } k \cdot (S - B_1(t)) = 0,22 \cdot (10 - [10 - (10 - 2)e^{-0,22t}]) = 0,22 \cdot 8 \cdot e^{-0,22t} = 1,76 \cdot e^{-0,22t}$$

Nicht gefordert, da Kettenregel vorausgesetzt wird:

$$B_2(t) = \frac{2 \cdot 10}{2 + (10 - 2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}} = 2 \cdot 10 \cdot (2 + (10 - 2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t})^{-1}$$

$$\Rightarrow B_2'(t) = 2 \cdot 10 \cdot (-1) \cdot (2 + (10 - 2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t})^{-2} \cdot (10 - 2) \cdot (-0,22) \cdot 10 \cdot e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}$$

$$= 0,22 \cdot \frac{2 \cdot 10}{(2 + (10 - 2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t})^2} \cdot (10 - 2) \cdot 10 \cdot e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t} = 0,22 \cdot \frac{1600 \cdot e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}}{(2 + 8 \cdot e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t})^2}$$

Andererseits gilt:

$$k \cdot B_2(t) \cdot (S - B_2(t)) = 0,22 \cdot \frac{2 \cdot 10}{2 + (10 - 2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}} \cdot \left(10 - \frac{2 \cdot 10}{2 + (10 - 2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}}\right)$$

$$= 0,22 \cdot \left(\frac{2 \cdot 10 \cdot 10}{2 + (10 - 2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}} - \frac{2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10}{(2 + (10 - 2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t})^2}\right) = 0,22 \cdot \frac{2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot (2 + (10 - 2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}) - 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10}{(2 + (10 - 2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t})^2}$$

$$= 0,22 \cdot \frac{2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 + 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot (10 - 2) \cdot e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t} - 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10}{(2 + (10 - 2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t})^2} = 0,22 \cdot \frac{2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot (10 - 2) \cdot e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t}}{(2 + (10 - 2)e^{-0,22 \cdot 10 \cdot t})^2} = B_2'(t) \text{ von oben (Puh!)}$$

1f) (1) linear; (2) logistisch; (3) beschränkt; (4) exponentiell; (5) kein Wachstum; (6) beschränkt; (7)²⁵ beschränkt; (8) logistisch; (9) exponentielle ($k < 0$) und beschränkt ($S = 0$).

²⁵ Die Anzahl der Tiere nach n Jahren lässt sich durch folgenden Ausdruck beschreiben:

$$N(n) = 0,97 \cdot (\dots (0,97 \cdot (0,97 \cdot (0,97 \cdot 750 + 15) + 15) + 15) + 15 \dots) + 15$$

$$= 0,97^n \cdot 750 + 0,97^{n-1} \cdot 15 + 0,97^{n-2} \cdot 15 + \dots + 0,97^2 \cdot 15 + 0,97^1 \cdot 15 + 15$$

$$= 0,97^n \cdot 750 + (0,97^{n-1} + 0,97^{n-2} + \dots + 0,97^2 + 0,97^1 + 1) \cdot 15$$

$$= 0,97^n \cdot 750 + 15 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 0,97^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{15}{1 - 0,97} = \frac{15}{0,03} = 500. \text{ Langfristig hat die Herde eine Größe von 500 Tieren.}$$

2a) Sei n die Anzahl der Würfe, $B(0)$ die Würfelzahl zu Beginn und $B(n)$ die Würfelanzahl nach n Versuchen. Dann gilt für die Würfelzahl nach n Versuchen $B(n) = B(0) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Da Leah nach 10 Versuchen nur noch 5 Würfel hat, gilt $5 = B(0) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \Leftrightarrow B(0) = \frac{5}{\left(\frac{5}{6}\right)^{10}} \approx 31$. Es waren wohl 31 Würfel.

2b)

(1) $B(t) = B(0) \cdot e^{kt} \Rightarrow B'(t) = B(0) \cdot k \cdot e^{kt} = k \cdot B(0) \cdot e^{kt} = k \cdot B(t)$

(2) $B(t) = B(0) \cdot a^t = B(0) \cdot e^{kt} = B(0) \cdot (e^k)^t \Leftrightarrow a = e^k \Leftrightarrow k = \ln(a)$

(3) Bei B_3 : $k = 0,22$; $a = e^{0,22}$

2c)

(1) Ansatz: $B(t) = B(0) \cdot e^{kt} = 2,5 \cdot e^{kt}$; $B(30) = 4,5 \Rightarrow 4,5 = 2,5 \cdot e^{30k} \Leftrightarrow 1,8 = e^{30k} \Leftrightarrow 30k = \ln(1,8)$.
Also: $k = \frac{\ln(1,8)}{30} \approx 0,0196 \Rightarrow B(t) \approx 2,5 \cdot e^{0,0196t} \Rightarrow a = e^{0,0196} \approx 1,0198$

(2) Ansatz Verdopplungszeit: $5 = 2,5 \cdot e^{0,0196t} \Leftrightarrow 2 = e^{0,0196t} \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{0,0196} \approx 35,4$ Jahre. Die jährliche Wachstumsrate beträgt $p = e^{0,0196} - 1 \approx 1,98\%$. Nach 35,4 Jahren hat sich die Weltbevölkerung bei einer jährlichen Wachstumsrate von knapp 2 % verdoppelt.

(3) $B(55) = 2,5 \cdot e^{0,0196 \cdot 55} \approx 7,35$; Abweichung zum tatsächlichen Wert: $\frac{7,35}{6,4} - 1 \approx 14,84\%$;

$B(-30) = 2,5 \cdot e^{0,0196 \cdot (-30)} \approx 1,39$; Abweichung zum tatsächlichen Wert: $\frac{1,39}{1,8} - 1 \approx -22,78\%$;

2d)

(1) Durchschnittswert: 1,8202. $B(t) = B(0) \cdot a^t = 80 \cdot 1,8202^t = 80 \cdot e^{kt}$; $k = \ln(1,8202) \approx 0,5989$

(2) Über die Funktion $\frac{d}{dx}$ (MENU 1 \rightarrow OPT \rightarrow CALC) kann die Ableitung an einer bestimmten Stelle berechnet werden: $B'(0) \approx 47,92$; $B'(1) \approx 87,22$; $B'(2) \approx 158,75$; $B'(3) \approx 288,96$; $B'(4) \approx 525,96$; $B'(5) \approx 957,36$. Für den Ableitungsterm der Funktion B gilt: $B'(t) = 80 \cdot 0,5989 \cdot e^{0,5989t} = 47,912 \cdot e^{0,5989t}$. Die Verdopplung der Wachstumsgeschwindigkeit berechnet man durch folgenden Ansatz: $2 = e^{0,5989t} \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{0,5989} \approx 1,16$. Nach 1,16 Stunden hat sich die Bakterienzahl verdoppelt.

2e)

(1) Für den durchschnittlichen Wachstumsfaktor a ergibt sich gerundet $a = 0,7234$. Also gilt für k : $k = \ln(0,7234) \approx -0,3238$. Mit dem Anfangswert $B(0) = 10$ ergibt sich $B(t) = 10 \cdot e^{-0,3238t}$.

(2) Für die Funktion C mit $C(t) = c \cdot e^{kt}$ und den beiden Bedingungen $C(2) = 5$ und $C(5) = 2$ erhält man die beiden Gleichungen $c \cdot e^{2k} = 5$ und $c \cdot e^{5k} = 2$. Es gilt durch „Division“ der beiden Gleichungen: $\frac{c \cdot e^{5k}}{c \cdot e^{2k}} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow e^{3k} = 0,4 \Rightarrow k = \frac{\ln(0,4)}{3} \approx -0,3054 \Rightarrow c = \frac{5}{e^{2 \cdot (-0,3054)}} \approx 9,2095$.

2f)

(1) Die Länge der Pflanze nach 10 Wochen kann beschreiben werden durch die Summe aus Ausgangslänge und Längenzuwachs: Daher gilt für diese Länge: $v(t) = 3,8 \cdot 0,9^t$

$$10 + \int_0^{10} v(t) dt = 10 + \left[3,8 \cdot \frac{1}{\ln(0,9)} \cdot 0,9^t \right]_0^{10} = 10 + \frac{3,8}{\ln(0,9)} \cdot 0,9^{10} - \frac{3,8}{\ln(0,9)} \approx 33,5 \text{ [cm]}$$

(2) $\frac{1}{10-0} \cdot \int_0^{10} v(t) dt \approx 2,35 \text{ [cm pro Woche]}$

(3) $3,8 \cdot 0,9^t = 1,9 \Leftrightarrow 0,9^t = 0,5 \Leftrightarrow t = \log_{0,9}(0,5) \approx 6,58$. Nach ca. 6,5 Wochen hat sich die Wachstumsgeschwindigkeit auf die Hälfte halbiert.

(4) $\int_0^t v(x) dx$: Längenzuwachs nach t Wochen.

3a)

(1) Der Parameter c ist positiv, da der y -Achsenabschnitt oberhalb der x -Achse liegt. Der Parameter k ist ebenso negativ, da der Graf von f monoton fallend ist.

(2) Graf I wird an der x -Achse gespiegelt (Graf II) und dann in positive y -Richtung (Graf III) verschoben.

(3) Die Gleichung von Graf III lautet $h(x) = -c \cdot e^{kx} + d$ ($c, d > 0; k < 0$). Er entsteht durch:

$$f(x) = c \cdot e^{kx} \xrightarrow{\text{Spiegelung an der } x\text{-Achse}} g(x) = -c \cdot e^{kx} \xrightarrow{\text{Verschiebung um } d \text{ nach oben}} h(x) = -c \cdot e^{kx} + d$$

3b)

(1)

t in Jahren	Verfahren 1 („Zunahme der ökologisch genutzten Fläche“)
0	80
1	$80 + (700 - 80) \cdot 0,1 = 142$
2	$142 + (700 - 142) \cdot 0,1 = 197,8$
3	$197,8 + (700 - 197,8) \cdot 0,1 = 248,02$
4	$248,02 + (700 - 248,02) \cdot 0,1 = 293,218$
5	$293,218 + (700 - 293,218) \cdot 0,1 = 333,8962$
t	Biologisch genutzte Fläche nach $t - 1$ Jahren + nicht biologisch genutzte Fläche nach $t - 1$ Jahren \cdot biologische Nutzungsrate

Für dieses Verfahren ist eine Herleitung der expliziten Formel für $B(t)$ eher ungeeignet und bedarf einiger „scharfer“ Blicke, der mehrfachen Anwendung des Distributivgesetzes und eines Rechen-tricks.²⁶

Einfacher geht es für die Herleitung einer expliziten Formel mit einem zweiten Verfahren:

t in Jahren	Verfahren 2 („Abnahme der biologisch ungenutzten Fläche“)
0	$700 - (700 - 80) = 80$
1	$700 - (700 - 80) \cdot 0,9 = 142$
2	$700 - (700 - 142) \cdot 0,9 = 700 - (700 - (700 - (700 - 80) \cdot 0,9)) \cdot 0,9$ $= 700 - (700 - 700 + (700 - 80) \cdot 0,9) \cdot 0,9 = 700 - (700 - 80) \cdot 0,9 \cdot 0,9$ $= 700 - (700 - 80) \cdot 0,9^2 = 197,8$
3	$700 - (700 - 80) \cdot 0,9^3 = 248,02$
4	$700 - (700 - 80) \cdot 0,9^4 = 293,218$
5	$700 - (700 - 80) \cdot 0,9^5 = 333,8962$
t	Gesamtfläche – biologisch genutzte Fläche \cdot konventionelle Nutzungsrate ^{Jahre}
	$700 - (700 - 80) \cdot 0,9^t$
	Sättigungsgrenze – Sättigungsmanko zu Beginn \cdot konventionelle Nutzungsrate ^{Jahre}

$$^{26} B_0 = 80 = 700 - (700 - 80)$$

$$B_1 = 700 - (700 - 80) + (700 - 80) \cdot 0,1 = 700 - ((700 - 80) \cdot 1 - (700 - 80) \cdot 0,1)$$

$$= 700 - (700 - 80) \cdot (1 - 0,1) = 700 - (700 - 80) \cdot 0,9 = 700 - (700 - 80) \cdot 0,9^1$$

$$B_2 = 700 - (700 - 80) \cdot 0,9^1 + (700 - (700 - (700 - 80) \cdot 0,9^1)) \cdot 0,1$$

$$= 700 - (700 - 80) \cdot 0,9^1 + (700 - 700 + (700 - 80) \cdot 0,9^1) \cdot 0,1$$

$$= 700 - (700 - 80) \cdot 0,9^1 + (700 - 80) \cdot 0,9^1 \cdot 0,1 = 700 - (700 - 80) \cdot 0,9^1 \cdot (1 - 0,1)$$

$$= 700 - (700 - 80) \cdot 0,9^2$$

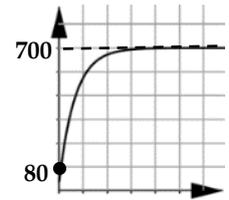
$$B_3 = 700 - (700 - 80) \cdot 0,9^2 + (700 - (700 - (700 - 80) \cdot 0,9^2)) \cdot 0,1$$

$$700 - (700 - 80) \cdot 0,9^2 + (700 - 80) \cdot 0,9^2 \cdot 0,1 = 700 - (700 - 80) \cdot 0,9 \cdot (1 - 0,1)$$

$$= 700 - (700 - 80) \cdot 0,9^3$$

$$\text{Also: } B_t = 700 - (700 - 80) \cdot 0,9^t$$

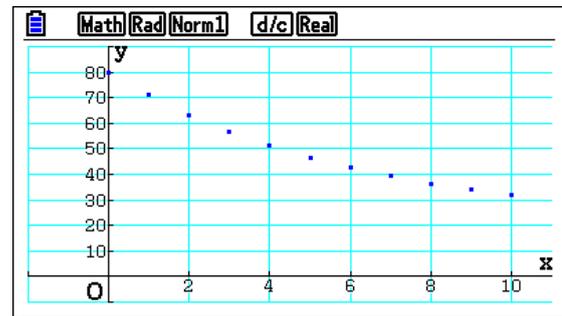
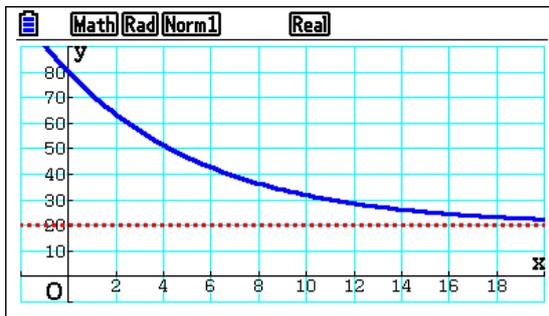
(2) Es handelt sich um ein beschränktes Wachstum mit der oberen Schranke von 700 und einem Startwert von 80. Die Differenz von Gesamtfläche und biologisch genutzter Fläche wird immer kleiner und ist proportional zur Wachstumsgeschwindigkeit, mit der sich die ökologisch genutzte Fläche ändert.



(3) Die ökologisch genutzte Fläche $B(t)$ nach t Jahren lässt sich durch die Gesamtfläche minus die ökologisch ungenutzte Fläche nach t Jahren berechnen. Also gilt: $B(t) = 700 - 620 \cdot 0,9^t = 700 - 620 \cdot e^{-kt} \Leftrightarrow 0,9 = e^{-k} \Leftrightarrow k = -\ln(0,9) \approx 0,1054$. $B(t) = 700 - (700 - 80) \cdot e^{-0,1054t} = 700 - 620 \cdot e^{-0,1054t}$. Die Sättigungsgrenze S beträgt 700, der Anfangswert $B(0)$ ist 80. Insgesamt handelt sich um ein nach oben beschränktes Wachstum. Der Graph ist monoton steigend, rechtsgekrümmt, das Sättigungsmanko (hier die nicht ökologisch genutzte Fläche $S - B(t)$) nimmt mit der Zeit ab und ist proportional (mit dem Faktor k) zur momentanen Änderungsrate $B'(t)$ der ökologisch genutzten Fläche.

3c)

(1)



(2)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B(t)	80	71	63,4	56,8	51,3	46,6	42,6	39,2	36,3	33,9	31,8
B'(t)	-9,8	-8,3	-7,1	-6	-5,1	-4,3	-3,7	-3,1	-2,7	-2,3	-1,9
20 - B(t)	-60	-51	-43,4	-36,8	-31,3	-26,6	-22,6	-19,2	-16,3	-13,9	-11,8
$k = B'(t):D(t)$	0,1633	0,1627	0,1636	0,1630	0,1629	0,1617	0,1637	0,1615	0,1656	0,1655	0,1610

Bei der Temperaturabkühlung handelt es sich um ein nach unten beschränktes Wachstum. Der Graph ist streng monoton fallend, linksgekrümmt und nähert sich der Raumtemperatur von 20 Grad Celsius an. Die Sättigungsgrenze S ist die Raumtemperatur von 20 Grad Celsius. $B(0)$ beschreibt die Anfangstemperatur des Kaffees und beträgt 80 Grad Celsius. Die Proportionalitätskonstante k aus Abkühlgeschwindigkeit $B'(t)$ und $D(t)$ beträgt im Mittel ca. $k = 0,1631$

(3) Die Temperatur $B(t)$ des Kaffees nach t Minuten ist gleich der Raumtemperatur plus die Temperaturdifferenz aus aktueller Kaffeetemperatur und Raumtemperatur. Also gilt für die Funktion B : $B(t) = 20 + 60 \cdot e^{-kt} = 20 + 60 \cdot e^{-0,1631t}$.

(4) $B(20) = 20 + 60 \cdot e^{-0,1631 \cdot 20} \approx 22,3$. Nach 20 Minuten hat der Kaffee eine Temperatur von ca. 22 Grad Celsius. $B(t) = 40$ gilt wenn $40 = 20 + 60 \cdot e^{-0,1631 \cdot t} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = e^{-0,1631 \cdot t} \Leftrightarrow t = \frac{\ln(\frac{1}{3})}{-0,1631} \approx 6,73$. Nach etwa sieben Minuten erreicht der Kaffee eine Temperatur von 40 Grad Celsius.

(5) Gesucht ist der Wachstumsfaktor a . Es gilt $a = e^{-k} = e^{-0,1631} \approx 0,8495$. Man könnte daher auch $B(t) = 20 + 60 \cdot 0,8495^t$ schreiben. Pro Minute nimmt die Kaffeetemperatur mit ca. 15 % der noch vorhandenen Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur ab.

3d)

$B(t) = 1000 - 900 \cdot 0,85^t = 1000 - 900 \cdot e^{-kt} \Leftrightarrow 0,85 = e^{-k} \Leftrightarrow k = -\ln(0,85) \approx 0,1625$.

3e)

$$B(t) = 3 - 2,5 \cdot 0,88^t = 3 - 2,5 \cdot e^{-kt} \Leftrightarrow 0,88 = e^{-k} \Leftrightarrow k = -\ln(0,88) \approx 0,1278.$$

3f)

$$B(t) = 5000 - 4800 \cdot 0,95^t = 5000 - 4800 \cdot e^{-kt} \Leftrightarrow 0,95 = e^{-k} \Leftrightarrow k = -\ln(0,95) \approx 0,0513.$$

$$4500 = 5000 - 4800 \cdot e^{-0,0513t} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow t = \frac{\ln(\frac{5}{48})}{-0,0513} \approx 44,09 \text{ Monate}$$

3g)

$$B(t) = 36,8 + 3,2 \cdot 0,2^t = 36,8 + 3,2 \cdot e^{-kt} \Leftrightarrow 0,2 = e^{-k} \Leftrightarrow k = -\ln(0,2) \approx 1,6094$$

3h)

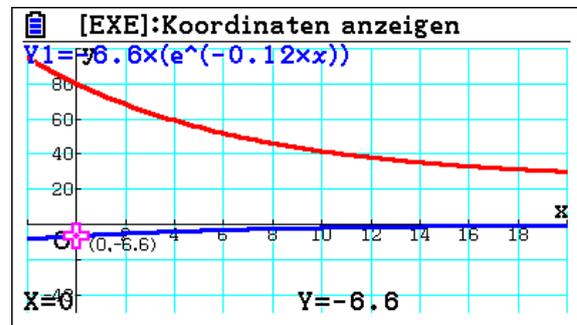
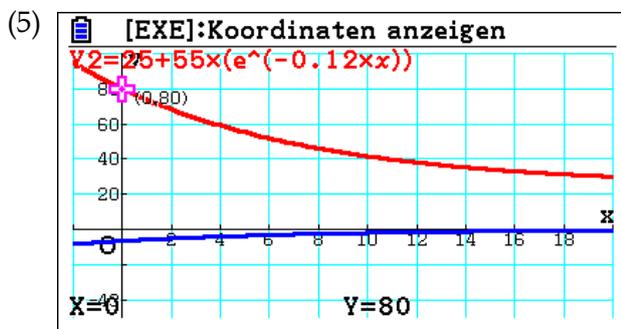
(1) Eine Stammfunktion v lautet $v(t) = -6,6 \cdot \frac{1}{-0,12} \cdot e^{-0,12t} = 55 \cdot e^{-0,12t}$.

(2) $\int_0^{10} v(t) dt = [55 \cdot e^{-0,12t}]_0^{10} = 55e^{-1,2} - 55 \approx -38,43$ [°C] beschreibt die Temperaturabnahme des Tees nach 10 Minuten. Der Tee hat nach 10 Minuten eine Temperatur von 41,57 °C. Durch $\frac{1}{10-0} \int_0^{10} v(t) dt = \frac{1}{10} \cdot [55 \cdot e^{-0,12t}]_0^{10} \approx -3,84$ [°C pro Minute] wird die mittlere Abkühlgeschwindigkeit in den ersten 10 Minuten bestimmt.

(3) Die Funktion f kann konstruiert werden durch die Summe der Ausgangstemperatur und der Temperaturabnahme. Daher gilt $f(t) = 80 + \int_0^t v(x) dx = 80 + [55 \cdot e^{-0,12x}]_0^t = 80 + 55 \cdot e^{-0,12t} - 55 = 25 + 55 \cdot e^{-0,12t} = 25 - (25 - 80) \cdot e^{-0,12t}$.

(4) $f(t) = 40 \Leftrightarrow 25 + 55 \cdot e^{-0,12t} = 40 \Leftrightarrow 55 \cdot e^{-0,12t} = 15 \Leftrightarrow e^{-0,12t} = \frac{3}{11} \Leftrightarrow -0,12t = \ln\left(\frac{3}{11}\right)$

$\Leftrightarrow t = \frac{1}{-0,12} \cdot \ln\left(\frac{3}{11}\right) \approx 10,83$ [°C]. Nach knapp 11 Minuten hat der Tee eine Temperatur von 40 °C erreicht.



3i)

(1) Es gilt z. B. für B : $B(t) = 10 \cdot e^{-0,3238t} = 0 - (0 - 10) \cdot e^{-0,3238t} \Rightarrow S = 0; B(0) = 10; k = 0,3238$

	$B(0)$	S	k	$a = e^{-k}$
$B(t) = 10 \cdot e^{-0,3238t}$	10	0	0,3238	0,7233
$C(t) = 9,2095 \cdot e^{-0,3054t}$	9,2095	0	0,3054	0,7368

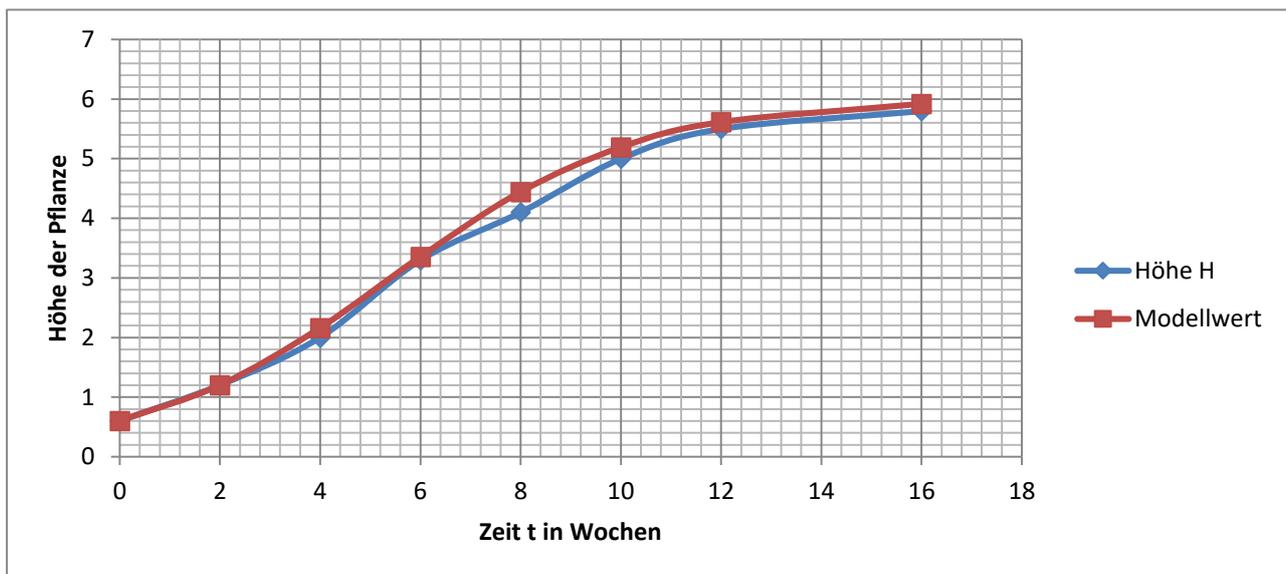
(2) Allgemein gilt für $S = 0$ und positives k beim exponentiellen Wachstum (exponentielle Abnahme): $B(t) = B(0) \cdot e^{-kt} = 0 - (0 - B(0)) \cdot e^{kt}$. Daher ist das exponentielle Wachstum für negative k ein nach unten durch $S = 0$ beschränktes Wachstum ($B(0) > 0$) oder ein nach oben durch beschränktes exponentielles Wachstum ($B(0) < 0$) (vgl. Grafen I und II aus Aufgabenteil a)).

4a)

Obere Figur: Farmer mit den Informationen aus Fachzeitschriften und Massenmedien. Untere Figur: Farmer mit Informationen überwiegend durch „Mund-zu-Mund“-Propaganda. Begründung (stark vereinfachtes Modell): Bei den Farmern („Mund-zu-Mund“-Propaganda) ist die Verbreitung der Information auf Kontakte untereinander angewiesen. Damit findet die Verbreitung anfangs in etwa exponentiell statt. Später findet eine Sättigung statt. Bei den Farmern aus der oberen Darstellung ist die Verbreitung bei guter Werbung bereits im Anfangsstadium stark; der Anstieg der Verbreitung lässt dann mit der Zeit immer mehr nach, da durch Werbung und Information immer weniger zusätzlich überzeugt werden können.

b)

(1)



(2)

Durch den Ansatz $B(t) = \frac{B(0) \cdot S}{B(0) + (S - B(0)) \cdot e^{-k \cdot S \cdot t}}$ ergibt sich mit $S = 6$ und $B(0) = 0,6$ für die Höhe der Pflanze die Funktionsgleichung $B(t) = \frac{3,6}{0,6 + 5,4 \cdot e^{-6k \cdot t}}$.

(3) Setzt man den Messwert für $t = 2$ in die Funktionsgleichung ein erhält man mit $B(2) = 1,2$:

$\frac{3,6}{0,6 + 5,4 \cdot e^{-12k}} = 1,2$. Diese Gleichung muss nach k aufgelöst werden (zunächst beide Seiten mit dem Nenner $0,6 + 5,4 \cdot e^{-12k}$ multiplizieren). Daher ergibt sich $k = -\frac{1}{12} \ln\left(\frac{4}{9}\right) \approx 0,0676$. Damit gilt für die

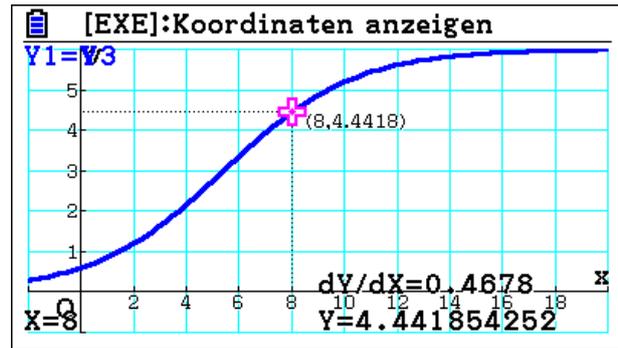
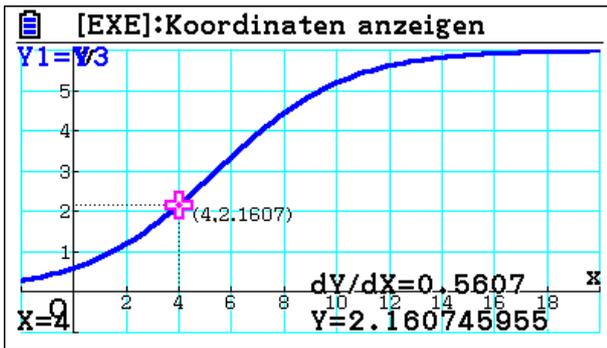
Höhe $B(t)$: $B(t) = \frac{3,6}{0,6 + 5,4 \cdot e^{-0,4056 \cdot t}}$.

(4) In der obigen Abbildung sind die Messwerte und die Modellwerte eingezeichnet.

(5) Höhe nach 18 Wochen: $B(18) = \frac{3,6}{0,6 + 5,4 \cdot e^{-0,4056 \cdot 18}} \approx 5,96$ m.

(6) Für die Wachstumsgeschwindigkeit $B'(t)$ gilt die DGL $B'(t) = k \cdot B(t) \cdot (S - B(t))$ (es kann $B(t)$ auch abgeleitet werden, dies ist aber aufwändig). Durch Einsetzen der Werte für S und k erhält man $B'(t) = 0,0676 \cdot B(t) \cdot (6 - B(t))$. Nun müssen die Werte $B'(4)$ und $B'(8)$ verglichen werden. Es gilt für die Wachstumsgeschwindigkeit nach 4 Wochen: $B'(4) = 0,0676 \cdot B(4) \cdot (6 - B(4)) = 0,0676 \cdot 2,16 \cdot (6 - 2,16) \approx 0,5607$ Meter pro Woche. Für die Wachstumsgeschwindigkeit nach acht Wochen rechnet man analog mithilfe der DGL zum logistischen Wachstum: $B'(8) = 0,0676 \cdot B(8) \cdot (6 - B(8)) = 0,0676 \cdot 4,44 \cdot (6 - 4,44) \approx 0,4682$ Meter pro Woche. Damit ist die Wachstumsgeschwindigkeit nach 4 Wochen höher als nach 8 Wochen.

Untersuchung mit dem GTR z. B. über Menu 5:



c)

(1) Anfangs wird sich die Krankheit sehr schnell (angenähert exponentiell) ausbreiten. Später erfolgt eine Verlangsamung (Sättigung) der Ausbreitung, bis alle Stammesbewohner krank sind bzw. waren.

(2) Mit dem Ansatz $B(t) = \frac{B(0) \cdot S}{B(0) + (S - B(0)) \cdot e^{-k \cdot S \cdot t}}$ und $B(0) = 1$, $S = 5000$ erhält man zunächst für die Funktion B : $B(t) = \frac{5000}{1 + 4999 \cdot e^{-5000k \cdot t}}$. Durch die zusätzliche Bedingung $B(4) = 300$ lässt sich der Parameter k berechnen: $\frac{5000}{1 + 4999 \cdot e^{-20000k}} = 300 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow k = -\frac{1}{20000} \ln\left(\frac{47}{14997}\right) \approx 0,0002883$. Daher gilt insgesamt für B : $B(t) = \frac{5000}{1 + 4999 \cdot e^{-1,4414 \cdot t}}$.

(3) Mit dem Ansatz $B(t) = 2500$ ergibt sich: $\frac{5000}{1 + 4999 \cdot e^{-1,4414 \cdot t}} = 2500 \Leftrightarrow 1 + 4999 \cdot e^{-1,4414 \cdot t} = 2 \Leftrightarrow e^{-1,4414 \cdot t} = \frac{1}{4999} \Leftrightarrow t = \frac{1}{-1,4414} \ln\left(\frac{1}{4999}\right) \approx 5,91$. Nach ca. 6 Wochen ist der halbe Stamm infiziert. Ab diesem Zeitpunkt (das Schaubild hat an dieser Stelle einen Wendepunkt) sinkt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Krankheit - deshalb „Vitalitätsknick“ genannt.

(4) Für die mittlere Zunahme an Erkrankten der ersten acht Wochen ergibt sich $\frac{B(8) - B(0)}{8} = \frac{4766,06 - 1}{8} \approx 595,6$ Erkrankte pro Woche.

7 Kontrollaufgaben

Hilfsmittelfrei:

1a)

Abbildung rechts

1b)

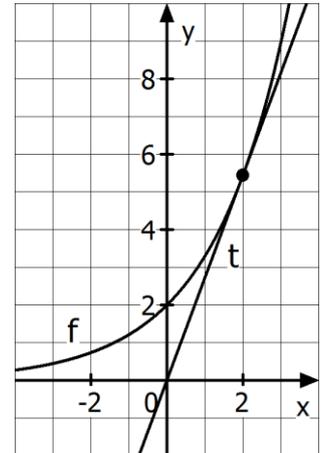
$$f'(x) = 2 \cdot 0,5 \cdot e^{0,5x} = e^{0,5x};$$

$$f'(2) = e = m_t \Rightarrow t(x) = e \cdot x + b;$$

$$t(2) = f(2) = 2e \Leftrightarrow e \cdot 2 + b = 2e \Rightarrow b = 0 \Rightarrow t(x) = e \cdot x$$

1c)

$$g(x) = -f(-x) = -2 \cdot e^{-0,5x}$$



2a)

A gehört zu f_4 , da $f_4(0) = 1,75$ ist. B gehört zu f_1 und f_6 , da $f_1(1) = f_6(1) = 2$ und $f_1(x) = f_6(x)$.
C gehört zu f_2 , da f_2 als einzige Funktion ein unbeschränktes Wachstum beschreibt.

2b)

$$e^x \xrightarrow[\text{Streckung in } x\text{-Richtung mit dem Faktor } 0,7]{\text{Streckung in } x\text{-Richtung mit dem Faktor } 0,7} e^{0,7x} \xrightarrow[\text{Spiegelung an der } y\text{-Achse}]{\text{Spiegelung an der } y\text{-Achse}} e^{-0,7x}$$

$$\xrightarrow[\text{Streckung in } y\text{-Richtung mit dem Faktor } 4]{\text{Streckung in } y\text{-Richtung mit dem Faktor } 4} 4 \cdot e^{-0,7x} \xrightarrow[\text{Verschiebung um } 5 \text{ in positive } y\text{-Richtung}]{\text{Verschiebung um } 5 \text{ in positive } y\text{-Richtung}} 5 + 4 \cdot e^{-0,7x}$$

2c)

(1) Werden alle Werte auf der y -Achse verdoppelt, wird der Graf von f in y -Richtung um den Faktor 2 gestreckt. Es gilt für die Funktion g des gestreckten Grafen $g(x) = 2 \cdot f(x)$. Analog bedeutet die Halbierung die Streckung in y -Richtung mit dem Faktor 0,5: $g(x) = 0,5 \cdot f(x)$

(2) Werden alle Werte auf der x -Achse verdoppelt, wird der Graf von f in x -Richtung um den Faktor 0,5 gestreckt. Es gilt für die Funktion g des gestreckten Grafen $g(x) = f(0,5 \cdot x)$. Analog bedeutet die Halbierung die Streckung in x -Richtung mit dem Faktor: $g(x) = f(2 \cdot x)$.

2d)

$f_1(x) = 5 - 4 \cdot 0,75^x$	Faktor 2	Faktor 0,5
(1) Streckung in y -Richtung	Verdopplung der y -Achsenwerte	Halbierung der y -Achsenwerte
	$g_1(x) = 10 - 8 \cdot 0,75^x$	$h_1(x) = 2,5 - 2 \cdot 0,75^x$
(2) Streckung in x -Richtung	Halbierung der x -Achsenwerte	Verdopplung der x -Achsenwerte
	$u_1(x) = 5 - 4 \cdot 0,75^{2x}$	$v_1(x) = 5 - 4 \cdot 0,75^{0,5x}$
$f_2(x) = e^{\frac{1}{3}x}$	Faktor 2	Faktor 0,5
(1) Streckung in y -Richtung	Verdopplung der y -Achsenwerte	Halbierung der y -Achsenwerte
	$g_2(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{3}x}$	$h_2(x) = 0,5 \cdot e^{\frac{1}{3}x}$
(2) Streckung in x -Richtung	Halbierung der x -Achsenwerte	Verdopplung der x -Achsenwerte
	$u_2(x) = e^{\frac{2}{3}x}$	$v_2(x) = e^{\frac{1}{6}x}$

3a)

$$e^{x+1} = 7 \Leftrightarrow x + 1 = \ln(7) \Leftrightarrow x = \ln(7) - 1$$

$$e^x = \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^x = e^{-1} \Leftrightarrow x = -1$$

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(10) \Leftrightarrow [\ln(t)]_1^x = \ln(10) \Leftrightarrow \ln(x) - \ln(1) = \ln(10) \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(10) \Leftrightarrow x = 10$$

$$e^x + 7 = 0 \text{ unlösbar, da } e^x + 7 > 7$$

$$\ln(x) = 6 \Leftrightarrow x = e^6$$

$$e^{2x} - 4e^x + 4 = 0 \xrightarrow[u=e^x]{} u^2 - 4u + 4 = 0 \Leftrightarrow (u - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow u = 2 \xrightarrow[u=e^x]{} e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$$

3b)

$$\int_0^{\ln(3)} e^x dx = [e^x]_0^{\ln(3)} = e^{\ln(3)} - e^0 = 3 - 1 = 2$$

$$\int_0^{\ln(3)} e^{2x} dx = [0,5 \cdot e^{2x}]_0^{\ln(3)} = 0,5 \cdot e^{2 \cdot \ln(3)} - 0,5 = 0,5 \cdot e^{\ln(3^2)} - 0,5 = 4$$

$$\int_1^3 (e^x + x + 1) dx = [e^x + \frac{1}{2}x^2 + x]_1^3 = e^3 + 4,5 + 3 - (e + 0,5 + 1) = e^3 - e + 6$$

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

$$\int_1^e \left(\frac{2}{5x} + \sqrt{x} \right) dx = \left[\frac{2}{5} \ln(x) + \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_1^e = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} e^{1,5} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} e^{1,5} - \frac{4}{15} \approx 2,72$$

$$\int_1^e \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[-\frac{1}{x} - \ln(x) \right]_1^e = -\frac{1}{e} - 1 - (-1) = -\frac{1}{e} \approx -0,37$$

4)

Aussage zu $v(t) = 2,5 \cdot (1 - e^{-0,1t})$	Wahr	Falsch	Begründung
Die Sinkgeschwindigkeit des Steins ist immer positiv.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$v(t) = 2,5 \cdot (1 - e^{-0,1t})$ $2,5 \cdot (1 - e^{-0,1t}) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,1t} > 0$ $\Leftrightarrow e^{-0,1t} < 1 \Leftrightarrow -0,1t < 0 \Leftrightarrow t > 0$
Die maximale Sinkgeschwindigkeit wird zu Beginn erreicht.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	$v(t) = 2,5 \cdot (1 - e^{-0,1t}) = 2,5 - 2,5 \cdot e^{-0,1t}$ Es gilt $v(0) = 0$ und $v(t) > 0$ für $t > 0$
Der Stein erreicht den Boden des Sees niemals.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	Dies kann anhand der Funktionsgleichung für v nicht abgelesen werden.
Die maximale Beschleunigung des Steins wird zu Beginn erreicht.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Die Beschleunigung ist bei $t = 0$ maximal, da der Graf zu $v'(t) = 0,25e^{-0,1t}$ der Graf einer fallenden Exponentialfunktion darstellt.
Man kann mithilfe eines Integrals berechnen, wie tief der Stein insgesamt gesunken ist.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$s(t) = \int_0^t v(x) dx = [2,5x + 25e^{-0,1x}]_0^t$ $= 2,5t + 25e^{-0,1t} - 25$ beschreibt die zurückgelegte Strecke des Steins im Zeitintervall $[0; t]$
Die Sinkgeschwindigkeit ist immer kleiner als 2,5 Meter pro Sekunden.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$v(t) = 2,5 \cdot (1 - e^{-0,1t}) = 2,5 - 2,5 \cdot e^{-0,1t}$ $2,5 - 2,5 \cdot e^{-0,1t} < 2,5 \Leftrightarrow e^{-0,1t} > 0$ Diese Gleichung ist für alle t erfüllt. Alternativ kann auch mit der Sättigungsgrenze beim beschränkten Wachstum argumentiert werden: $v(t) = 2,5 - 2,5e^{-0,1t} = 2,5 - (2,5 - 0)e^{-0,1t}$
Die Sinkgeschwindigkeit verdoppelt sich jeweils in 0,9 Sekunden.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	Dies kann nicht sein, da dann ein exponentielles Wachstum vorliegen müsste. Die Funktionsgleichung v beschreibt ein beschränktes Wachstum.

5a)

$\sinh'(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$; $\sinh''(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$. Analog gilt für die Ableitungen von \cosh : $\cosh'(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$; $\cosh''(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$. Daher gilt: $\sinh^{(1810)}(x) = \sinh(x)$; $\sinh^{(2013)}(x) = \cosh(x)$; $\cosh^{(1810)}(x) = \cosh(x)$; $\cosh^{(2013)}(x) = \sinh(x)$.

5b)

$\frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = e^x - e^{-x} \Leftrightarrow 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 0$. Daher gibt es keine Lösung der Gleichung, also keine Schnittpunkte der beiden Graphen.

5c)

$\sinh(-a) = \frac{1}{2} \cdot (e^{-a} - e^{-(-a)}) = \frac{1}{2} \cdot (e^{-a} - e^a) = -\frac{1}{2} \cdot (e^a - e^{-a}) = -\sinh(a)$. Daher: Graph zu \sinh ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

$\cosh(-a) = \frac{1}{2} \cdot (e^{-a} + e^{-(-a)}) = \frac{1}{2} \cdot (e^{-a} + e^a) = \frac{1}{2} \cdot (e^a + e^{-a}) = \cosh(a)$. Daher ist der Graph zu \cosh achsensymmetrisch zur y-Achse.

5d)

$$\cosh'(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \stackrel{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$\cosh''(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) > 0$, da beide e -Terme echt positiv sind: 0 ist lokale Minimumstelle von \cosh und \cosh ist überall linksgekrümmt.

Da $\cosh(0) = 1$ ist und der Graf linksgekrümmt ist, ist 0 auch globale Minimumstelle und 1 globales Minimum.

Alternativer Ansatz: $\frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) > 1 \stackrel{\cdot 2e^x}{\Leftrightarrow} e^{2x} + 1 > 2e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 > 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 > 0$
 $\Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ und die Tatsache, dass $f(0) = 1$ ist, reichen zum Nachweis der Behauptung.

5e)

$$\sinh''(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \stackrel{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$\sinh'''(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) > 0$: Daher ist 0 Rechts-Links-Wendestelle.

5f)

$$\cosh(x) - \sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) = e^{-x}$$

$$(1) \int_0^1 (\cosh(x) - \sinh(x)) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -\frac{1}{e} + 1 \approx 0,63$$

$$(2) \int_0^R (\cosh(x) - \sinh(x)) dx = \int_0^R e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^R = -e^{-R} + 1 \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 1, \text{ da } e^{-R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

5g)

$$\text{Man erhält } \left[\frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) \right]^2 - \left[\frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) \right]^2 = \frac{1}{4} \cdot (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4} \cdot (e^{2x} - 2 + e^{-2x})$$

$$= \frac{1}{4} \cdot e^{2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{2x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot e^{-2x} = 1, \text{ q. e. d.}$$

Mit Hilfsmitteln:**1a)**

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2) \cdot x}$$

1b)

$$f'(x) = \ln(2) \cdot e^{\ln(2) \cdot x};$$

$$m_{t_1} = f'(1) = 2 \cdot \ln(2) \Rightarrow t_1(x) = 2 \cdot \ln(2) \cdot x + b;$$

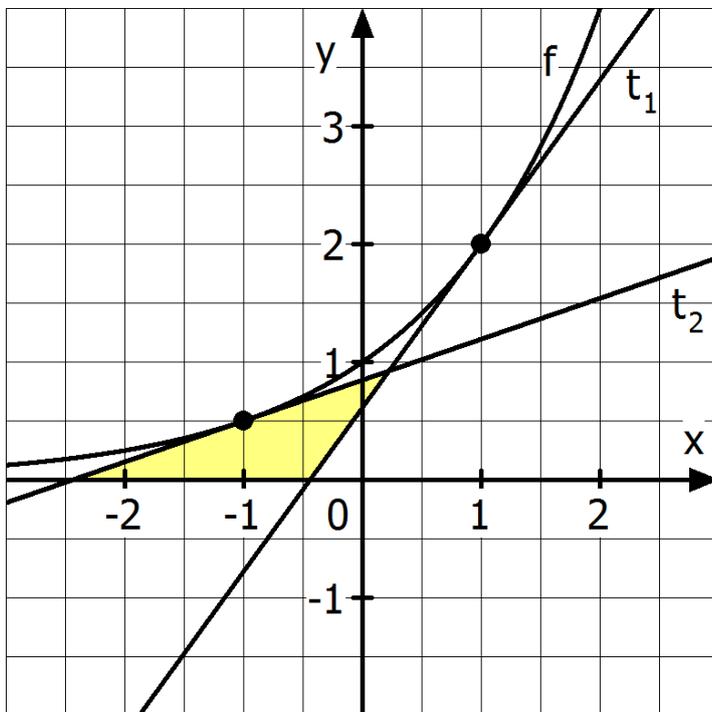
$$t_1(1) = f(1) = 2 \Leftrightarrow 2 \cdot \ln(2) \cdot 1 + b = 2 \Leftrightarrow b = 2 - 2 \cdot \ln(2)$$

$$\Rightarrow t_1(x) = 2 \cdot \ln(2) \cdot x + 2 - 2 \cdot \ln(2) \approx 1,39x + 0,61$$

$$m_{t_2} = f'(-1) = 0,5 \cdot \ln(2) \Rightarrow t_2(x) = 0,5 \cdot \ln(2) \cdot x + b;$$

$$t_2(-1) = f(-1) = 0,5 \Leftrightarrow 0,5 \cdot \ln(2) \cdot (-1) + b = 0,5 \Leftrightarrow b = 0,5 + 0,5 \cdot \ln(2)$$

$$\Rightarrow t_2(x) = 0,5 \cdot \ln(2) \cdot x + 0,5 + 0,5 \cdot \ln(2) \approx 0,35x + 0,85$$

1c)**1d)**

$$(1) \int_{-1}^0 e^{\ln(2) \cdot x} dx = \left[\frac{1}{\ln(2)} \cdot e^{\ln(2) \cdot x} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{\ln(2)} \cdot e^{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} \cdot e^{-\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{0,5}{\ln(2)} = \frac{0,5}{\ln(2)} \approx 0,72$$

$$(2) \int_L^0 e^{\ln(2) \cdot x} dx = \left[\frac{1}{\ln(2)} \cdot e^{\ln(2) \cdot x} \right]_L^0 = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} \cdot e^{\ln(2) \cdot L} \xrightarrow{L \rightarrow -\infty} \frac{1}{\ln(2)} \approx 1,44, \text{ da } \lim_{L \rightarrow -\infty} e^{\ln(2) \cdot L} = 0$$

(3) Man bestimme die Nullstellen der Geraden sowie die Schnittstelle der beiden Geraden:

$$t_1(x) = t_2(x) \Leftrightarrow 1,39x + 0,61 = 0,35x + 0,85 \Leftrightarrow 1,04x = 0,24 \Leftrightarrow x \approx 0,23 \Rightarrow y \approx 0,93$$

$$\text{Nullstelle von } t_1: 1,39x + 0,61 = 0 \Leftrightarrow x \approx -0,44$$

$$\text{Nullstelle von } t_2: 0,35x + 0,85 = 0 \Leftrightarrow x \approx -2,43$$

$$\text{Also gilt für den Flächeninhalt: } \frac{1}{2} \cdot (2,43 + 0,23) \cdot 0,93 - \frac{1}{2} \cdot (0,44 + 0,23) \cdot 0,93 \approx 0,93$$

1e)

$g(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot 2^x = 2^{x+1} = f(x+1)$: Verschiebung des Grafen von f um 1 nach links = Streckung des Grafen von f um den Faktor 2 in y -Richtung

2a)

$$f(1) = a \cdot e^b = 86,04; f(2) = a \cdot e^{2b} = 82,25. \frac{f(2)}{f(1)} = \frac{a \cdot e^{2b}}{a \cdot e^b} = \frac{82,25}{86,04} \Rightarrow e^b = \frac{82,25}{86,04} \Rightarrow b = \ln\left(\frac{82,25}{86,04}\right) \approx -0,045$$

Also ergibt sich $a = \frac{86,04^2}{82,24} \approx 90$. Die Anfangstemperatur beträgt 90 °C.

2b)

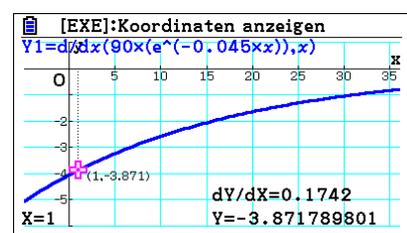
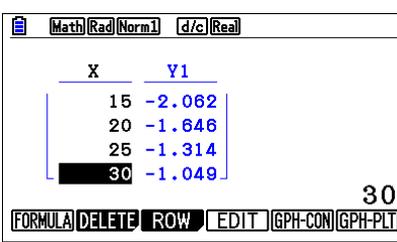
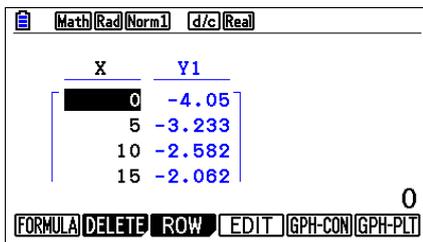
$$f(10) = 90 \cdot e^{-0,045 \cdot 10} \approx 57,39 \text{ °C}. f(t) = 90 \cdot e^{-0,045 \cdot t} = 45 \Leftrightarrow e^{-0,045 \cdot t} = 0,5 \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,5)}{-0,045} \approx 15,40$$

Nach ca. 15,4 Minuten ist die Temperatur des Kaffees unter 45 °C gesunken.

2c)

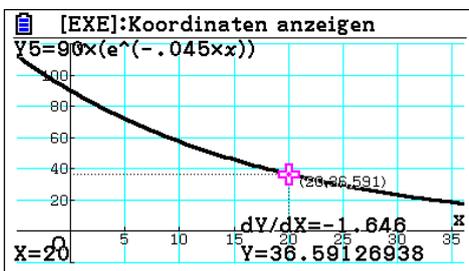
$$f'(t) = 90 \cdot (-0,045) \cdot e^{-0,045 \cdot t} = -4,05 \cdot e^{-0,045 \cdot t}; \text{ momentane Abkühlgeschwindigkeit des Kaffees;}$$

2d)



2e)

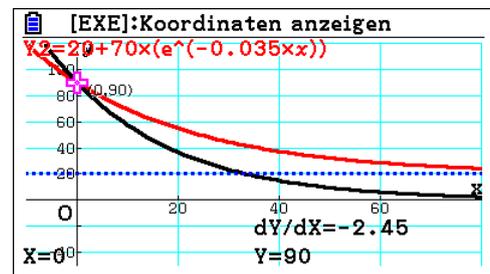
Die Temperatur des Kaffees würde dann nach ca. 36 Minuten unter die Raumtemperatur von 20 °C sinken (vgl. Graf von f).



2f)

(1) Ein möglicher Graf g muss nach unten durch $S = 20$ beschränkt sein. Mit einer Starttemperatur von $g(0) = 90$, der Raumtemperatur (Sättigungsgrenze) $S = 20$ und der Temperaturdifferenz von Raum- und Starttemperatur (Sättigungsmanko zu Beginn) $S - g(0) = -70$, erhält man die folgende Funktionsgleichung mit $k > 0$ für g:

$$g(t) = S - (S - g(0)) \cdot e^{-kt} = c - d \cdot e^{-kt} = 20 + 70 \cdot e^{-kt}$$



(2) Der Parameter $c = 20$ beschreibt also die Sättigungsgrenze (Raumtemperatur), $d = -70$ das Sättigungsmanko (Temperaturdifferenz von Raumtemperatur und Kaffeetemperatur zu Beginn). Der Parameter k als Proportionalitätskonstante aus Abkühlgeschwindigkeit und Temperaturdifferenz von Raumtemperatur und aktueller Kaffeetemperatur (Sättigungsmanko) muss kleiner als 0,045 sein, da der Kaffee bei Raumtemperatur langsamer abkühlt als bei 0 °C.

3a)

$h(t) = 0,2 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,9} = 0,50 \Leftrightarrow e^{0,1 \cdot t - 0,9} = 2,50 \Leftrightarrow t = 10 \cdot \ln(2,5) + 9 \approx 18,16$ m. Nach 18 Tagen und fast 5 Stunden ist die Pflanze 50 cm hoch.

3b)

$h(t) = 0,2 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,9} = 0,2 \cdot e^{0,1 \cdot t} \cdot e^{-0,9} = 0,2 \cdot e^{-0,9} \cdot e^{0,1 \cdot t} \approx 0,08 \cdot e^{0,1 \cdot t}$. Damit ist c ungefähr 0,08 und $k = 0,1$.

3c)

Dabei gibt c die Anfangshöhe an und k ist die Proportionalitätskonstante aus Wachstumsgeschwindigkeit und Höhe des Strauches. Für den Wachstumsfaktor a gilt $a = e^{0,1} \approx 1,1051$.

3d)

Es gilt für die erste und zweite Ableitung von h (für alle t des Definitionsbereiches):

$$h'(t) = 0,2 \cdot 0,1 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,9} = 0,02 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,9} > 0; \quad h''(t) = 0,02 \cdot 0,1 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,9} = 0,002 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,9} > 0.$$

Damit ist der Graph für den Definitionsbereich streng monoton wachsend ($h'(t) > 0$) und dort auch linksgekrümmt ($h''(t) > 0$).

3e)

Da der Graph im Bereich $0 \leq t \leq 20$ streng monoton wachsend und linksgekrümmt ist, nehmen die Steigungen in diesem Bereich ständig zu. Eine Wendestelle existiert nicht. Damit ist $h'(20)$ die größte Steigung des Graphen und sein Wert entspricht der größten Wachstumsgeschwindigkeit. Es gilt: $h'(20) = 0,02 \cdot e^{0,1 \cdot 20 - 0,9} \approx 0,06$ Meter pro Woche. Der Strauch wächst also am zwanzigsten Tag mit einer Geschwindigkeit von 6 cm pro Tag.

Da die Werte einer Exponentialfunktion beliebig groß werden, wenn der Exponent gegen unendlich strebt, würde der Strauch dementsprechend unendlich groß. Insofern kann die Funktion h nur für einen begrenzten Zeitraum als Modell bzw. zur Modellierung dienen.

3f)

(1) h_2 beschreibt die Wirkungsfunktion der Wachstumsgeschwindigkeit z . Man muss also die spezielle Stammfunktion zu z finden, für die $h_2(20) = 0,60$ gilt (Strauch ist nach 20 Wochen 0,6 Meter hoch). Für die Wirkungsfunktion h_2 gilt: $h_2(t) = \frac{0,02}{-0,1} \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1} + K = -0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1} + K$. Mit $h_2(20) = 0,60$ ergibt sich für die Konstante K : $-0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot 20 + 3,1} + K = 0,60 \Rightarrow K = 0,60 + 0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot 20 + 3,1} \approx 1,20$. Damit erhält man für die Wirkungsfunktion h_2 : $h_2(t) \approx 1,2 - 0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1}$.

Alternativ hätte man auch mit der sogenannten Integralfunktion zum Ergebnis kommen können. Für die Höhe $h_2(t)$ nach t Tagen ($t > 20$) gilt nämlich:

$$\begin{aligned} h_2(t) &= 0,60 + \int_{20}^t z(x) dx = 0,60 + \int_{20}^t 0,02 \cdot e^{-0,1 \cdot x + 3,1} dx = 0,60 + [-0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot x + 3,1}]_{20}^t \\ &= 0,60 + (-0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1} - (-0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot 20 + 3,1})) = 0,60 + (-0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1} - (-0,60)) \\ &= 1,2 - 0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1}. \end{aligned}$$

(2) Da der Term $-0,1 \cdot t + 3,1$ im Exponenten der Funktion mit steigendem t gegen minus unendlich strebt, nähert sich $e^{-0,1 \cdot t + 3,1}$ Null an und insgesamt strebt $h_2(t)$ gegen 1,20 m. Der Strauch wird daher nicht höher als ca. 1,20 Meter. Mathematische Notation: $1,2 - 0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1,2$ oder

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (1,2 - 0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1}) = 1,2.$$

(3) Durch Umformung erhält man:

$$\begin{aligned} h_2(t) &= 1,2 - 0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1} = 1,2 - 0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot t} \cdot e^{3,1} = 1,2 - 0,2 \cdot e^{3,1} \cdot e^{-0,1 \cdot t} \approx 1,2 - 4,4396 \cdot e^{-0,1 \cdot t} \\ &= 1,2 - [1,2 - (-3,2396)] \cdot e^{-0,1 \cdot t} = S - (S - h_2(0)) \cdot e^{-0,1 \cdot t} \Rightarrow S = 1,2; b = 4,4396; k = 0,1. \end{aligned}$$

(4) Die maximal mögliche Länge des Strauches (Sättigungsgrenze) $S = 1,20$ Meter. Die Differenz aus maximaler Länge von 1,2 m und der hypothetischen Strauchlänge des bei $t = 0$ beginnenden beschränkten Wachstums (= maximaler Längenzuwachs = Sättigungsmanko zum hypothetischen Startwert bei $t = 0$) ergibt sich durch $b = S - h_2(0) = 4,4396$. Ein größeres b lässt den Strauch langsamer wachsen. Der Parameter $k = 0,1$ ist die Proportionalitätskonstante aus Wachstumsgeschwindigkeit und Differenz aus maximaler Strauchlänge und aktueller Strauchlänge (Sättigungsmanko). Je höher k ist, desto schneller wächst der Strauch zu Beginn an.

(5) $h_2'(20) = z(20) = 0,02 \cdot e^{-0,1 \cdot 20 + 3,1} = 0,02 \cdot e^{1,1} = 0,02 \cdot e^{0,1 \cdot 20 - 0,9} = h'(20)$ Der Übergang ist knickfrei.

3g)

Mit dem Ansatz $f_1(t) = S - d \cdot e^{-kt}$ und $S = 1,2$ und $f_1(0) = 0,08$ bzw. $f_1(20) = 0,6$ können d und k auf zwei Weisen errechnet werden. Kennt man die Formel für beschränktes Wachstum, nämlich die Gleichung $f_1(t) = S - (S - f_1(0)) \cdot e^{-kt}$, weiß man, dass $d = S - f_1(0) = 1,2 - 0,08 = 1,12$. Anschließend nutzt man die zweite Bedingung zur Berechnung des Parameters k aus: $f_1(20) = 0,6$ ergibt $1,2 - 1,12 \cdot e^{-20k} = 0,6 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow k = \frac{1}{-20} \cdot \ln\left(\frac{15}{28}\right) \approx 0,03121$. Der Funktionsterm lautet dann: $f_1(t) = 1,2 - 1,12 \cdot e^{-0,03121 \cdot t}$.

Alternativ hätte man zur Bestimmung von d die Bedingung $f_1(0) = 0,08$ nutzen können und mit der Gleichung $1,2 - d \cdot e^{-20k \cdot 0} = 0,08$ folgt $d = 1,12$.

Der Parameter d beschreibt den maximalen Längenzuwachs nach dem Einsetzen des Strauches (= Sättigungsmanko bei $t = 0$).

3h)

Mit $f_2(0) = 0,08$ und $S = 1,2$ erhält man mit der Formel für den logistischen Ansatz den Funktionsterm $f_2(t) = \frac{0,096}{0,08 + 1,12 \cdot e^{-1,2 \cdot k \cdot t}}$. Zur Berechnung des Parameters k hat man $f_2(20) = 0,6$. $\frac{0,096}{0,08 + 1,12 \cdot e^{-1,2 \cdot k \cdot 20}} = 0,6$ führt zu $k = \frac{1}{-24} \cdot \ln\left(\frac{1}{14}\right) \approx 0,10$ und damit zur entsprechenden Funktionsgleichung $f_2(t) = \frac{0,096}{0,08 + 1,12 \cdot e^{-1,2 \cdot 0,1 \cdot t}} = \frac{0,096}{0,08 + 1,12 \cdot e^{-0,132 \cdot t}}$.

Alternativer Ansatz (wenn man die Formel für das logistische Wachstum vergessen hat): Geht man umgekehrt vom Funktionsterm $f_2(t)$ aus, muss man für ein logistisches Wachstum zeigen, dass folgenden Gleichungen erfüllt sind: $f_2(20) = 0,6$ und $f_2(0) = 0,08$ und $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{0,096}{0,08 + 1,12 \cdot e^{-0,132 \cdot t}} \right) = 1,2$.

3i)

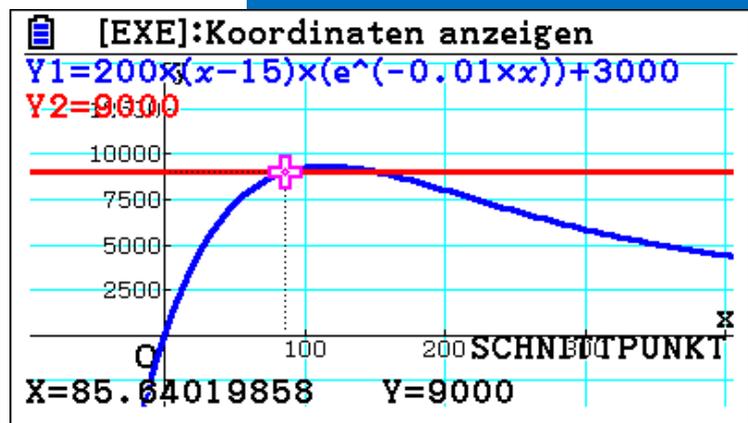
Der Graph von f_1 verändert sein Krümmungsverhalten im gesamten Beobachtungszeitraum nicht. Inhaltlich bedeutet das konkret, dass das Pflanzenwachstum, das der Graph von f_1 beschreibt, über den gesamten Beobachtungszeitraum kleiner wird. Der Graph von f_2 verändert sein Krümmungsverhalten im Wendepunkt, der etwa bei $t = 20$ liegt. Bis zu diesem Zeitpunkt nimmt das Wachstum des Strauches beinahe exponentiell zu, erst nach dem 20. Tag wird ein sinkendes Pflanzenwachstum beschrieben. Das legt die Vermutung nahe, dass die Strauchhöhe h in Metern in Abhängigkeit von der Zeit in Tagen über den gesamten Beobachtungszeitraum eher durch ein Wachstumsmodell wie in f_2 beschrieben werden kann.

3k)

Zunächst muss eine neue (differenzierbare) Funktion $d = h - f$ definiert werden, die die Differenz zwischen den beiden Funktionen angibt. Von dieser müssen dann durch Bestimmung der Nullstellen der ersten Ableitung mögliche lokale Extremstellen im Intervall $[0; 20]$ berechnet werden. Durch Vergleich der Beträge der Funktionswerte an diesen Stellen mit den Beträgen der Randwerte $|d(0)|$ und $|d(20)|$ findet man die gesuchte größte Differenz.

2. Unterrichtsvorhaben in der Q2-Phase

Zusammengesetzte Funktionen untersuchen



Jörn Meyer

j.meyer@fals-solingen.de

www.maspole.de

Inhaltsverzeichnis

1 Ketten- und Produktregel	2
2 Funktionsuntersuchung mit und ohne Sachkontext.....	9
3 Kontrollaufgaben	15
Lösungen	18

1 Ketten- und Produktregel

Bisher haben wir die folgenden Ab- und Aufleitungsregeln kennengelernt:

Faktorregel: $f(x) = c \cdot g(x)$ ($c \in \mathbb{R}$)	$f'(x) = c \cdot g'(x)$	$F(x) = c \cdot F(x)$
Summenregel: $f(x) = g(x) + h(x)$	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$	$F(x) = G(x) + H(x)$
Potenzregel: $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{R}$)	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$ ($n \in \mathbb{R}^{\neq -1}$)
$f(x) = a^x$ ($a > 0$)	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$
$f(x) = e^{kx}$ ($k \in \mathbb{R}^{\neq 0}$)	$f'(x) = k \cdot e^{kx}$	$F(x) = \frac{1}{k} \cdot e^{kx}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = x \cdot [\ln(x) - 1]$ (vgl. A...)
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \frac{2}{3x\sqrt{x}}$



Aufgabe 1 (Wiederholung)

Berechne den Ableitungsterm $f'(x)$ sowie den Term der Stammfunktion $F(x)$. **Gib** jeweils die angewendeten Regeln **an**.

+	++	+++	++++
$f(x) = x^2 - 2x$	$f(x) = x \cdot (3x^2 - 1)$	$f(x) = (2x - x^2)^2$	$f(x) = \frac{(x-x^2)^2}{x^2}$
$f(x) = 3x^{-2} - \frac{1}{x}$	$f(x) = x^{-1} \left(x - \frac{1}{x}\right)$	$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x}$	$f(x) = \frac{(x+\sqrt{x})^2}{x}$
$f(x) = 12 \cdot 2^x$	$f(x) = 2^x(2^x - 2^{-x})$	$f(x) = (2^x + 1)^2$	$f(x) = 2^x \cdot (2^x + 2^{-x})^2$
$f(x) = 3e^x - 2e^{-x}$	$f(x) = 3 \cdot \left(e^{2x} - \frac{1}{e^{2x}}\right)$	$f(x) = e^{2x} \cdot (1 - e^{-2x})$	$f(x) = \frac{(e^{2x} - e^{-2x})^2}{e^{4x}}$



Aufgabe 2 (Schmelzen von Eiszapfen)¹

Viele Eiszapfen sind annähernd kegelförmig, sie unterscheiden sich aber im Volumen und im Verhältnis von Radius zu Länge. Bei Tauwetter lässt sich beobachten, dass die Länge eines Eiszapfens bei konstanter Umgebungstemperatur linear mit der Zeit abnimmt. Das Verhältnis aus Länge und Radius eines beobachteten Eiszapfens bleibt beim Schmelzen nahezu konstant. Ein kegelförmiger Eiszapfen sei 30 cm lang und oben 2 cm dick. Seine Länge verkürzt sich nach Beginn des Schmelzens innerhalb von 50 Minuten auf 19,5 cm.

- Begründe**, dass $l(t) = 30 - 0,21 \cdot t$ die Länge des Eiszapfens nach t Minuten modelliert.
- Das Volumen des Eiszapfens hängt über die Volumenformel eines Kegels von seiner Länge l ab. **Zeige**, dass sich das Zapfenvolumen durch $V(l) = \frac{\pi}{2700} \cdot l^3$.
- Bestimme** das Volumen V in Abhängigkeit von der Zeit sowie die zeitliche Änderungsrate des Volumens zu Beginn, in der Mitte und am Ende des Schmelzvorgangs. **Deute** das Ergebnis.

¹ Fokus Mathematik LK NRW 2011, S. 92



Aufgabe 3 (Verkettung von Funktionen)

Ziel: Wie lernen nun eine neue Methode kennen, zwei Funktionen - wie in Aufgabe 2 bereits geschehen - zu einer neuen Funktion zusammzusetzen.

- a) Eine Funktion kann man als einen Automaten betrachten, in den man eine Zahl einwirft und der daraufhin eine bestimmte Zahl auswirft. **Ergänze** die Tabellen.

$u: x \mapsto u(x) = \sqrt{x}$	
Eingabe x	Ausgabe $u(x)$
4	2
100	10
a	
$3z$	

$v: x \mapsto v(x) = 2x + 1$	
Eingabe x	Ausgabe $v(x)$
5	
0,2	
$2b - 1$	
2^x	

- b) Man kann zwei Automaten (Funktionen) hintereinanderschalten. In der folgenden Tabelle kommt zuerst der Automat u und dann der Automat v . In der zweiten Tabelle werden bei gleicher Angabe die Reihenfolge der Automaten umgekehrt.

$u: x \mapsto u(x) = \sqrt{x}$		$v: x \mapsto v(x) = 2x + 1$	
Eingabe Automat u	Ausgabe Automat $u =$ Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v	
9	3	7	
100			
a			
$3x$			
$x - 1$			
e^x			

$v: x \mapsto v(x) = 2x + 1$		$u: x \mapsto u(x) = \sqrt{x}$	
Eingabe Automat v	Ausgabe Automat $v =$ Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u	
9	19	$\sqrt{19}$	
100			
a			
$3x$			
$x - 1$			
e^x			

Merke: Diese Hintereinanderschaltung von zwei Funktionen heißt **Verkettung von v und u** . Je nach Reihenfolge ergeben sich im Allgemeinen verschiedene Funktionswerte.

$v(u(x))$ (lies: „ v von u von x “)

u zuerst anwenden

u ist die **innere**, v die **äußere Funktion**

$u(v(x))$ (lies: „ u von v von x “).

v zuerst anwenden

v ist die **innere**, u die **äußere Funktion**

Beispiel: $v(x) = x^2$ und $u(x) = e^x$

$u(v(3)) = u(9) = e^9$; $v(u(3)) = (e^3)^2 = e^6$; $u(v(x)) = u(x^2) = e^{x^2}$; $v(u(x)) = v(e^x) = (e^x)^2 = e^{2x}$

- c) Es ist $u(x) = x^2$ [bzw. \sqrt{x}] und $v(x) = x + 1$ [bzw. e^{2x}]. **Berechne** $v(u(2))$, $u(v(2))$, $v(u(-1))$ und $u(v(-1))$. **Gib** die Funktionsterme $v(u(x))$ und $u(v(x))$ **an**.

Die **Verkettung der Funktionen** u und v hat je nach Reihenfolge die Namen

$v \circ u$ (lies: „ v nach u “)

$(v \circ u)(x) = v(u(x))$

$u \circ v$ („lies: u nach v “)

$u \circ v: x \mapsto u(v(x))$

- d) **Bestimme** zu $u(x) = x^2$ [bzw. $\ln(x)$] und $v(x) = 3x$ [bzw. $\frac{1}{x}$] die Funktionsterme von $u \circ v$ und $v \circ u$.



Aufgabe 4 (Die Ableitung einer Verkettung von Funktionen)

Ziel: Es soll eine Regel für die Ableitung einer Verkettung $f(x) = u(v(x))$ gefunden werden, falls die Ableitungen von u und v bekannt sind.

In der Tabelle werden nur Verkettungen $f(x) = u(v(x))$ untersucht, die man nach Umformen des Funktionsterms mit den schon bekannten Ableitungsregeln ableiten kann.

Beispiel: $f(x) = (3x)^2$ ist eine Verkettung. Wie lautet die Ableitung? f kann man ohne Verkettung schreiben: $f(x) = 9x^2$. Die Ableitung ist: $f'(x) = 18x$.

a) **Ergänze** die Tabelle. In der rechten Spalte liegt das eigentliche Problem!

$f(x)$	$f'(x)$	f als Verkettung	Wie ergibt sich $f'(x)$ direkt aus der Verkettung?
$9x^2$	<u>$18x$</u>	$v(x)=3x \quad u(x)=x^2$ $f(x)=u(v(x))=(3x)^2$	$2 \cdot (3x)^1 = 6x$ ist falsch; Korrekturfaktor? <u>$18x = 2 \cdot (3x)^1 \cdot 3$</u>
$4x^2$	<u>$8x$</u>	$v(x)=2x \quad u(x)=x^2$ $f(x)=u(v(x))=(2x)^2$	$2 \cdot (2x)^1 = 4x$ <u>$8x = 2 \cdot (2x)^1 \cdot 2$</u>
$4x^2 + 4x + 1$		$v(x)=2x+1 \quad u(x)=x^2$ $f(x)=u(v(x))=(2x+1)^2$	
$x^4 + 2x^2 + 1$		$v(x)=x^2+1 \quad u(x)=x^2$ $f(x)=u(v(x))=(x^2+1)^2$	
		$v(x)=x-1 \quad u(x)=x^2$ $f(x)=u(v(x))=(x-1)^2$	

b) Aus der Tabelle kann man eine Vermutung zur Ableitung einer Verkettung erschließen. **Ergänze** die Worte „innere(n)“ bzw. „äußere(n)“.

Vermutung: Leite zunächst die _____ Funktion ab. Behandle dabei die _____ Funktion als Variable. Multipliziere diesen Term mit der Ableitung der _____ Funktion.

c) **Beurteile**, ob hier richtig abgeleitet wurde und **korrigiere** sie gegebenenfalls.

$f(x) = (6x + 4)^2; f'(x) = 2 \cdot (6x + 4) \cdot 6$ richtig falsch. Korrektur: $f'(x) =$ _____
 $f(x) = (2x - 4)^3; f'(x) = 3 \cdot (2x - 4)^2$ richtig falsch. Korrektur: $f'(x) =$ _____
 $f(x) = (2x - 4)^3; f'(x) = 3 \cdot (2x - 4) \cdot 2$ richtig falsch. Korrektur: $f'(x) =$ _____
 $f(x) = (x^2 + 7)^2; f'(x) = 2 \cdot (x^2 + 7) \cdot 2$ richtig falsch. Korrektur: $f'(x) =$ _____

d) **Löse** Aufgabenteil c) aus Aufgabe 2 unter Nutzung der obigen Vermutung.

Kettenregel: Ist $f(x) = u(v(x))$ eine Verkettung von u und v , dann kann man die Ableitung folgendermaßen erhalten: $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.

Beispiele:

a) $f(x) = (5 - 3x)^4 = u(v(x)); u(x) = x^4 \Rightarrow u'(x) = 4x^3; v(x) = 5 - 3x \Rightarrow v'(x) = -3$
 $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = u'(5 - 3x) \cdot v'(x) = 4 \cdot (5 - 3x)^3 \cdot (-3) = -12 \cdot (5 - 3x)^3$

b) $f(x) = e^{kx} = u(v(x)); u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x; v(x) = kx \Rightarrow v'(x) = k$
 $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = u'(kx) \cdot v'(x) = e^{kx} \cdot k = k \cdot e^{kx}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2+1} = u(v(x)); u(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow u'(x) = -x^{-2}; v(x) = x^2 + 1 \Rightarrow v'(x) = 2x$
 $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = u'(x^2 + 1) \cdot v'(x) = -(x^2 + 1)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$



Aufgabe 5 (Anwendung der Kettenregel)

Berechne den Ableitungsterm $f'(x)$. Dabei ist φ eine differenzierbare Funktion.

+	++	+++	++++
$f(x) = (x + 1)^4$	$f(x) = 4 \cdot (x^2 + 1)^4$	$f(x) = (\varphi(x))^3$	$f(x) = \frac{1}{e^{x^2+1}}$
$f(x) = \ln(2x)$	$f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-5x\right)^2}$	$f(x) = \ln(\varphi(x))$	$f(x) = \ln(\sqrt{x})$
$f(x) = e^{2x}$	$f(x) = -3e^{-2x-1}$	$f(x) = e^{\varphi(x)}$	$f(x) = e^{\sqrt{x}}$
$f(x) = (8x + 1)^{-3}$	$f(x) = \ln(x^2)$	$f(x) = \sqrt{\varphi(x)}$	$f(x) = \ln(\ln(x))$



Aufgabe 6 (Bakterienwachstum)

Die von einer Bakterienkultur überdeckte Fläche wächst pro Tag um ca. 10 %. Zu Beginn ist die Fläche etwa 5 cm^3 groß.

- Begründe**, dass es sich um exponentielles Wachstum handelt.
- Bestimme** die Fläche der Bakterienkultur fünf Tage nach Messbeginn bzw. drei Wochen vor Beginn der Messung, wenn man von exponentiellem Wachstum ausgeht.
- Ermittle** die mittlere Änderungsrate in den ersten vier Wochen.
- Berechne**, wann die momentane Änderungsrate erstmals 10 cm^3 pro Woche beträgt.



Aufgabe 7 (Aussagen zur Schar von Logarithmusfunktionen)²

Gegeben ist die Schar von Funktionen f_a mit $f_a(x) = \ln(ax)$ ($a \neq 0$).

Begründe folgende Aussagen:

- Die Steigung des Graf von f_a ist unabhängig von a .
- Allen Grafen der Schar sind für $a > 0$ im ganzen Definitionsbereich streng monoton wachsend.
- Allen Grafen der Schar sind für $a < 0$ im ganzen Definitionsbereich streng monoton fallend.
- Alle Grafen der Funktionsschar sind rechtsgekrümmt.



Aufgabe 8 (Kurvenuntersuchung)

Gegeben ist die Funktionen f mit $f(x) = \ln(x^2 + x)$.

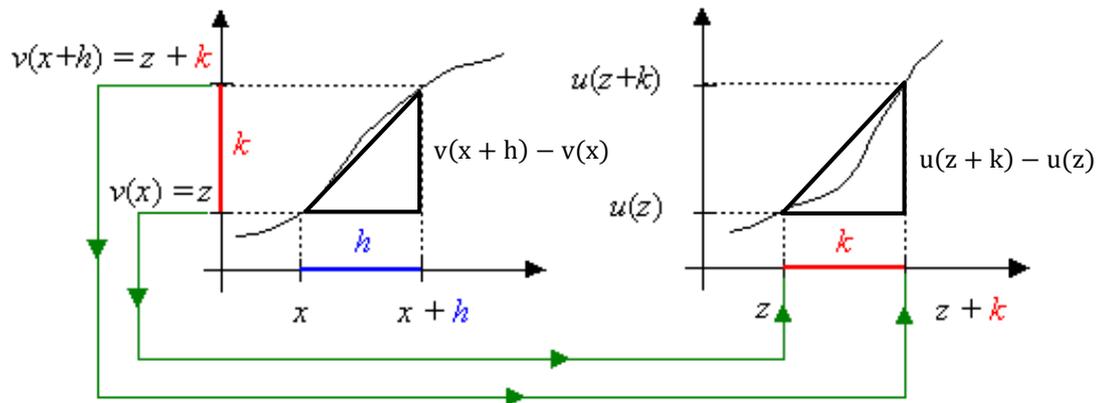
- Berechne** den Definitionsbereich von f und skizziere den Grafen mit dem GTR.
- Untersuche** f rechnerisch auf Nullstellen und lokale Extremstellen.
- Bestimme** die Stelle a , an welcher der Graf die Steigung $-1,5$ hat.
- Ermittle** die Tangente an den Grafen an der Stelle 2 und **ermittle** mithilfe des GTR alle Schnittpunkte des Grafen von f mit dieser Tangente.

² Lambacher Schweizer LK Mathematik NRW (2014)



Aufgabe 9 (Beweis der Kettenregel)

Mithilfe der folgenden Abbildung und der nachfolgenden Definitionen kann die Kettenregel bewiesen werden.



Mittlere Steigung von v über dem Intervall $[x; x + h]$ $= m_v[x; x + h]$	Mittlere Steigung von u über dem Intervall $[z; z + k]$ $= m_u[z; z + k]$
$= \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$	$= \frac{u(z+k)-u(z)}{k}$
Ableitung von v an der Stelle $x = v'(x)$	Ableitung von u an der Stelle $z = u'(z)$
$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$	$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(z+k)-u(z)}{k}$

a) **Bringe** die folgenden fünf Blöcke in die richtige Reihenfolge. **Begründe** die Reihenfolge.

Mittlere Steigung von f mit $f(x) = u(v(x))$ über dem Intervall $[x; x + h]$ $= m_f[x; x + h]$		
$= \frac{u(z+k)-u(z)}{k} \cdot \frac{k}{h}$	$= \frac{u(v(x+h))-u(v(x))}{h}$	$= \frac{u(z+k)-u(z)}{k} \cdot \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$
$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$= \frac{u(z+k)-u(z)}{h} \cdot \frac{k}{k} [v(x) = z \text{ und } v(x+h) = z+k \text{ und Erweiterung mit } \frac{k}{k}]$	

b) **Bringe** die folgenden vier Blöcke in die richtige Reihenfolge. **Begründe** die Reihenfolge.

Ableitung von f an der Stelle $x = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} m_f[x; x + h]$	
$= u'(v(x)) \cdot v'(x)$	$= u'(z) \cdot v'(x) [Setze z = v(x)]$
$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(z+k)-u(z)}{k} \cdot \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \right]$	$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(z+k)-u(z)}{k} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$

c) **Führe** den Beweis für f mit $f(x) = e^{3x}$ durch. Überlege zunächst, was $v(x) = z$, $u(z)$ und k sind.



Aufgabe 10 (Ableitung eines Produktes zweier Funktionen)³

Ziel: Es soll eine Regel für die Ableitung eines Produktes $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ gefunden werden, falls die Ableitungen von u und v bekannt sind.

- a) Peter sucht eine Ableitungsregel für das Produkt zweier Funktionsterme. Dafür schreibt er die Potenzfunktion f mit $f(x) = x^6$ in ein Produkt mit den Faktoren $u(x) = x^2$ und $v(x) = x^4$. **Weise** nach, dass $f'(x) \neq u'(x) \cdot v'(x)$ gilt.
- b) Nachdem er erkannt hat, dass im Allgemeinen $f'(x) \neq u'(x) \cdot v'(x)$ gilt, überlegt Peter, dass der Exponent beim Ableiten einer Potenzfunktion immer um eins verringert wird. Er vermutet daher, dass nur ein Faktor abgeleitet wird. **Vervollständige** dafür folgende Tabelle.

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x)$	$u(x) \cdot v'(x)$
$x^6 = x^1 \cdot x^5$	$1 \cdot x^5 = x^5$	$x^1 \cdot 5x^4 = 5x^5$
$x^6 = x^2 \cdot x^4$	$2x \cdot x^4 = 2x^5$	
$x^6 = x^3 \cdot x^3$		
$x^6 = x^4 \cdot x^2$		
$x^6 = x^5 \cdot x^1$		

Stelle mithilfe der Tabelle eine Vermutung für die Formel für die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ auf. **Überprüfe** die Gültigkeit der Formel auch für andere Potenzfunktionen.

Produktregel: Sei $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ mit den differenzierbaren Funktionen u und v . Dann gilt für den Ableitungsterm $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

Beispiele:

a) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^{-2x}$; $u(x) = x^2 + 1$; $u'(x) = 2x$; $v(x) = e^{-2x}$; $v'(x) = -2e^{-2x}$ (Kettenregel!)
 $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot e^{-2x} + (x^2 + 1) \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = (-2x^2 + 2x - 2) \cdot e^{-2x}$

b) $f(x) = x \cdot (2x + 1)^3$; $u(x) = x$; $u'(x) = 1$; $v(x) = (2x + 1)^3$; $v'(x) = 6 \cdot (x^3 + 1)^2$ (Kettenregel!)
 $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 1 \cdot (2x + 1)^3 + x \cdot 6 \cdot (2x + 1)^2 = (2x + 1 + 6x) \cdot (x^3 + 1)^2 = (8x + 1) \cdot (x^3 + 1)^2$

c) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot \ln(x)$; $u(x) = x^2 - 4$; $u'(x) = 2x$; $v(x) = \ln(x)$; $v'(x) = \frac{1}{x}$
 $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot \ln(x) + (x^2 - 4) \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x - \frac{4}{x}$



Aufgabe 11 (Anwendung der Produktregel)

Berechne den Ableitungsterm $f'(x)$ unter Anwendung der Produktregel.

+	++	+++	++++
$f(x) = x \cdot (x + 1)^3$	$f(x) = (x^2 + 2x - 1) \cdot e^{2x}$	$f(x) = x^2 \cdot e^{-0,5x+2}$	$f_t(x) = tx \cdot e^{-x^2}$
$f(x) = x \cdot e^x$	$f(x) = x \cdot \ln(x)$	$f(x) = \frac{(x^2+1)^4}{x}$	$f(x) = x \cdot 2^{3x}$

³ Idee aus Lambacher Schweizer LK Mathematik NRW (2014)



Aufgabe 12 (Beweis der Produktregel)

Kurzform eines Beweises zur Ableitung eines Produktes ($u \cdot v$) von Funktionen:

Binomische Formel: $(u + v)^2 = u^2 + 2 \cdot u \cdot v + v^2$

Beide Seiten ableiten: $\swarrow \quad \downarrow \quad \searrow$

$$(1) 2 \cdot (u + v) \cdot (u + v)' = 2 \cdot u \cdot u' + 2 \cdot (u \cdot v)' + 2v \cdot v'$$

$$(2) (u + v) \cdot (u' + v') = u \cdot u' + (u \cdot v)' + v \cdot v'$$

$$(3) u \cdot u' + u \cdot v' + v \cdot u' + v \cdot v' = u \cdot u' + (u \cdot v)' + v \cdot v'$$

$$(4) u' \cdot v + u \cdot v' = (u \cdot v)'$$

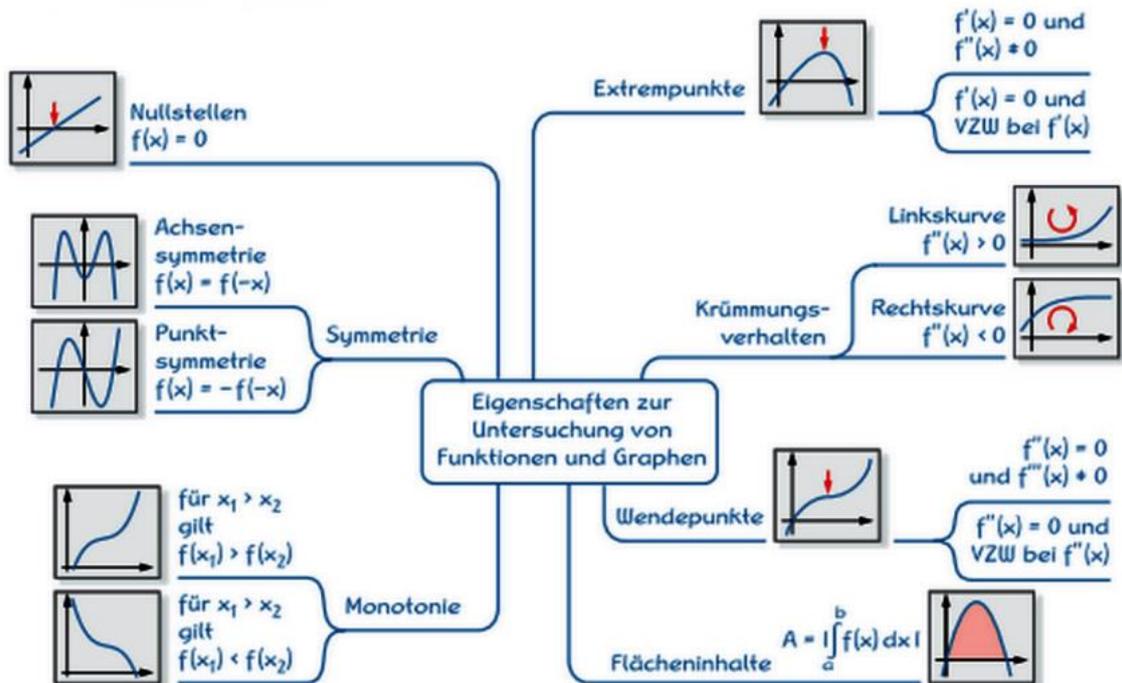
Erläutere, ...

- warum in Zeile (1) auf der linken Seite der Term $(u + v)'$ und auf der rechten Seite die Terme u' und v' stehen.
- warum in Zeile (1) nur die mit Pfeilen gekennzeichneten Funktionen abgeleitet werden, aber das Produkt $(u \cdot v)$ nur mit dem Ableitungszeichen versehen wird.
- welche Umformung von Zeile 1 nach Zeile 2 durchgeführt wurde.
- nach welcher Rechenregel von Zeile (2) nach Zeile (3) die linke Seite umgeformt wurde.
- wie man von Zeile (3) nach (4) kommt und **formuliere** Zeile (4) in Deinen eigenen Worten.

2 Funktionsuntersuchung mit und ohne Sachkontext

Kurvenuntersuchung ohne Sachzusammenhang

Manche Eigenschaften einer Funktion lassen sich am Funktionsterm ablesen, anderen können aus dem Verlauf des Grafen ermittelt werden. Dazu zählen vor allem Extremstellen, Wendestellen und das Steigungs- und Krümmungsverhalten. In der folgenden Grafik sind die wichtigsten Verfahren einer Kurvenuntersuchung dargestellt.



Aufgabe 1 (Verhalten an den Rändern)

Bei zusammengesetzten Funktionen gelten besondere Regeln beim Randverhalten:

$\frac{x^n}{e^x} = x^n \cdot e^{-x}$ strebt für	$x \rightarrow +\infty$ gegen	$x \rightarrow -\infty$ gegen
$n \in \mathbb{N}$ und n ungerade	0	$-\infty$
$n \in \mathbb{N}$ und n gerade	0	0

$x^n \cdot e^x$ strebt für	$x \rightarrow +\infty$ gegen	$x \rightarrow -\infty$ gegen
$n \in \mathbb{N}$	$+\infty$	0

Merke: Für $x \rightarrow \pm\infty$ dominiert e^x über x^n .

$x^n \cdot \ln(x)$ strebt für	$x \rightarrow 0$ gegen	$x \rightarrow +\infty$ gegen
$n \in \mathbb{N}, n \geq 1$	0	$-\infty$

$\frac{\ln(x)}{x^n} = x^{-n} \cdot \ln(x)$ strebt für	$x \rightarrow 0$ gegen	$x \rightarrow -\infty$ gegen
$n \in \mathbb{N}, n \geq 1$	$-\infty$	0

Merke: Für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow 0$ dominiert x^n über $\ln(x)$.

Überprüfe die Tabelleneinträge anhand passender Beispiele mithilfe Deines GTR.



Aufgabe 2 (Grundaufgaben)

- a) Bei jeder Kurvenuntersuchung muss in der Regel mindestens eine Nullstellenuntersuchung durchgeführt werden. **Gib** möglichst viele Belegungsmöglichkeiten für die Variablen c und k **an**, so dass der folgende Term den Wert Null annimmt: $c \cdot (e^k - 1) \cdot \frac{3-c}{k+1}$.

- b) **Berechne** die Nullstellen folgender Funktionen.

+	++	+++
$f(x) = (x + 4) \cdot e^x$	$f(x) = (x^2 - 7x + 6) \cdot e^{2x}$	$f(x) = (e^{2x} - 9e^x + 8) \cdot (e^{-x} - 1)$
$f(x) = x \cdot (x + 1)^3 \cdot (x^2 - 9)$	$f(x) = (e^{2x} - 1) \cdot e^{2x}$	$f(x) = x^2 \cdot e^x - 5x \cdot e^x + 4 \cdot e^x$

- c) **Untersuche** die Grafen folgender Funktionen rechnerisch auf Symmetrie.

+	++	+++
$f(x) = e^{2x^2+6}$	$f(x) = x^4 + x^{-2} + 4$	$f(x) = x \cdot (e^{-x} + e^x)$
$f(x) = e^{-x} + e^x$	$f(x) = (x^5 + x^3 - 22,5x) \cdot x^3$	$f(x) = e^{-x} - e^x$

- d) **Berechne** die Extrem- und Wendestellen der Funktion f .

+	++	+++
$f(x) = (x - 7) \cdot e^x$	$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$	$f(x) = x \cdot \ln(2x + 1)$ (GTR)
$f(x) = (x^2 - 9) \cdot e^x$	$f(x) = x \cdot \ln(x)$	$f(x) = (x^2 - 4) \cdot \ln(x)$ (GTR)



Aufgabe 3 (Kurvenuntersuchung)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$.

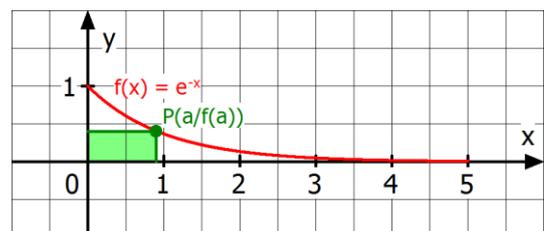
- a) **Berechne** die Null-, lokalen Extrem- und Wendestellen und **untersuche** den Graphen auf sein Krümmungsverhalten sowie auf sein Verhalten im Unendlichen. **Skizziere** den Grafen von f mithilfe dieser Ergebnisse.
- b) **Ermittle** die Gleichung der Tangente im Wendepunkt und **bestimme** den Schnittpunkt der Wendetangente mit der x -Achse.
- c) **Zeige**, dass die Funktion F mit $F(x) = -20(x + 2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ eine Stammfunktion zu f ist.
- d) **Berechne** mithilfe von F den Flächeninhalt der Fläche, die der Graf von f mit den beiden Koordinatenachsen und der Geraden $x = 10$ einschließt.
- e) Der Graf von f schließt mit der x -Achse über dem Intervall $[0; a]$ eine Fläche ein. **Ermittle** mithilfe des GTR, für welchen Wert für a diese Fläche den Flächeninhalt 35 besitzt. **Berechne** den Flächeninhalt der unbegrenzten Fläche, die der Graf von f mit der positiven x -Achse einschließt.



Aufgabe 4 (Extremwertaufgabe)

Auf dem Intervall $[0; 5]$ ist der Graf der Funktion f mit $f(x) = e^{-x}$ gegeben. Der Punkt $P(a/f(a))$, der Koordinatenursprung und die Punkte $(0/f(a))$ und $(a/0)$ schließen für $a > 0$ sind Ecken eines Rechtecks.

Untersuche für welchen Wert für a das Rechteck einen maximalen Flächeninhalt einschließt.





Aufgabe 5 (Kurvenuntersuchung einer Funktionsschar)

Gegeben ist die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = (2x + 3t) \cdot e^{x+1}$.

- Bestimme** die Schnittpunkte mit beiden Koordinatenachsen in Abhängigkeit von t .
- Untersuche** den Grafen der Funktionsschar auf sein Verhalten im Unendlichen.
- Berechne** die Extrem- und Wendepunkte in Abhängigkeit von t .
- Ermittle** t so, dass der Punkt $P(-1/4)$ auf dem Grafen von f_t liegt.
- Beschreibe** die Veränderung der Extrempunkte bei der Erhöhung von t .
- Bestimme** die Ortskurve, auf der die Extrempunkte des Grafen von f_t liegen.



Aufgabe 6 (Kurvenuntersuchung einer Logarithmusfunktion)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x^2 - e \cdot x) \cdot \ln(x)$.

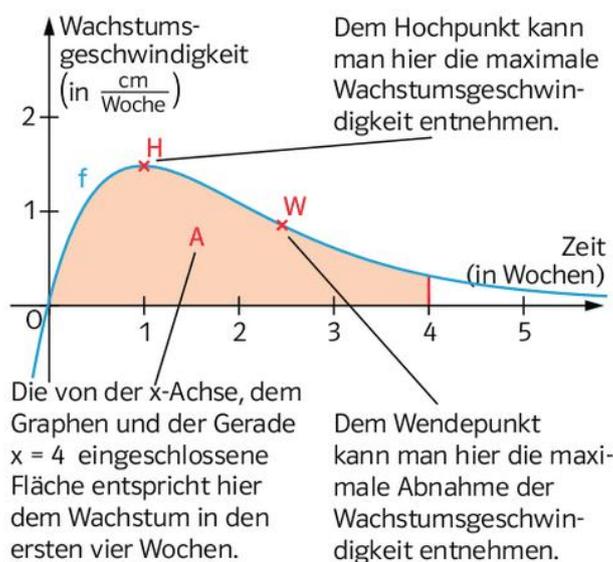
- Gib** den Definitionsbereich von f **an**.
- Berechne** die Schnittpunkte des Grafen mit der x -Achse sowie die Extrem- und Wendepunkte.
- Begründe**, dass $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$ gilt.
- Bestimme** rechnerisch die Gleichung der Tangente im Punkt $P(e/f(e))$.
- Ermittle** unter Zuhilfenahme des GTR den Flächeninhalt der Fläche, die vom Grafen von f , von der Tangente im Punkte $P(e/f(e))$ und der y -Achse eingeschlossen wird.

Kurvenuntersuchung mit Sachzusammenhang



Aufgabe 1 (Wachstum einer Pflanze)⁴

Wenn die Funktion f als Modell für einen Sachzusammenhang dargestellt wird, lassen sich viele Fragen im Sachzusammenhang mithilfe der Funktion f beantworten, indem man z. B. die charakteristischen Punkte, das Monotonie-Verhalten, die Krümmung oder das Integral betrachtet. In der folgenden Abbildung wird die Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt.



Dabei entsprechen bestimmten Fragen im Sachkontext mathematische Fragestellungen, die dann mit Hilfe von Rechenverfahren gelöst werden:

Frage im Sachzusammenhang	Frage bei der Kurvenuntersuchung	Mögliche Rechenverfahren
Wann ist die Wachstumsgeschwindigkeit am größten?	Wo erreicht die Funktion f ihr <u>Maximum</u> ?	Untersuchen auf <u>Hochpunkte</u> und das Verhalten von f an den <u>Definitionsrändern</u> .
Wann nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit am meisten ab?	Wo und wann erreicht die <u>Ableitung</u> von f ihr <u>Minimum</u> ?	Untersuchen auf <u>Wendepunkte</u> und das Verhalten von f' an den <u>Definitionsrändern</u> .
Wie viel ist die Pflanze in den ersten vier Wochen gewachsen?	Welchen <u>Flächeninhalt</u> schließt der Graph von f mit der x -Achse über <u>dem Intervall</u> $[0; 4]$ ein?	Berechnung des <u>Integrals</u> : $\int_0^4 f(t) dt$
Wie hoch ist die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit innerhalb der ersten 4 Wochen?	Welchen <u>Mittelwert</u> hat die Funktion f im Zeitintervall $[0; 4]$?	Berechnung des <u>Mittelwertes</u> der Funktion mithilfe des <u>Integrals</u> : $\frac{1}{4-0} \int_0^4 f(t) dt$

Beantworte die Fragen in der Tabelle, falls die **momentane Wachstumsgeschwindigkeit** einer Pflanze durch die folgende Funktionsgleichung beschrieben wird: $f(t) = 5t \cdot e^{-t}$, $t \geq 0$.

⁴ Idee aus Lambacher Schweizer LK Mathematik NRW (2014)

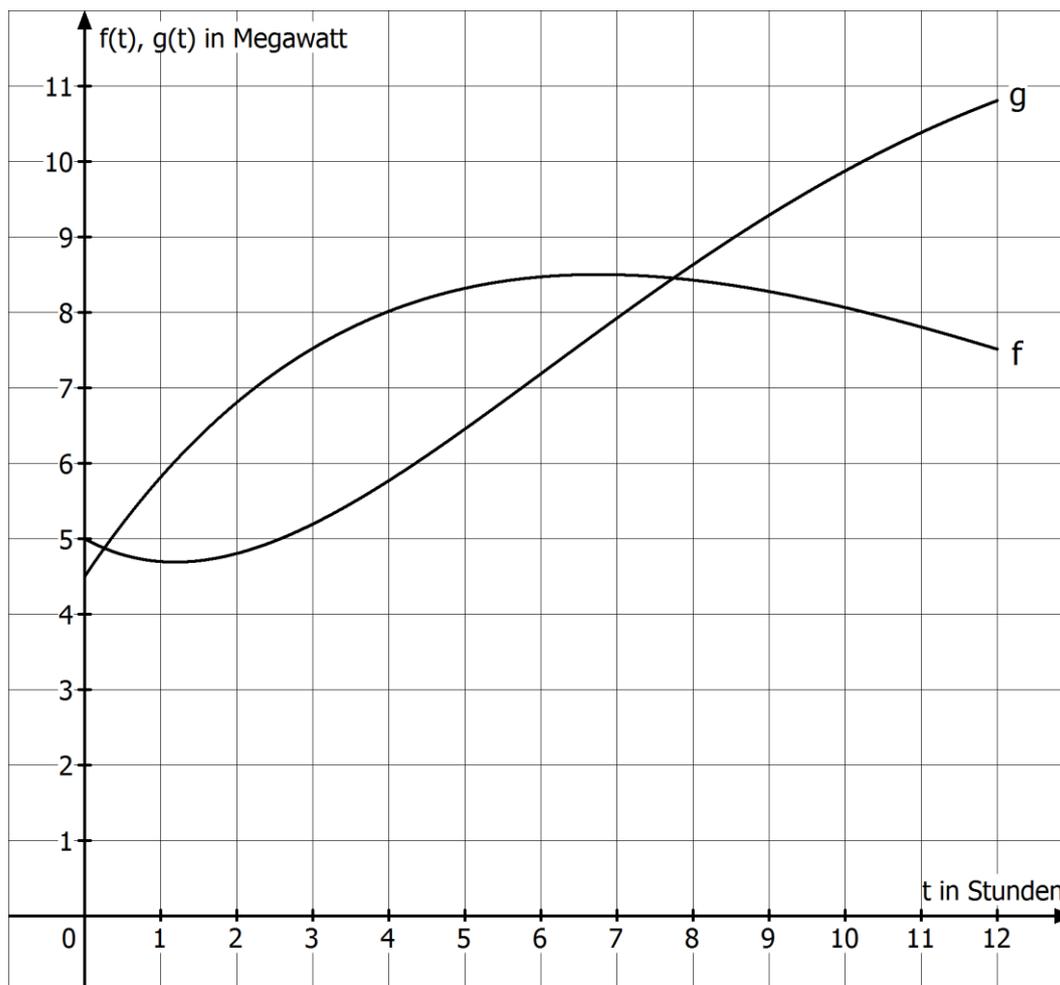


Aufgabe 2 (Abituraufgabe 2015)

In der Nähe einer Stadt liegt ein Windpark. Sowohl der Bedarf dieser Stadt an elektrischer Leistung als auch die in dem Windpark erzeugte elektrische Leistung zeigen einen durch Untersuchungen belegten typischen zeitlichen Verlauf und werden modellhaft für den Zeitraum von 6.00 bis 18.00 Uhr durch die beiden Funktionen f (Bedarf) und g (Erzeugung) mit den Gleichungen

$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot (4t + 9) \cdot e^{-\frac{1}{9}t} \quad (0 \leq t \leq 12) \quad \text{und} \quad g(t) = \left(\frac{1}{4}t^2 + 5\right) \cdot e^{-\frac{1}{9}t} \quad (0 \leq t \leq 12)$$

beschrieben (t in Stunden, $f(t)$ und $g(t)$ in Megawatt). Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dabei der Uhrzeit 6.00 Uhr morgens. Die Graphen der Funktionen f und g sind im Folgenden dargestellt.



- a) (1) **Beschreibe** anhand der Graphen der Funktionen f und g den zeitlichen Verlauf, der von der Stadt benötigten und der von dem Windpark erzeugten elektrischen Leistung.
 (2) **Berechne** die prozentuale Steigerung des Leistungsbedarfs der Stadt zwischen 6.00 Uhr und 8.00 Uhr.
 (3) **Bestimme** (ohne GTR) auf die Minute genau, in welchem Zeitraum der Leistungsbedarf der Stadt nicht durch den Windpark allein gedeckt werden kann.
- b) (1) **Ermittle** rechnerisch, um wie viel Uhr der Leistungsbedarf der Stadt am größten ist, und berechne diesen maximalen Leistungsbedarf.
 (2) **Bestimme** die Uhrzeit, zu der sich der Leistungsbedarf der Stadt betragsmäßig am stärksten ändert.

[Zur Kontrolle: $f'(t) = \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{27}{4} - t\right) \cdot e^{-\frac{1}{9}t}$ und $f''(t) = \frac{2}{81} \cdot \left(t - \frac{63}{4}\right) \cdot e^{-\frac{1}{9}t}$]

Wenn durch eine auf \mathbb{R} differenzierbare Funktion h der Leistungsbedarf eines Verbrauchers gegeben ist, dann wird der resultierende Energiebedarf dieses Verbrauchers im Zeitintervall $[a; b]$ durch $\int_a^b h(t)dt$ dargestellt.

- c) (1) **Weise** nach, dass die Funktion F mit der Gleichung $F(t) = -\frac{9}{2} \cdot (4t + 45) \cdot e^{-\frac{1}{9}t}$ eine Stammfunktion von f ist.
- (2) **Berechne** den Gesamtbedarf der Stadt an elektrischer Energie [in Megawattstunden] für den betrachteten 12-Stunden-Zeitraum.
- (3) Das Intervall $[t_1; t_2]$ sei der Zeitraum aus Teilaufgabe a) (3), in dem der Leistungsbedarf der Stadt nicht durch den Windpark allein gedeckt werden kann. Es gilt: $\int_{t_1}^{t_2} [f(t) - g(t)]dt \approx 11,4$ und $\int_0^{12} [f(t) - g(t)]dt \approx 4,1$. **Interpretiere** diese Tatsache im Sachzusammenhang.
- (4) Der Windpark soll so vergrößert werden, dass die dort erzeugte Leistung, die dann durch die Funktion L_k mit $L_k(t) = k \cdot g(t)$ ($0 \leq t \leq 12$ und $k > 1$) beschrieben wird, den Leistungsbedarf der Stadt während des betrachteten 12-Stunden-Zeitraums deckt. **Ermittle** den kleinsten Wert von k , für den dieses Ziel erreicht wird.

3 Kontrollaufgaben

Kompetenzraster zu den Kontrollaufgaben

Kompetenzen im Bereich der hilfsmittelfreien Aufgaben

Ich kann ...	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
Ableitungsterme mittels Ketten- und Produktregel bestimmen.	1a				
Ableitungsterme geometrisch deuten.	1b				
ohne Rechnung Graf und Funktionsterm begründend zuordnen.	2a				
ein Integral einer zusammengesetzten Funktion bestimmen.	2b				
eine Gleichung einer Tangente an den Grafen berechnen.	3				
Nullstellen und Stammfunktion zusammengesetzter Funktionen bestimmen.	4a, b				
eine Extremwertaufgabe am natürlichen Logarithmus lösen.	5				
zusammengesetzte Funktionen auf Symmetrie untersuchen.	6				

Kompetenzen im Bereich der Aufgaben unter Nutzung von Hilfsmitteln

Ich kann ...	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
Funktionswerte berechnen und im Sachkontext deuten.	7a				
einen Funktionsgraf einer Funktionsschar zeichnen.	7b,8g				
Schnittstellen mit dem GTR berechnen und im Sachkontext deuten.	7c				
mittels Ketten- und Produktregel Ableitungsterme berechnen.	7d,f,i, 8c,f				
ein globales Maximum im Sachkontext bestimmen.	7d				
einen stärksten Anstieg im Sachkontext ermitteln.	7e				
Grafen einer Funktionsschar auf Monotonie untersuchen.	7g				
Veränderung des Scharparameters auf den Grafenverlauf untersuchen.	7h				
Integralwerte zusammengesetzter Funktionen berechnen und interpretieren.	7i				
die Bedeutung einer Integralfunktion (Wirkungsfunktion) angeben.	7i				
von Funktionsscharen Schnittstellen mit den Achsen berechnen.	8a				
eine Funktionsschar auf Symmetrieeigenschaften untersuchen.	8b				
eine Funktionsschar auf das Verhalten an den Rändern untersuchen.	8b				
parameterabhängige Flächen berechnen	8d				
uneigentliche Integrale von Funktionsscharen berechnen.	8e				
parameterabhängige Wendepunkte einer Funktionsschar berechnen.	8f				
eine Gleichung einer Geraden aufstellen, die durch drei Punkte geht.	8g				
eine parameterabhängige Extremwertaufgabe lösen.	8h				



Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

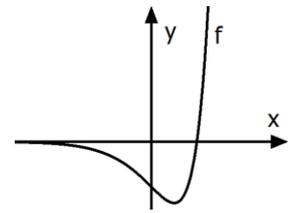
Aufgabe 1 (Funktionseigenschaften)

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 3x \cdot e^{2x+1}$.

- Berechne** die erste und zweite Ableitung von f und den Wert der ersten und zweiten Ableitung an der Stelle $x = 0$.
- Interpretiere** die Werte $f'(0)$ und $f''(0)$ in Bezug auf den Verlauf des Grafen von f bei $x = 0$.

Aufgabe 2 (Funktionen)

- Die Abbildung zeigt den Ausschnitt des Grafen einer Funktion f . Auf den Koordinatenachsen sind keine Einheiten angegeben. **Begründe** (ohne Rechnung), dass keine der beiden folgenden Funktionsvorschriften zu dem dargestellten Grafen gehören kann: $f_1(x) = (x - 2) \cdot e^{-x}$ und $f_2(x) = (x + 2) \cdot e^x$.



- Berechne** $\int_0^1 (e^{-2x} + 2x^3 + 5) dx$.

Aufgabe 3 (Tangente)

Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x) = e^{x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$). **Zeige**, dass die Tangente t an den Grafen der Funktion f im Punkt $P(1 | f(1))$ durch die Gleichung $t(x) = 2 \cdot e \cdot x - e$ beschrieben wird.

Aufgabe 4 (Nullstellen und Stammfunktion)

Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x)$.

- Bestimme** die Nullstellen der Funktion f .
- Zeige**, dass die in \mathbb{R} definierte Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist. Gib eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, für die $G(1) = 2e$ gilt.

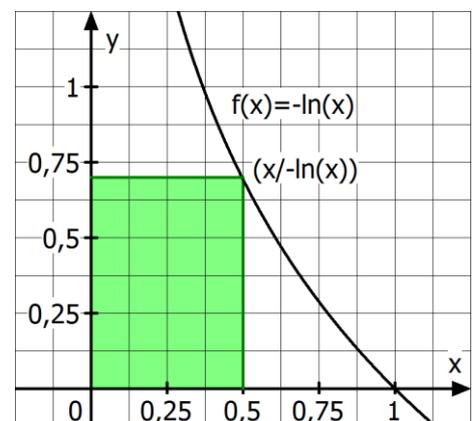
Aufgabe 5 (Logarithmus und Extremwertaufgabe)

In einem Koordinatensystem (vgl. Abbildung rechts) werden alle Rechtecke betrachtet, die folgende Bedingungen erfüllen:

- Zwei Seiten liegen auf den Koordinatenachsen.
- Ein Eckpunkt liegt auf dem Grafen von f mit der Gleichung $f(x) = -\ln(x)$ mit $0 < x < 1$.

Die Abbildung rechts zeigt ein solches Rechteck. Unter den betrachteten Rechtecken gibt es eines mit größtem Flächeninhalt.

Berechne die Seitenlängen dieses Rechtecks.



Aufgabe 6 (Symmetrie)

Untersuche die Funktionen f , g und h mit $f(x) = e^{x^2}$, $g(x) = x \cdot e^{x^2}$ und $h(x) = x^2 \cdot e^x$ auf Symmetrie.



Teil II: Aufgaben unter Zuhilfenahme des GTR

Aufgabe 7 (Kurvenuntersuchung mit Sachzusammenhang)

Eine Firma berechnet die täglichen Verkaufszahlen eines Handymodells, das neu eingeführt wird, modellhaft mit der Funktionsgleichung $f_k(t) = k \cdot (t - 15) \cdot e^{-0,01 \cdot t} + k \cdot 15$ ($k > 0$; t : Anzahl der Tage nach Einführung des neuen Modells; $f(t)$: Handys pro Tag).

Sei im Folgenden zunächst $k = 200$.

- Bestimme** $f_{200}(9)$ und **gib** die Bedeutung des Wertes im Sachzusammenhang **an**.
- Stelle** den Grafen zu f_{200} grafisch **dar**.
- Untersuche**, für welchen Zeitraum mehr als 9000 Handys pro Tag verkauft werden.
- Bestimme** $f'_{200}(t)$ und $f''_{200}(t)$ und **berechne** den Zeitpunkt, zu dem die tägliche Verkaufszahl maximal ist und **gib** die maximale tägliche Verkaufszahl **an**.
- Ermittle** den Zeitpunkt, an dem die täglichen Verkaufszahlen am stärksten ansteigen.
- Bestimme** $f'_k(t)$ und $f''_k(t)$ und zeige, dass der Zeitpunkt, für den die tägliche Verkaufszahl maximal ist, unabhängig von k ist.
- Zeige**, dass der Modellfunktion f_k zufolge die Verkaufszahlen für alle $k > 0$ ständig sinken, nachdem sie die maximale Verkaufszahl erreicht haben.
- Untersuche**, wie sich der Graf von f_k bei steigendem k ändert.
- Weise** nach, dass F_k mit $F_k(t) = k \cdot (-8500 - 100t) \cdot e^{-0,01 \cdot t} + 15 \cdot k \cdot t$ ein Stammfunktion von f_k ist und **berechne** $\int_0^{100} f_k(t) dt$ und $\frac{1}{100-0} \cdot \int_0^{100} f_k(t) dt$. **Interpretiere** die Integralwerte im Sachkontext. **Gib** die Bedeutung der Funktion W mit $W(t) = \int_{115}^t f_k(x) dx$ ($t \geq 115$) im Sachzusammenhang **an**.

Aufgabe 8 (Funktionsschar ohne Sachzusammenhang)

Gegeben ist eine Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = tx \cdot e^{-x^2}$ ($t \neq 0$).

- Bestimme** die Schnittpunkte der Grafen mit den Koordinatenachsen.
- Untersuche** die Funktionenschar auf mögliche Symmetrieeigenschaften und bestimme das Verhalten des Graphen für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$.
- Zeige**, dass F_t mit $F_t(x) = -\frac{t}{2} e^{-x^2}$ eine Stammfunktion von f_t ist.
- Berechne** den Inhalt der Fläche, die von der x -Achse, dem Grafen von f_t und der Geraden $x = a$ mit $a > 0$ eingeschlossen wird.
- Zeige**, dass der Inhalt der Fläche A_t aus d) für $a \rightarrow +\infty$ einen endlichen Wert annimmt.
- Zeige** $f_t''(x) = 2t \cdot (3x + 2x^3) \cdot e^{-x^2}$. **Ermittle** die Wendepunkte von f_t in Abhängigkeit von t .
- Eine Gerade g schneidet den Grafen der Funktion f_t in allen Wendepunkten. **Stelle** den Grafen von f_t und g grafisch dar. **Berechne** die Gleichung der Gerade g .
- Die Punkte $A(0/0)$, $B(a/0)$ und $C(a/f_t(a))$ bilden ein Dreieck ($a > 0$). **Berechne** den Wert für a , für den dieses Dreieck einen maximalen Flächeninhalt hat.

Lösungen:

1 Ketten- und Produktregel

Aufgabe 1

Faktorregel (F), Summenregel (S), Potenzregel (P), Konstantenregel (K), Ableitung von e^{kx} bzw. a^x (EXP), Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion (LN).

+	++	+++	++++
$f(x) = 2x^2 - 2$ $f'(x) = 4x$ $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x$ F, S, P, K	$f(x) = x \cdot (3x^2 - 1)$ $= 3x^3 - x$ $f'(x) = 9x^2 - 1$ $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ F, S, P	$f(x) = (2x - x^2)^2$ $= 4x^2 - 4x^3 + x^4$ $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$ $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3$ F, S, P	$f(x) = \frac{(x-x^2)^2}{x^2} = \left(\frac{x-x^2}{x}\right)^2$ $= (1-x)^2 = x^2 - 2x + 1$ $f'(x) = 2x - 2$ $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$ F, S, P, K
$f(x) = 3x^{-2} - \frac{1}{x}$ $f'(x) = 3x^{-3} + x^{-2}$ $F(x) = -3x^{-1} - \ln(x)$ F, S, P	$f(x) = x^{-1} \left(x - \frac{1}{x}\right)$ $= 1 - x^{-2}$ $f'(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$ $F(x) = x + x^{-1} = x + \frac{1}{x}$ F, S, P, K	$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x} = x^{0,5} - x^{-0,5}$ $f'(x) = 0,5x^{-0,5} + 0,5x^{-1,5}$ $F(x) = \frac{2}{3}x^{1,5} - 2x^{0,5}$ S, P	$f(x) = \frac{(x+\sqrt{x})^2}{x} = (\sqrt{x} + 1)^2$ $= x + 2\sqrt{x} + 1$ $f'(x) = 1 + x^{-0,5}$ $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^{1,5} + x$ F, S, P, K
$f(x) = 12 \cdot 2^x$ $f'(x) = 12 \ln(2) \cdot 2^x$ $F(x) = \frac{12}{\ln(2)} \cdot 2^x$ F, F, EXP	$f(x) = 2^x(2^x - 2^{-x})$ $= 2^{2x} - 1 = (2^2)^x - 1$ $= 4^x - 1$ $f'(x) = \ln(4) \cdot 4^x$ $F(x) = \frac{1}{\ln(4)} \cdot 4^x - x$ S, EXP, K	$f(x) = (2^x + 1)^2$ $= (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x + 1$ $= 4^x + 2 \cdot 2^x + 1$ $f'(x) = \ln(4) \cdot 4^x + 2 \ln(2) \cdot 2^x$ $F(x) = \frac{1}{\ln(4)} \cdot 4^x + \frac{2}{\ln(2)} \cdot 2^x + x$ F, S, P, EXP, K	$f(x) = 2^x \cdot (2^x + 2^{-x})^2$ $= 2^x \cdot [(2^x)^2 + 2 + (2^{-x})^2]$ $= (2^x)^3 + 2 \cdot 2^x + 2^x \cdot 2^{-2x}$ $= 8^x + 2 \cdot 2^x + 2^{-x}$ $= 8^x + 2 \cdot 2^x + 0,5^x$ $f'(x) = \ln(8) \cdot 8^x + 2 \ln(2) \cdot 2^x + \ln(0,5) \cdot 0,5^x$ $F(x) = \frac{1}{\ln(8)} \cdot 8^x + \frac{2}{\ln(2)} \cdot 2^x + \frac{1}{\ln(0,5)} \cdot 0,5^x$ F, S, EXP, K
$f(x) = 3e^x - 2e^{-x}$ $f'(x) = 3e^x + 2e^{-x}$ $F(x) = 3e^x + 2e^{-x}$ F, S, EXP	$f(x) = 3 \left(e^{2x} - \frac{1}{e^{2x}}\right)$ $= 3(e^{2x} - e^{-2x})$ $f'(x) = 3(2e^{2x} + 2e^{-2x})$ $F(x) = 3 \left(\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right)$ F, S, EXP, K	$f(x) = e^{2x} \cdot (1 - e^{-2x})$ $= e^{2x} - 1$ $f'(x) = 2e^{2x}$ $F(x) = 0,5e^{2x} - x$ S, EXP, K	$f(x) = \frac{(e^{2x} - e^{-2x})^2}{e^{4x}}$ $= \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x}}\right)^2$ $= (1 - e^{-4x})^2$ $= 1 - 2e^{-4x} + e^{-8x}$ $f'(x) = 8e^{-4x} - 8e^{-8x}$ $F(x) = x + \frac{1}{2}e^{-4x} - \frac{1}{8}e^{-8x}$ F, S, P, EXP, K

Aufgabe 2

a) $l(t) = \text{Startlänge} - \text{Längenverlust pro Minute} = 30 - 30 - \frac{10,5}{50} \cdot t = 30 - 0,21 \cdot t$

b) Es gilt $\frac{1}{r} = 30 = \text{konstant} \Rightarrow V(l) = \frac{1}{3}G \cdot l = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{30}\right)^2 \cdot l = \frac{\pi}{2700} \cdot l^3$

c) $f(t) = V(l(t)) = \frac{\pi}{2700} \cdot (30 - 0,21 \cdot t)^3 = \frac{\pi}{2700} \cdot (30^3 - 3 \cdot 30^2 \cdot 0,21 \cdot t + 3 \cdot 30 \cdot 0,21^2 \cdot t^2 - 0,21^3 t^3)$
 $f'(t) = \frac{\pi}{2700} \cdot (-3 \cdot 30^2 \cdot 0,21 + 2 \cdot 3 \cdot 30 \cdot 0,21^2 \cdot t - 3 \cdot 0,21^3 t^2)$

$$= -0,21 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{2700} \cdot (30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 0,21^1 \cdot t + 0,21^2 t^2) = -0,21 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{2700} \cdot (30 - 0,21 \cdot t)^2$$

$$f'(0) = -0,21 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{2700} \cdot 900 \approx -0,66, f'(71,5) \approx -0,16; f'(143) = 0$$

Es gilt für den Ableitungsterm: $f'(t) = -0,21 \cdot 3 \cdot (30 - 0,21 \cdot t)^{3-1}$

Aufgabe 3

u: $x \mapsto u(x) = \sqrt{x}$		v: $x \mapsto v(x) = 2x + 1$	
Eingabe x	Ausgabe u(x)	Eingabe x	Ausgabe v(x)
4	2	5	11
100	10	0,2	1,4
a	\sqrt{a}	$2b - 1$	$4b - 1$
$3z$	$\sqrt{3z}$	2^x	$2 \cdot 2^x + 1$

u: $x \mapsto u(x) = \sqrt{x}$		v: $x \mapsto v(x) = 2x + 1$	
Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u = Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v	
9	3	7	
100	10	21	
a	\sqrt{a}	$2\sqrt{a} + 1$	
$3x$	$\sqrt{3x}$	$2\sqrt{3x} + 1$	
$x - 1$	$\sqrt{x - 1}$	$2\sqrt{x - 1} + 1$	
e^x	$\sqrt{e^x} = e^{0,5x}$	$2 \cdot e^{0,5x} + 1$	

v: $x \mapsto v(x) = 2x + 1$		u: $x \mapsto u(x) = \sqrt{x}$	
Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v = Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u	
9	19	$\sqrt{19}$	
100	201	$\sqrt{201}$	
a	$2a + 1$	$\sqrt{2a + 1}$	
$3x$	$6x + 1$	$\sqrt{6x + 1}$	
$x - 1$	$2x - 1$	$\sqrt{2x - 1}$	
e^x	$2e^x + 1$	$\sqrt{2e^x + 1}$	

u: $x \mapsto u(x) = x^2$		v: $x \mapsto v(x) = x + 1$	
Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u = Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v	
-1	1	2	
2	4	5	
x	x^2	$x^2 + 1$	

v: $x \mapsto v(x) = x + 1$		u: $x \mapsto u(x) = x^2$	
Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v = Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u	
-1	0	0	
2	3	9	
x	$x + 1$	$(x + 1)^2$	

u: $x \mapsto u(x) = \sqrt{x}$		v: $x \mapsto v(x) = e^{2x}$	
Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u = Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v	
-1	nicht definiert	nicht definiert	
2	$\sqrt{2}$	$e^{2\sqrt{2}}$	
x	\sqrt{x}	$e^{2\sqrt{x}}$	

v: $x \mapsto v(x) = e^{2x}$		u: $x \mapsto u(x) = \sqrt{x}$	
Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v = Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u	
-1	e^{-2}	$\sqrt{e^{-2}} = e^{-1}$	

2	e^4	$\sqrt{e^4} = e^2$
x	e^x	$\sqrt{e^x} = e^{0,5x}$
u: $x \mapsto u(x) = x^2$		v: $x \mapsto v(x) = 3x$
Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u = Eingabe Automat v	
x	x^2	$3x^2$
v: $x \mapsto v(x) = 3x$		u: $x \mapsto u(x) = x^2$
Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v = Eingabe Automat u	
x	$3x$	$9x^2$
u: $x \mapsto u(x) = \ln(x)$		v: $x \mapsto v(x) = \frac{1}{x}$
Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u = Eingabe Automat v	
x	$\ln(x)$	$\frac{1}{\ln(x)}$
v: $x \mapsto v(x) = \frac{1}{x}$		u: $x \mapsto u(x) = \ln(x)$
Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v = Eingabe Automat u	
x	$\frac{1}{x}$	$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

Aufgabe 4

f(x)	f'(x)	f als Verkettung	Wie ergibt sich f'(x) direkt aus der Verkettung?
$9x^2$	<u>$18x$</u>	$v(x)=3x \quad u(x)=x^2$ $f(x)=u(v(x))=(3x)^2$	$2 \cdot (3x)^1 = 6x$ ist falsch; Korrekturfaktor? <u>$18x = 2 \cdot (3x)^1 \cdot 3$</u>
$4x^2$	<u>$8x$</u>	$v(x)=2x \quad u(x)=x^2$ $f(x)=u(v(x))=(2x)^2$	$2 \cdot (2x)^1 = 4x$ ist falsch <u>$8x = 2 \cdot (2x)^1 \cdot 2$</u>
$4x^2 + 4x + 1$	<u>$8x+4$</u>	$v(x)=2x+1 \quad u(x)=x^2$ $f(x)=u(v(x))=(2x+1)^2$	$2 \cdot (2x+1)^1 = 4x+2$ ist falsch <u>$8x+4 = 2 \cdot (2x+1)^1 \cdot 2$</u>
$x^4 + 2x^2 + 1$	<u>$4x^3+4x$</u>	$v(x)=x^2+1 \quad u(x)=x^2$ $f(x)=u(v(x))=(x^2+1)^2$	$2 \cdot (x^2+1)^1 = 2x^2+1$ ist falsch <u>$4x^3+4x = 2 \cdot (x^2+1)^1 \cdot 2x$</u>
$x^2 - 2x + 1$	<u>$2x-2$</u>	$v(x)=x-1 \quad u(x)=x^2$ $f(x)=u(v(x))=(x-1)^2$	$2 \cdot (x-1)^1 = 2x-2$ ist richtig <u>$2x-2 = 2 \cdot (x-1)^1 \cdot 1$</u>

Vermutung: Leite zunächst die **äußere** Funktion ab. Behandle dabei die **innere** Funktion als Variable. Multipliziere diesen Term mit der Ableitung der **inneren** Funktion. Insgesamt gilt innere Ableitung mal äußere Ableitung.

$$f(x) = (6x + 4)^2; f'(x) = 2 \cdot (6x + 4) \cdot 6$$

richtig falsch.

$$f(x) = (2x - 4)^3; f'(x) = 3 \cdot (2x - 4)^2$$

richtig falsch. Korrektur: $f'(x) = 3 \cdot (2x - 4)^2 \cdot 2$

$$f(x) = (2x - 4)^3; f'(x) = 3 \cdot (2x - 4) \cdot 2$$

richtig falsch. Korrektur: $f'(x) = 3 \cdot (2x - 4)^2 \cdot 2$

$$f(x) = (x^2 + 7)^2; f'(x) = 2 \cdot (x^2 + 7) \cdot 2x$$

richtig falsch. Korrektur: $f'(x) = 2 \cdot (x^2 + 7) \cdot 2x$

$$f(t) = V(l(t)) = \frac{\pi}{2700} \cdot \left(\underbrace{30 - 0,21 \cdot t}_{\text{innere Funktion } l(t)} \right)^3 \xrightarrow[V(l) = \frac{\pi}{2700} l^3 \text{ ist}]{\text{äußere Funktion}} f'(t) = \underbrace{-0,21}_{\text{Ableitung der inneren Funktion}} \cdot \underbrace{3 \cdot (30 - 0,21 \cdot t)^{3-1}}_{\text{Ableitung der äußeren Funktion}}$$

Aufgabe 5

+	++	+++	++++
$f(x) = (x+1)^4$ $f'(x) = 4 \cdot (x+1)^3$	$f(x) = 4 \cdot (x^2+1)^4$ $f'(x) = 4 \cdot 4 \cdot (x^2+1)^3 \cdot 2x$ $= 32x \cdot (x^2+1)^3$	$f(x) = (\varphi(x))^3$ $f'(x) = 3(\varphi(x))^2 \cdot \varphi'(x)$	$f(x) = \frac{1}{e^{x^2+1}} = (e^{x^2+1})^{-1}$ $f'(x) = -(e^{x^2+1})^{-2} \cdot 2xe^{x^2+1}$ $= \frac{2x \cdot e^{x^2+1}}{(e^{x^2+1})^2}$
$f(x) = \ln(2x)$ $f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$	$f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-5x\right)^2}$ $= \left(\frac{1}{2}-5x\right)^{-2}$ $f'(x) = -2 \left(\frac{1}{2}-5x\right)^{-3} \cdot (-5)$ $= \frac{10}{\left(\frac{1}{2}-5x\right)^3}$	$f(x) = \ln(\varphi(x))$ $f'(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)$ $= \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$	$f(x) = \ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{0,5})$ $= 0,5 \cdot \ln(x)$ $f'(x) = \frac{1}{2x}$
$f(x) = e^{2x}$ $f(x) = 2 \cdot e^{2x}$	$f(x) = -3e^{-2x-1}$ $f'(x) = 6 \cdot e^{-2x-1}$	$f(x) = e^{\varphi(x)}$ $f'(x) = \varphi'(x) \cdot e^{\varphi(x)}$	$f(x) = e^{\sqrt{x}}$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$
$f(x) = (8x+1)^{-3}$ $f'(x) = -3 \cdot (8x+1)^{-4} \cdot 8$ $= -24 \cdot (8x+1)^{-4}$	$f(x) = \ln(x^2)$ $f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$	$f(x) = \sqrt{\varphi(x)}$ $= (\varphi(x))^{0,5}$ $f'(x) = 0,5(\varphi(x))^{-0,5}$ $= \frac{1}{2\sqrt{\varphi(x)}}$	$f(x) = \ln(\ln(x))$ $f'(x) = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$

Aufgabe 6

a) Der Startwert ist 5. Pro Tag wächst die Fläche mit dem Faktor 1,1: $A(t) = 5 \cdot 1,1^t$ (t: Zeit in Tagen).

b) $A(5) = 5 \cdot 1,1^5 = 8,05255$; $A(-3) = 5 \cdot 1,1^{-3} \approx 3,75657$

c) Es gilt $t = 7w$. $B(w) = A(7w) = 5 \cdot 1,1^{7w}$ (w: Zeit in Wochen).

$$\frac{B(4)-B(0)}{4-0} = \frac{A(28)-A(0)}{4-0} \approx \frac{72,10497-5}{4} = 16,77624 \text{ cm}^3 \text{ pro Woche.}$$

d) $B'(w) = 5 \cdot \ln(1,1) \cdot 1,1^{7w} \cdot 7 = 10 \Leftrightarrow 1,1^{7w} = \frac{2}{7 \cdot \ln(1,1)} \Leftrightarrow w = \frac{1}{7} \cdot \log_{1,1} \left(\frac{2}{7 \cdot \ln(1,1)} \right) \approx 1,6455$ Wochen.

Aufgabe 7

a) $f_a'(x) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$. Alternativ: $f_a(x) = \ln(a \cdot x) = \ln(a) + \ln(x) \Rightarrow f_a'(x) = \frac{1}{x}$

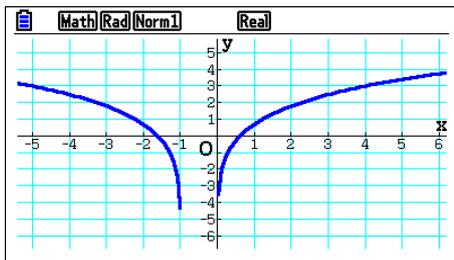
b) Aus $a > 0$ folgt, dass auch $x > 0$ sein muss, damit $f_a(x)$ definiert ist. Daher gilt $f_a'(x) = \frac{1}{x} > 0$. Dies bedeutet, dass alle Grafen der Schar streng monoton wachsend sind.

c) Aus $a < 0$ folgt, dass auch $x < 0$ sein muss, damit $f_a(x)$ definiert ist. Daher gilt $f_a'(x) = \frac{1}{x} < 0$. Dies bedeutet, dass alle Grafen der Schar streng monoton fallend sind.

d) $f_a''(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow$ Alle Grafen zu f_a sind rechtsgekrümmt

Aufgabe 8

a) Es muss gelten: $x^2 + x > 0 \Leftrightarrow x \cdot (x + 1) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ oder $x < -1$: $D_f = \mathbb{R}^{<-1} \cup \mathbb{R}^{>0}$



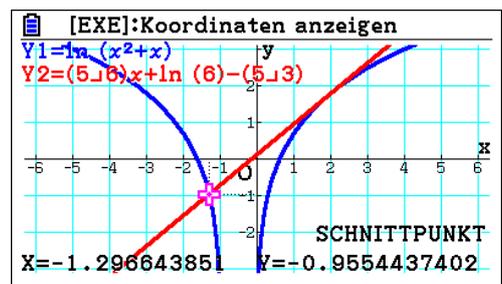
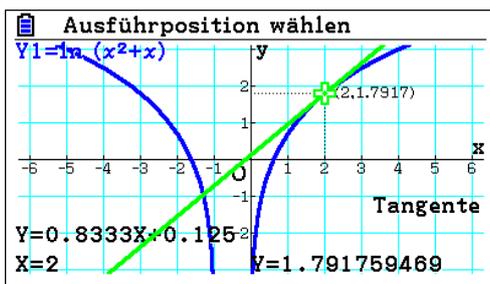
$$\lim_{x \rightarrow -1} (\ln(x^2 + x)) = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x^2 + x)) = -\infty$$

b) $\ln(x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -0,5 \pm \sqrt{1,25} \Leftrightarrow x \approx 0,62$ oder $x \approx -1,62$

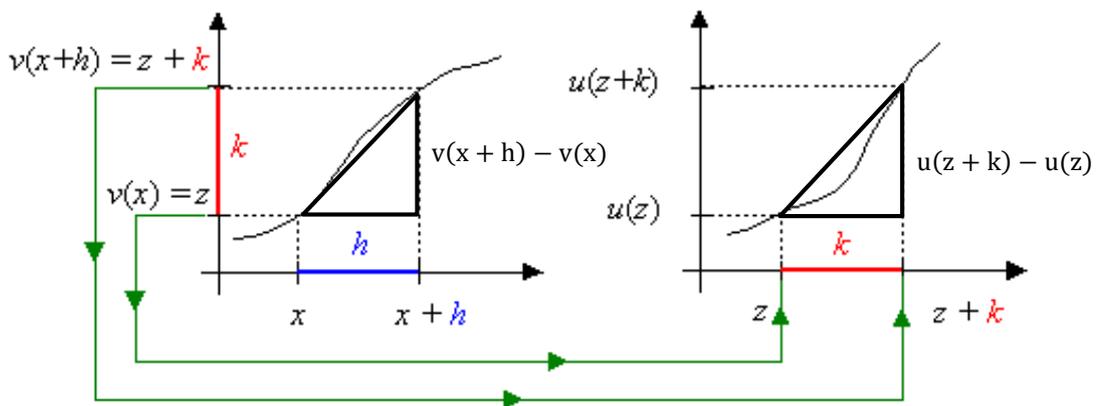
$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} = 0 \Leftrightarrow x = -0,5 \notin D_f \Rightarrow$ es existieren keine lokalen Extremstellen.

c) $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} = -1,5 \Leftrightarrow 2x + 1 = -1,5x^2 - 1,5x \Leftrightarrow 1,5x^2 + 3,5x + 1 = 0 \Leftrightarrow_{GTR} x = -\frac{1}{3} \notin D_f \vee x = -2$

d) $m_t = f'(2) = \frac{5}{6}$ und $P(2/\ln(6))$ liefert $t(x) = \frac{5}{6}x + \ln(6) - \frac{5}{3} \approx 0,83x + 0,13$. Als einzigen Schnittpunkt (neben dem Berührungspunkt P) ergibt sich $x \approx -1,30$.



Aufgabe 9



$$a) m_f[x; x+h] \stackrel{\text{Definition}}{=} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \stackrel{\text{Definition}}{=} \frac{u(v(x+h))-u(v(x))}{h} \stackrel{\substack{v(x)=z \text{ und} \\ v(x+h)=z+k \text{ und} \\ \text{Erweiterung mit } \frac{k}{k}}}{=}}{\frac{u(z+k)-u(z)}{h}} \cdot \frac{k}{k}$$

$$\stackrel{\text{kommutativgesetz} \\ \text{der Multiplikation}}{=} \frac{u(z+k)-u(z)}{k} \cdot \frac{k}{h} \stackrel{\substack{v(x)=z \text{ und} \\ v(x+h)=z+k}}{=}}{\frac{u(z+k)-u(z)}{k} \cdot \frac{v(x+h)-v(x)}{h}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} m_f[x; x+h] \stackrel{\text{a) } k \rightarrow 0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(z+k)-u(z)}{k} \cdot \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \right] \stackrel{\text{Grenzwertsatz}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(z+k)-u(z)}{k} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \\
 &\stackrel{\text{Grenzwertbildung f\"ur } h \rightarrow 0}{=} u'(z) \cdot v'(x) \stackrel{v(x)=z}{=} u'(v(x)) \cdot v'(x)
 \end{aligned}$$

c) $f(x) = u(v(x)) = e^{3x}$ mit $u(z) = e^z$ sowie $z = v(x) = 3x$ und $k = 3h$.

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &\stackrel{\text{Definition}}{=} \frac{e^{3(x+h)}-e^{3x}}{h} \stackrel{\text{Distributivgesetz}}{=} \frac{e^{3x+3h}-e^{3x}}{h} \stackrel{z=v(x)=3x}{=} \frac{e^{z+k}-e^z}{h} \cdot \frac{k}{k} \stackrel{k=3h}{=} \frac{e^{z+k}-e^z}{k} \cdot \frac{3h}{h} \stackrel{\text{k\"urzen}}{=} \frac{e^{z+k}-e^z}{k} \cdot 3 \\
 &\xrightarrow{h \rightarrow 0} e^z \cdot 3 \stackrel{z=3x}{=} 3 \cdot e^{3x} = f'(x)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 10

a) $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x; v(x) = x^4 \Rightarrow v'(x) = 4x^3; f(x) = u(x) \cdot v(x) = x^6;$
 $f'(x) = 6x^5 \neq u'(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot 4x^3 = 6x^4$

b)

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x)$	$u(x) \cdot v'(x)$
$x^6 = x^1 \cdot x^5$	$1 \cdot x^5 = x^5$	$x^1 \cdot 5x^4 = 5x^5$
$x^6 = x^2 \cdot x^4$	$2x \cdot x^4 = 2x^5$	$x^2 \cdot 4x^3 = 4x^5$
$x^6 = x^3 \cdot x^3$	$3x^2 \cdot x^3 = 3x^5$	$x^3 \cdot 3x^2 = 3x^5$
$x^6 = x^4 \cdot x^2$	$4x^3 \cdot x^2 = 4x^5$	$x^4 \cdot 2x^1 = 2x^5$
$x^6 = x^5 \cdot x^1$	$5x^4 \cdot x^1 = 5x^5$	$x^5 \cdot 1 = x^5$

Vermutung: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Aufgabe 11

+	++	+++	++++
$f(x) = x \cdot (x+1)^3$ $f'(x) = 1 \cdot (x+1)^3 + x \cdot 3 \cdot (x+1)^2$ $= (x+1)^2 \cdot (x+1+3x)$ $= (x+1)^2 \cdot (4x+1)$	$f(x) = (x^2 + 2x - 1) \cdot e^{2x}$ $f'(x) = (2x + 2) \cdot e^{2x} + (x^2 + 2x - 1) \cdot 2 \cdot e^{2x}$ $= (2x^2 + 6x) \cdot e^{2x}$	$f(x) = x^2 \cdot e^{-0,5x+2}$ $f'(x) = 2x \cdot e^{-0,5x+2} + x^2 \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x+2} = (-0,5x^2 + 2x) \cdot e^{-0,5x+2}$	$f_t(x) = tx \cdot e^{-x^2}$ $f_t'(x) = t \cdot e^{-x^2} + tx \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2}$ $= (t - 2tx^2) \cdot e^{-x^2}$ $= t \cdot (-2x^2 + 1) \cdot e^{-x^2}$
$f(x) = x \cdot e^x$ $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$ $= (x+1) \cdot e^x$	$f(x) = x \cdot \ln(x)$ $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}$ $= \ln(x) + 1$	$f(x) = \frac{(x^2+1)^4}{x}$ $= (x^2+1)^4 \cdot x^{-1}$ $f'(x) = 4(x^2+1)^3 \cdot 2x \cdot x^{-1} + (x^2+1)^4 \cdot (-1) \cdot x^{-2}$ $= (x^2+1)^3 \cdot (8 - (x^2+1) \cdot x^{-2})$ $= (x^2+1)^3 \cdot (7 - x^{-2})$	$f(x) = x \cdot 2^{3x}$ $f'(x) = 1 \cdot 2^{3x} + x \cdot \ln(2) \cdot 2^{3x} \cdot 3$ $= (1 + \ln(8) \cdot x) \cdot 2^{3x}$

Aufgabe 12 (Beweis der Produktregel)

Erläutere, ...

- warum in Zeile (1) auf der linken Seite der Term $(u + v)'$ und auf der rechten Seite die Terme u' und v' stehen. **Diese Terme stehen jeweils für die Ableitung der inneren Funktion.**
- warum in Zeile (1) nur die mit Pfeilen gekennzeichneten Funktionen abgeleitet werden, aber das Produkt $(u \cdot v)$ nur mit dem Ableitungszeichen versehen wird. **Nach der Summenregel können die vier Summanden einzeln abgeleitet werden. Für den Summand $2 \cdot u \cdot v$ ist die Ableitung nach der Faktorregel $2 \cdot (u \cdot v)'$.**
- welche Umformung von Zeile 1 nach Zeile 2 durchgeführt wurde. **Beide Seiten wurden durch 2 dividiert. Ferner gilt nach der Summenregel $(u + v)' = u' + v'$.**
- nach welcher Rechenregel von Zeile (2) nach Zeile (3) die linke Seite umgeformt wurde. **Die beiden Klammersummen werden ausmultipliziert mit dem Distributivgesetz.**
- wie man von Zeile (3) nach (4) kommt und **formuliere** Zeile (4) in Deinen eigenen Worten. **Auf beiden Seiten werden $u \cdot u'$ und $v \cdot v'$ subtrahiert.**

2 Funktionsuntersuchung mit und ohne Sachkontext

Aufgabe 2

a) $c \cdot (e^k - 1) \cdot \frac{3-c}{k+1} = 0 \iff c = 0 \vee e^k - 1 = 0 \vee 3 - c = 0 \Leftrightarrow c = 0 \vee k = 0 \vee c = 3.$

b)

+	++	+++
$f(x) = (x + 4) \cdot e^x = 0$ $\iff x = -4$ $e^x > 0$	$f(x) = (x^2 - 7x + 6) \cdot e^{2x} = 0$ $\iff_{e^x > 0} x^2 - 7x + 6 = 0$ $\iff x = 3,5 \pm \sqrt{3,5^2 - 6}$ $= 3,5 \pm \sqrt{6,25} = 3,5 \pm 2,5$ $\iff x = 1 \vee x = 6$	$f(x) = (e^{2x} - 9e^x + 8) \cdot (e^{-x} - 1) = 0$ $\iff e^{2x} - 9e^x + 8 = 0 \vee e^{-x} - 1 = 0$ $\iff_{z=e^x} z^2 - 9z + 8 = 0 \vee x = 0$ $\iff z = 4,5 \pm \sqrt{4,5^2 - 8} = 4,5 \pm \sqrt{12,25}$ $= 4,5 \pm 3,5 \vee x = 0$ $\iff z = 1 \vee z = 8 \vee x = 0$ $\iff_{z=e^x} x = 0 \vee x = \ln(8)$
$f(x) = x \cdot (x + 1)^3 \cdot (x^2 - 9) = 0$ $\iff x = 0 \vee x = -1 \vee x = \pm 3$	$f(x) = (e^{2x} - 1) \cdot e^{2x} = 0$ $\iff_{e^x > 0} e^{2x} - 1 = 0 \iff x = 0$	$f(x) = x^2 \cdot e^x - 5x \cdot e^x + 4 \cdot e^x$ $= (x^2 - 5x + 4) \cdot e^x = 0$ $\iff_{e^x > 0} x^2 - 5x + 4 = 0$ $\iff x = 2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 6}$ $= 2,5 \pm \sqrt{2,25} = 2,5 \pm 1,5$ $\iff x = 1 \vee x = 4$

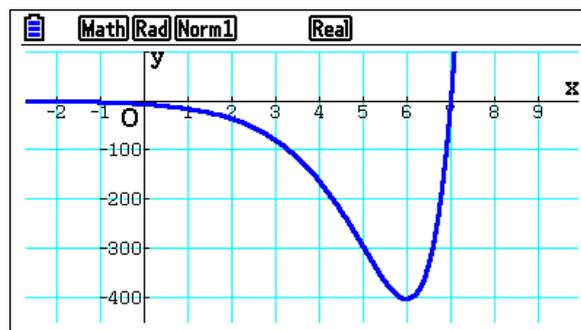
c) Zu zeigen: $f(x) = f(-x)$ (Achsensymmetrie = AS) oder $f(-x) = -f(x)$ (Punktsymmetrie = PS).

+	++	+++
$f(x) = e^{2x^2+6}$ $f(-x) = e^{2(-x)^2+6} = e^{2x^2+6}$ $= f(x)$ AS	$f(x) = x^4 + x^{-2} + 4$ $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^{-2} + 4$ $= x^4 + x^{-2} + 4 = f(x)$ AS	$f(x) = x \cdot (e^{-x} + e^x)$ $f(-x) = (-x) \cdot (e^{-(-x)} + e^{-x})$ $= -x \cdot (e^x + e^{-x}) = x \cdot (e^{-x} + e^x)$ $= -f(x)$ PS
$f(x) = e^{-x} + e^x$ $f(-x) = e^{-(-x)} + e^{-x}$ $= e^x + e^{-x} = e^{-x} + e^x = f(x)$ AS	$f(x) = (x^5 + x^3 - 22,5x) \cdot x^3$ $= x^8 + x^6 - 22,5x^4$ AS, da f gerade ist.	$f(x) = e^{-x} - e^x$ $f(-x) = e^{-(-x)} - e^{-x} = e^x - e^{-x}$ $= -(-e^x + e^{-x}) = -(e^{-x} - e^x)$ $= -f(x)$ PS

d)

$f(x) = (x - 7) \cdot e^x; f'(x) = 1 \cdot e^x + (x - 7) \cdot e^x = (x - 6) \cdot e^x; f''(x) = 1 \cdot e^x + (x - 6) \cdot e^x = (x - 5) \cdot e^x$
 Lokale Minimumstelle bei $x = 6$, da $f'(6) = 0; f'(5) < 0; f'(7) > 0$

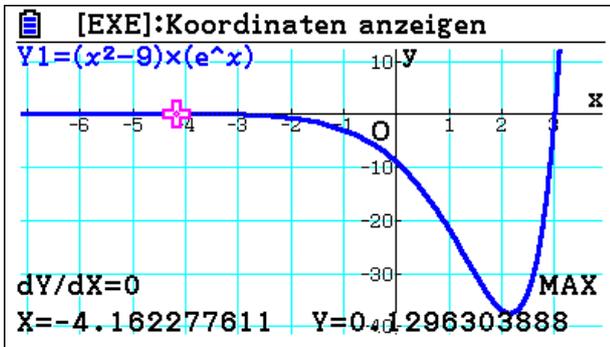
Wendestelle bei $x = 5$, da $f''(5) = 0$ mit VZW von f'' bei 5 von - nach + (Re-Li-Wendestelle)



$$f(x) = (x^2 - 9) \cdot e^x; f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 - 9) \cdot e^x = (x^2 + 2x - 9) \cdot e^x; f''(x) = (x^2 + 4x - 7) \cdot e^x$$

Lokale Maximumstelle bei $-1 - \sqrt{10} \approx -4,16$ und lokale Minimumstelle bei $-1 + \sqrt{10} \approx 2,16$, da $f'(-1 \pm \sqrt{10}) = 0$; $f'(-5) > 0$; $f'(0) < 0$; $f'(3) > 0$.

Wendestellen bei $-2 \pm \sqrt{11} = -2 \pm 3,31$, da $f''(-2 \pm \sqrt{11}) = 0$; $f''(-6) > 0$; $f''(0) < 0$; $f''(2) > 0$; $-2 - \sqrt{11}$ ist Li-Re-Wendestelle und $1,31$ ist Re-Li-Wendestelle.

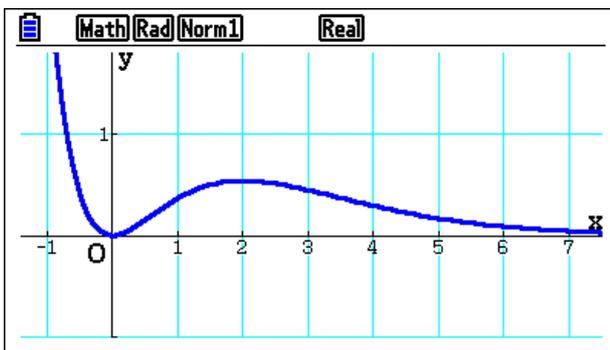


$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}; f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = (-x^2 + 2x) \cdot e^{-x} = 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$f'(-1) < 0$; $f'(1) > 0$; $f'(3) < 0$: 0 ist lokale Minimumstelle und 2 ist lokale Maximumstelle.

$$f''(x) = (x^2 - 4x + 2) \cdot e^{-x} = 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}.$$

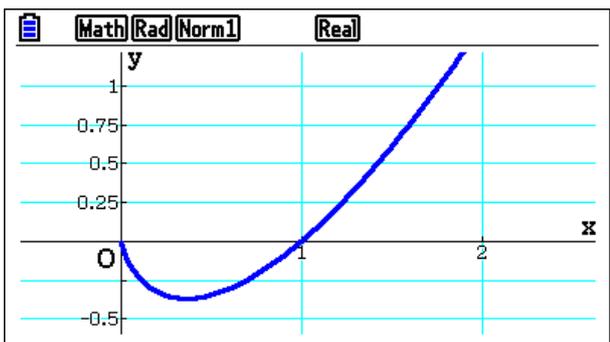
$f''(0) > 0$; $f''(1) < 0$; $f''(4) > 0$: $2 - \sqrt{2}$ ist Li-Re-Wendestelle und $2 + \sqrt{2}$ ist Re-Li-Wendestelle.



$$f(x) = x \cdot \ln(x) \quad (x > 0); f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}; f''(x) = \frac{1}{x}$$

$f''(e^{-1}) = e > 0$: e^{-1} ist lokale Minimumstelle

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$: Der Graf von f ist linksgekrümmt.



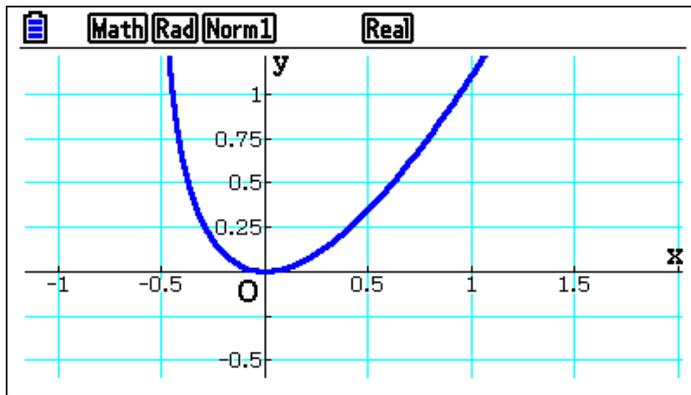
$$f(x) = x \cdot \ln(2x + 1) \quad (x > -0,5)$$

$$f'(x) = 1 \cdot \ln(2x + 1) + x \cdot \frac{2}{2x+1} = \ln(2x + 1) + \frac{2x}{2x+1} = \ln(2x + 1) + 2x \cdot (2x + 1)^{-1}$$

$$f''(x) = \frac{2}{2x+1} + 2 \cdot (2x + 1)^{-1} - 2x \cdot (2x + 1)^{-2} = \frac{4}{2x+1} - \frac{2x}{(2x+1)^2} = \frac{4 \cdot (2x+1) - 2x}{(2x+1)^2} = \frac{6x+4}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \ln(2x + 1) + \frac{2x}{2x+1} = 0 \stackrel{\text{GTR}}{\Leftrightarrow} x = 0; f''(0) = 4 > 0; 0 \text{ ist lokale Minimumstelle.}$$

$$f''(x) = \frac{6x+4}{(2x+1)^2} > 0 \text{ f\"ur } x > -0,5; \text{ Graf ist linksgekr\"ummt.}$$



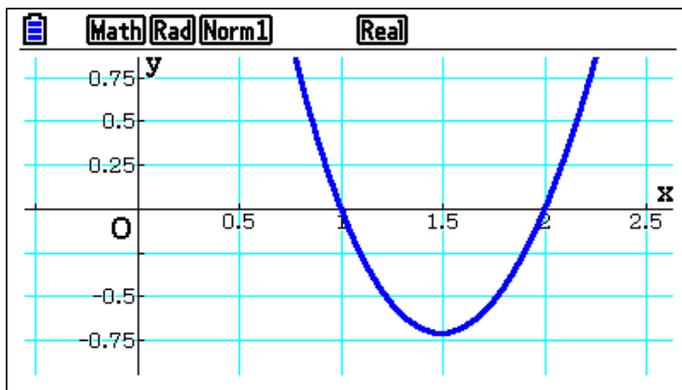
$$f(x) = (x^2 - 4) \cdot \ln(x) \quad (x > 0)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \ln(x) + 2x \cdot x^{-1} + 2x \cdot x^{-1} - (x^2 - 4) \cdot x^{-2} = 2 \ln(x) + 4 - \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + (x^2 - 4) \cdot x^{-1} = 0 \stackrel{\text{GTR}}{\Leftrightarrow} x \approx 1,49; f''(1,49) > 0; 1,49 \text{ ist lokale Minimumstelle}$$

$$f''(x) = 2 \ln(x) + 4 - \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 \cdot \ln(x) + 4x^2 - x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 \cdot \ln(x) + 3x^2 + 4 > 0 \text{ (GTR):}$$

Graf ist linksgekrümmt.



Aufgabe 3

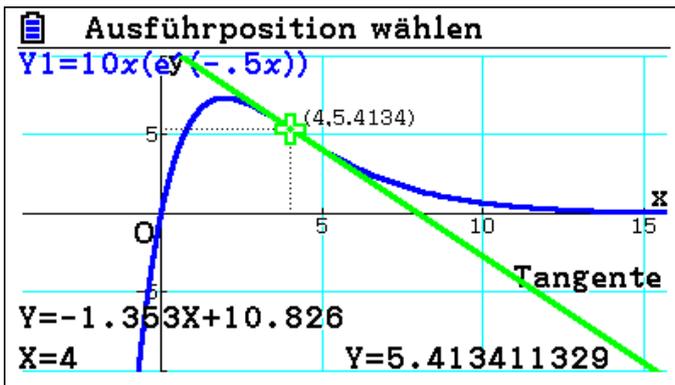
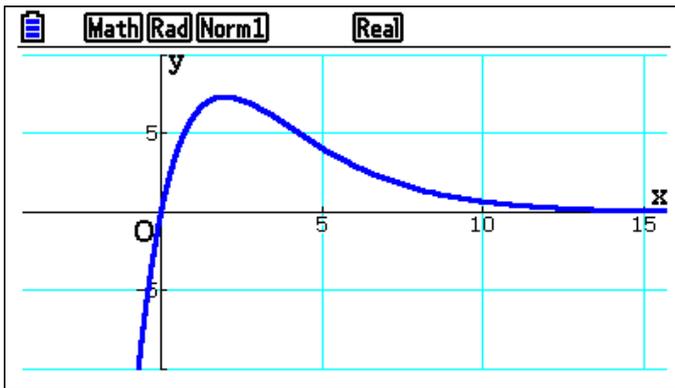
$$\text{a) } f(x) = 10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}, f'(x) = 10 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - 5x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = (-5x + 10) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x) = -5 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (-5x + 10) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = (2,5x - 10) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2; f'(0) > 0; f'(3) < 0; 2 \text{ ist lokale Maximumstelle.}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4; f''(0) < 0; f''(5) > 0; 4 \text{ ist Re-Li-Wendestelle.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}) = 0 \text{ (e-Term dominiert) und } \lim_{x \rightarrow -\infty} (10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}) = -\infty$$



b) $m_t = f'(4) = -10 \cdot e^{-2}$ und $f(4) = 40 \cdot e^{-2}$ und $t(x) = m_t \cdot x + b \Rightarrow 40 \cdot e^{-2} = (-10 \cdot e^{-2}) \cdot 4 + b$
 $\Rightarrow b = 80 \cdot e^{-2} \Rightarrow t(x) = -10 \cdot e^{-2} \cdot x + 80 \cdot e^{-2} \approx -1,35x + 10,83$

c) $F(x) = -20(x+2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow F'(x) = -20 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 20(x+2) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = (-20 + 10(x+2)) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$
 $= 10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = f(x)$

d) $\int_0^{10} (10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}) dx = \left[-20(x+2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^{10} = -240 \cdot e^{-5} - 40 = 40 - 240 \cdot e^{-5} \approx 38,38$

e) $\int_0^a (10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}) dx = \left[-20(x+2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^a = -240 \cdot e^{-\frac{1}{2}a} - 40 = 40 - 240 \cdot e^{-\frac{1}{2}a} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 40$
 $40 - 240 \cdot e^{-\frac{1}{2}a} = 35 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}a} = \frac{5}{240} = \frac{1}{48} \Leftrightarrow a = -2 \ln\left(\frac{1}{48}\right) = -2 \cdot \ln(48^{-1}) = 2 \cdot \ln(48) \approx 7,74$

Aufgabe 4

$$A(a) = a \cdot e^{-a}$$

$$A'(a) = e^{-a} - a \cdot e^{-a} = (-a + 1) \cdot e^{-a} = 0 \Leftrightarrow a = 1;$$

$A'(0,5) > 0$; $A'(1,5) < 0$; $A(0) = 0$; $A(1) = e^{-1}$; $A(5) = 5 \cdot e^{-5}$: 1 ist globale Maximumstelle von A über $[0; 5]$ mit dem globalen Maximum e^{-1} .

Aufgabe 5

a) $f_t(x) = (2x + 3t) \cdot e^{x+1} = 0 \xLeftrightarrow_{e^{x+1} > 0} 2x + 3t = 0 \Leftrightarrow x = -1,5t$; $f_t(0) = 3e \cdot t$; $S_x(-1,5t/0)$; $S_y(0/3e \cdot t)$.

b) $f_t(x) = (2x + 3t) \cdot e^{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$; $f_t(x) = (2x + 3t) \cdot e^{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

$$c) f_t'(x) = 2 \cdot e^{x+1} + (2x + 3t) \cdot e^{x+1} = (2x + 3t + 2) \cdot e^{x+1}$$

$$f_t''(x) = 2 \cdot e^{x+1} + (2x + 3t + 2) \cdot e^{x+1} = (2x + 3t + 4) \cdot e^{x+1}$$

$$f_t'''(x) = 2 \cdot e^{x+1} + (2x + 3t + 4) \cdot e^{x+1} = (2x + 3t + 6) \cdot e^{x+1}$$

$$f_t'(x) = (2x + 3t + 2) \cdot e^{x+1} = 0 \stackrel{e^{x+1} > 0}{\iff} 2x + 3t + 2 = 0 \iff x = -1,5t - 1$$

$$f_t''(-1,5t - 1) = (2 \cdot (-1,5t - 1) + 3t + 4) \cdot e^{-1,5t-1+1} = (-3t - 2 + 3t + 4) \cdot e^{-1,5t} = 2 \cdot e^{-1,5t} > 0:$$

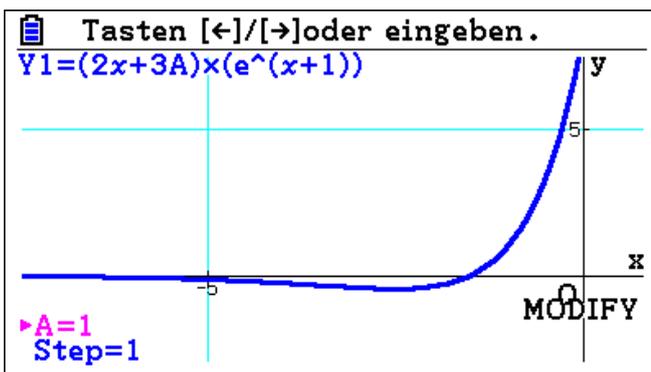
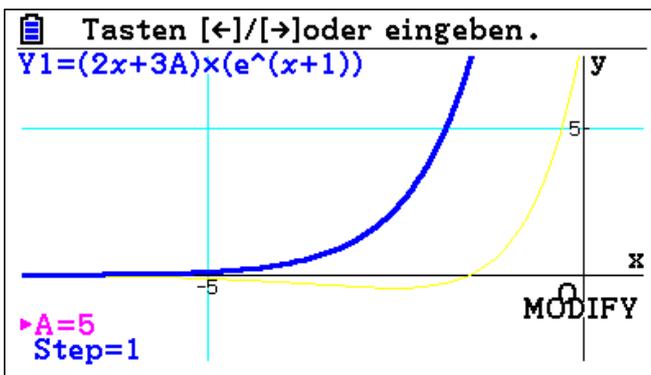
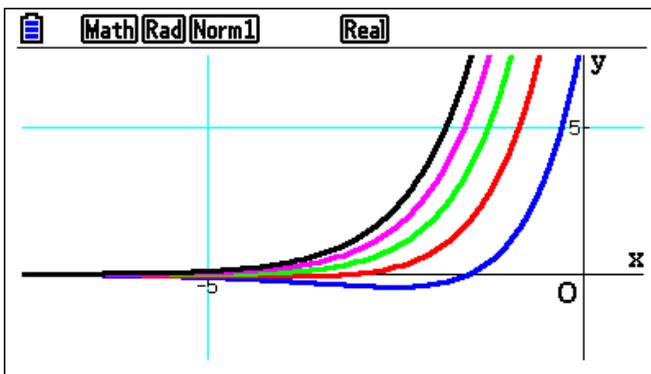
$-1,5t - 1$ ist lokale Minimumstelle mit dem lokalen Minimum $f_t(-1,5t - 1) = (2 \cdot (-1,5t - 1) + 3t) \cdot e^{-1,5t} = -2 \cdot e^{-1,5t}$, also lautet die lokale Tiefpunktschar $(-1,5t - 1 / -2 \cdot e^{-1,5t})$.

$$f_t''(x) = (2x + 3t + 4) \cdot e^{x+1} = 0 \stackrel{e^{x+1} > 0}{\iff} 2x + 3t + 4 = 0 \iff x = -1,5t - 2$$

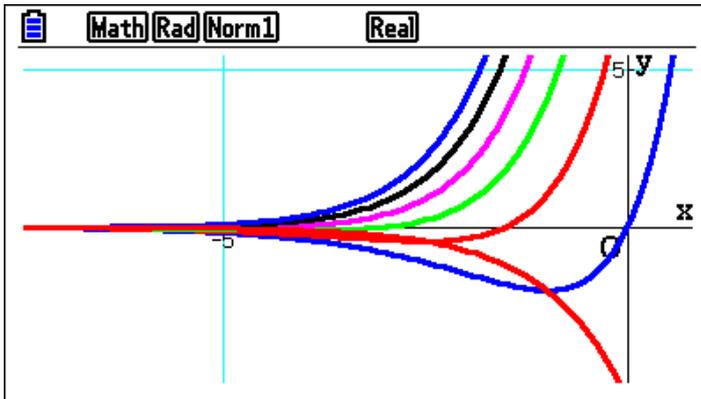
$f_t'''(-1,5t - 2) = (2 \cdot (-1,5t - 2) + 3t + 6) \cdot e^{-1,5t-1} = 2 \cdot e^{-1,5t-1} > 0$: $x = -1,5t - 2$ ist Re-Li-Wendestelle mit y-Wert $f_t(-1,5t - 2) = (2 \cdot (-1,5t - 2) + 3t) \cdot e^{-1,5t-1} = -4 \cdot e^{-1,5t-1}$. Die Schar der Wendepunkte lautet $(-1,5t - 2 / -4 \cdot e^{-1,5t-1})$

$$d) 4 = (2(-1) + 3t) \cdot e^0 \iff 4 = -2 + 3t \iff t = 2$$

e)



f) $x = -1,5t - 1$ und $y = -2 \cdot e^{-1,5t}$. Forme $x = -1,5t - 1$ nach t um und setze es in y ein. $x = -1,5t - 1 \Leftrightarrow t = \frac{x+1}{-1,5} = -\frac{2}{3} \cdot (x+1)$ in y : $y = -2 \cdot e^{-1,5 \cdot (-\frac{2}{3}) \cdot (x+1)} = -2 \cdot e^{x+1}$



Aufgabe 6

a) $x > 0$

b) $f(x) = (x^2 - e \cdot x) \cdot \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - e \cdot x = 0 \vee x = 1 \Leftrightarrow x = e \vee x = 1$: $S_1(1/0)$ und $S_2(e/0)$.

$$f'(x) = (2x - e) \cdot \ln(x) + (x^2 - e \cdot x) \cdot x^{-1} = (2x - e) \cdot \ln(x) + x - e$$

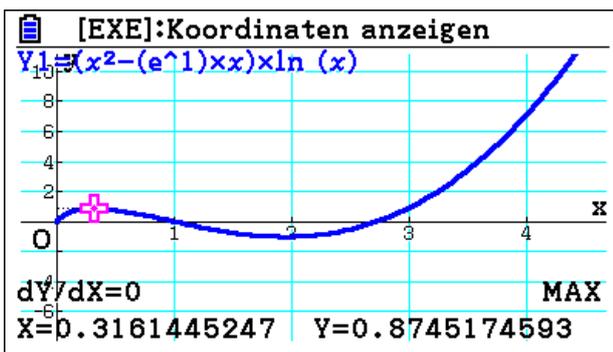
$$f''(x) = 2 \cdot \ln(x) + (2x - e) \cdot x^{-1} + 1 = 2 \cdot \ln(x) + 3 - e \cdot x^{-1}; f'''(x) = 2 \cdot x^{-1} + e \cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = (2x - e) \cdot \ln(x) + x - e = 0 \stackrel{\text{GTR}}{\Leftrightarrow} x \approx 0,32; x \approx 1,94; f'(0,2) > 0;$$

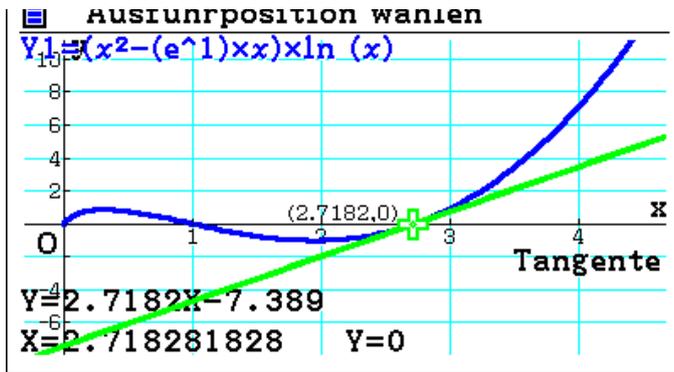
$f'(1) = 1 - e < 0$; $f'(2) = (4 - e) \cdot \ln(4) + 4 - e > 0$: $x \approx 1,94$ ist lokale Minimumstelle mit dem lokalen Minimum $f(1,94) \approx -1$, und $x \approx 0,32$ ist lokale Maximumstelle mit dem lokalen Maximum $f(0,32) \approx -0,87$.

$$f''(x) = 2 \cdot \ln(x) + 3 - e \cdot x^{-1} = 0 \stackrel{\text{GTR}}{\Leftrightarrow} x \approx 0,94; f''(0,94) > 0; f(0,94) \approx 0,10;$$

Der Punkt $W(0,94/0,10)$ ist ein Re-Li-Wendepunkt.



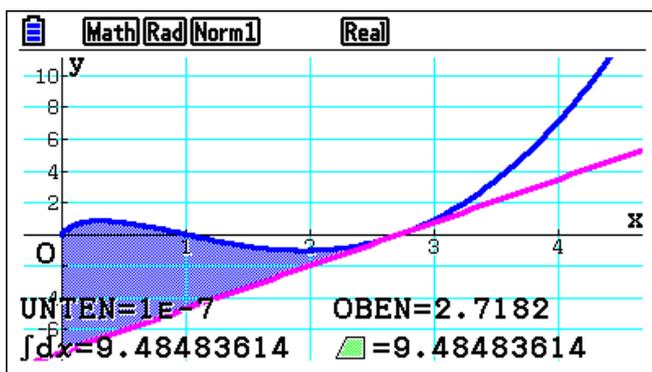
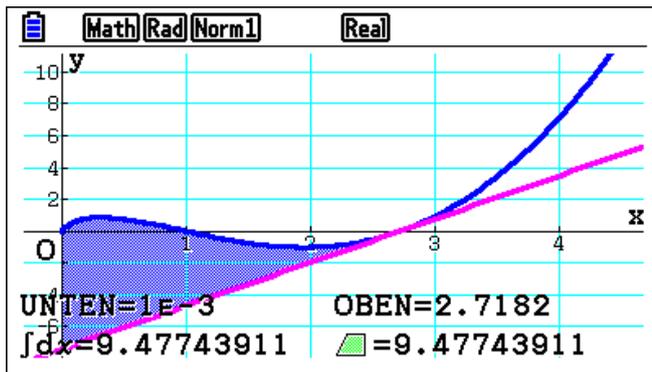
c) $f(x) = (x^2 - e \cdot x) \cdot \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, da jede Potenz von x schneller wächst als der natürliche Logarithmus (Potenzfunktion dominiert das Verhalten am Rand)



d) $P(e/f(e))$.

$m_t = f'(e) = e \cdot \ln(e^1) + e - e = e$ und $f(e) = (e^2 - e \cdot e) \cdot \ln(e) = 0$ und $t(x) = m_t \cdot x + b$
 $\Rightarrow 0 = e \cdot e + b \Rightarrow b = -e^2 \Rightarrow t(x) = e \cdot x - e^2 \approx 2,71x - 7,39$

e) $A = \lim_{L \rightarrow 0} \int_L^e [f(x) - t(x)] dx \approx \int_{0,000001}^e [f(x) - t(x)] \approx 9,41$ (über GSolv (F5) und Integral (F6 und F3) und Mixed (F4) und untere Grenze nahe Null sowie obere Grenze e eingeben.)



Kurvenuntersuchung mit Sachzusammenhang

Aufgabe 1

Ableitungen und Stammfunktion:

$$f'(t) = 5 \cdot e^{-t} + 5t \cdot (-e^{-t}) = (5 - 5t) \cdot e^{-t}$$

$$f''(t) = -5 \cdot e^{-t} + (5 - 5t) \cdot (-e^{-t}) = (5t - 10) \cdot e^{-t}$$

$$f'''(t) = 5 \cdot e^{-t} + (5t - 10) \cdot (-e^{-t}) = (15 - 5t) \cdot e^{-t}$$

$$F(t) = (-5 - 5t) \cdot e^{-t} \text{ (Warum?)}$$

Globales Maximum von f - Maximale Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze:

$$f'(t) = 5 \cdot e^{-t} + 5t \cdot (-e^{-t}) = (5 - 5t) \cdot e^{-t} = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$f''(1) = -5 \cdot e^{-1} < 0: 1 \text{ ist lokale Maximumstelle. Wegen des Randverhaltens } f(t) = 5t \cdot e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

und $f(t) = 5t \cdot e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} -\infty$ und $f(1) = 5e^{-1} > 0$ handelt es sich um eine globale Maximumstelle.

Wendestelle - globales Minimum von f' - maximale Abnahme der Wachstumsgeschwindigkeit:

$$f''(t) = (5t - 10) \cdot e^{-t} = 0 \Leftrightarrow t = 2; f'''(2) = 5 \cdot e^{-2} > 0: 2 \text{ ist Re-Li-Wendestelle. Darüber hinaus gilt } f'(t) = (5 - 5t) \cdot e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ und } f'(t) = (5 - 5t) \cdot e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} +\infty \text{ und } f'(2) = -5e^{-2} < 0. \text{ Daher handelt es sich bei } t = 2 \text{ um ein globales Minimum von } f'.$$

Integral - Zunahme der Pflanzenlänge: $\int_0^4 f(t) dt = [(-5 - 5t) \cdot e^{-t}]_0^4 = -25e^{-4} - (-5) = 5 - 25e^{-4}$

Mittelwert der Funktion - durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit:

$$\frac{1}{4-0} \int_0^4 f(t) dt = 1,25 - 6,25e^{-4}$$

Aufgabe 2

a) (1) Der Bedarf steigt von 6.00 (4,5 MW) bis zu seinem globalen Maximum um ca. 12.30 (8,5 MW) an und fällt anschließend bis um 20 Uhr auf einen höheren Wert als um 6.00 (7,5 MW). an Die Erzeugung startet um 6.00 bei 5 MW, fällt bis 7.30 auf sein globales Minimum (4,5 MW) ab, steigt dann wieder bis 20 Uhr auf eine Wert von knapp 11 MW an. Die Erzeugung nimmt gegen 13 Uhr am stärksten zu. Erzeugung und Bedarf sind um ca. 13.30 gleich groß (8,5 MW).

$$(2) f(0) = 4,5, f(2) = 9,5 \cdot e^{-\frac{2}{9}}. \text{ Prozentuale Abweichung: } \frac{f(2)-f(0)}{f(0)} = \frac{9,5 \cdot e^{-\frac{2}{9}} - 4,5}{4,5} \approx 0,69 = 69\%$$

$$(3) f(t) = g(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (4t + 9) \cdot e^{-\frac{1}{9}t} = \left(\frac{1}{4}t^2 + 5\right) \cdot e^{-\frac{1}{9}t} \xrightarrow{e^{-\frac{1}{9}t} > 0} \frac{1}{2} \cdot (4t + 9) = \frac{1}{4}t^2 + 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}t^2 - 2t + 0,5 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{14} \Leftrightarrow x \approx 7,74 \vee x \approx 0,26.$$

Im Zeitraum zwischen 6:15 und 13:44 ist der Bedarf höher als die Erzeugung.

$$(b) (1) f'(t) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{9}t} + \frac{1}{2} \cdot (4t + 9) \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot e^{-\frac{1}{9}t} = \left(-\frac{2}{9}t + \frac{3}{2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{9}t} = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9}t + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{27}{4} = 6,75; f'(6) > 0; f'(7) < 0; f(6,75) = 18 \cdot e^{-0,75} \approx 8,50; f(0) = 4,5; f(12) = 28,5 \cdot e^{-\frac{4}{3}}$$

$\approx 7,51$: Der höchste Bedarf ist mit ca. 8,5 MW um 12:45.

(2) $f''(t) = -\frac{2}{9} \cdot e^{-\frac{1}{9}t} + \left(-\frac{2}{9}t + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot e^{-\frac{1}{9}t} = \left(\frac{2}{81}t - \frac{7}{18}\right) \cdot e^{-\frac{1}{9}t} < 0$ für $0 \leq t \leq 12$: Der Graf ist über $[0; 12]$ rechtsgekrümmt. Also ist f' dort monoton fallend. Die größte Steigung ist also bei $t = 0$, die

kleinste bei $t = 12$. Wegen $f'(0) = 1,5$ und $f'(12) = \left(-\frac{24}{9} + \frac{3}{2}\right) \cdot e^{-\frac{4}{3}} \approx -0,31$. Die Betragsmäßig größte Steigung ist bei $t = 0$. Dort ändert sich der Leistungsbedarf betragsmäßig am stärksten.

$$\begin{aligned} \text{c) (1)} \quad F(t) &= -\frac{9}{2} \cdot (4t + 45) \cdot e^{-\frac{1}{9}t} \Rightarrow F'(x) = -18 \cdot e^{-\frac{1}{9}t} - \frac{9}{2} \cdot (4t + 45) \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot e^{-\frac{1}{9}t} \\ &= -18 \cdot e^{-\frac{1}{9}t} + \frac{1}{2} \cdot (4t + 45) \cdot e^{-\frac{1}{9}t} = (-18 + 2t + 22,5) \cdot e^{-\frac{1}{9}t} = (2t + 4,5) \cdot e^{-\frac{1}{9}t} = f(t). \end{aligned}$$

$$\text{(2)} \quad \int_0^{12} f(t) dt = \left[-\frac{9}{2} \cdot (4t + 45) \cdot e^{-\frac{1}{9}t}\right]_0^{12} \approx 92,18 \text{ [MWh]}$$

(3) $\int_{t_1}^{t_2} [f(t) - g(t)] dt \approx 11,4$: Das noch durch externe Energiequellen zu deckende Energiedefizit zwischen 6:15 und 13:44 beträgt 11,4 MWh. Über den gesamten Zeitraum beträgt das Energiedefizit $\int_0^{12} [f(t) - g(t)] dt \approx 4,1$ MWh.

$$\begin{aligned} \text{(4)} \quad \int_0^{12} [f(t) - k \cdot g(t)] dt \leq 0 &\Leftrightarrow \int_0^{12} f(t) dt \leq \int_0^{12} [k \cdot g(t)] dt \Leftrightarrow \int_0^{12} f(t) dt \leq k \cdot \int_0^{12} g(t) dt \\ &\Leftrightarrow k \geq \frac{\int_0^{12} f(t) dt}{\int_0^{12} g(t) dt} \approx 5,66. \end{aligned}$$

Der Parameter muss mindestens $k = 5,66$ betragen, damit der Bedarf vom Windpark gedeckt werden kann.

Kontrollaufgaben

Aufgaben 1

$$\text{a) } f'(x) = 3 \cdot e^{2x+1} + 2x \cdot 2 \cdot e^{2x+1} = (3 + 4x) \cdot e^{2x+1} \Rightarrow f'(0) = 3e$$

$$f''(x) = 4 \cdot e^{2x+1} + (3 + 4x) \cdot 2 \cdot e^{2x+1} = (10 + 8x) \cdot e^{2x+1} \Rightarrow f''(0) = 10e$$

b) Graf ist an der Stelle 0 streng monoton steigend und linksgekrümmt.

Aufgaben 2

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2) \cdot e^{-x} = -\infty$: Graf müsste nach links unten verlaufen.

$f_2(-2) = 0$: Graf müsste bei $x = -2$ eine Nullstelle haben.

$$\text{b) } \int_0^1 (e^{-2x} + 2x^3 + 5) dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}x^4 + 5x \right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2} + 5 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 6 - \frac{1}{2}e^{-2}$$

Aufgaben 3

Zu zeigen: $f'(1) = t'(1) = 2 \cdot e$ und $t(1) = f(1) = 2e \cdot 1 - e = e$

Es gilt: $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} \Rightarrow f'(1) = 2e$ und $f(1) = e^{1^2} = e$, was zu zeigen war.

Aufgaben 4

$$\text{a) } f(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = -2.$$

$$\text{b) } F'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2) \cdot e^x = f(x); G(x) = x^2 \cdot e^x + c \text{ und } G(1) = 2e$$

$$\Rightarrow 1^2 \cdot e^1 + c = 1 \Rightarrow c = 1 - e \Rightarrow G(x) = x^2 \cdot e^x + 1 - e.$$

Aufgaben 5

Der Flächeninhalt des Rechtecks wird mit $A(x)$ bezeichnet.

$$A(x) = -\ln(x) \cdot x \Rightarrow A'(x) = -\frac{1}{x} \cdot x + (-\ln(x)) \cdot 1 = -1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow 1} A'(x) = A'(1) = -1$ und $\lim_{x \rightarrow 0} A'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [-1 - \ln(x)] = +\infty$ wechselt A' bei $x = e^{-1}$ das VZ von $+$ nach $-$. Daher ist $x = e^{-1}$ lokale Maximumstelle. Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} A(x) = \lim_{x \rightarrow 1} A(x) = 0$ ist $x = e^{-1}$ sogar globale Extremstelle über $0 < x < 1$. Die Seitenlängen sind $x = e^{-1}$; $y = -\ln(e^{-1}) = -(-1) = 1$

Aufgaben 6

$$f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x) \Rightarrow \text{Graf von } f \text{ ist achsensymmetrisch zur } y - \text{Achse}$$

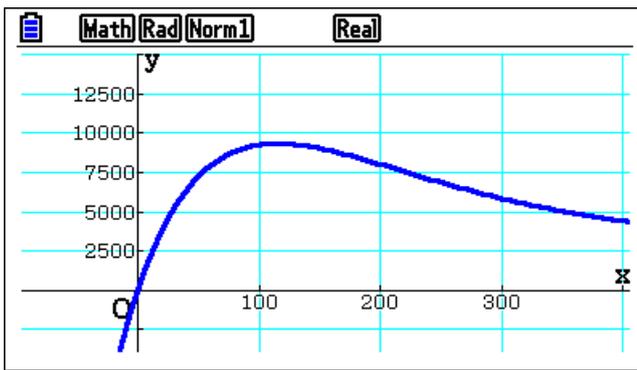
$$f(-x) = (-x) \cdot e^{(-x)^2} = -e^{x^2} = -f(x) \Rightarrow \text{Graf von } f \text{ ist punktsymmetrisch zum Ursprung}$$

$$f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-x} = x^2 \cdot e^{-x} \neq f(x) \text{ und } \neq -f(x) \Rightarrow \text{Graf von } f \text{ ist unsymmetrisch}$$

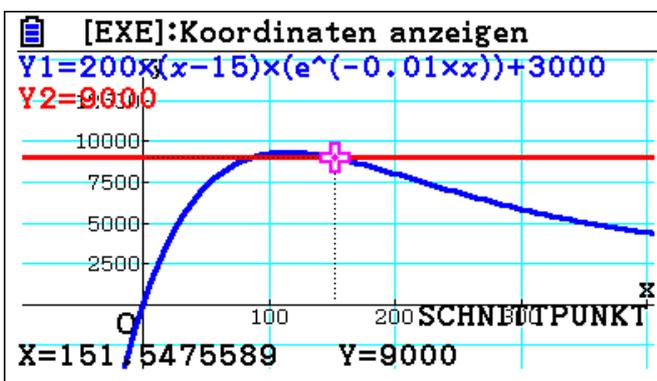
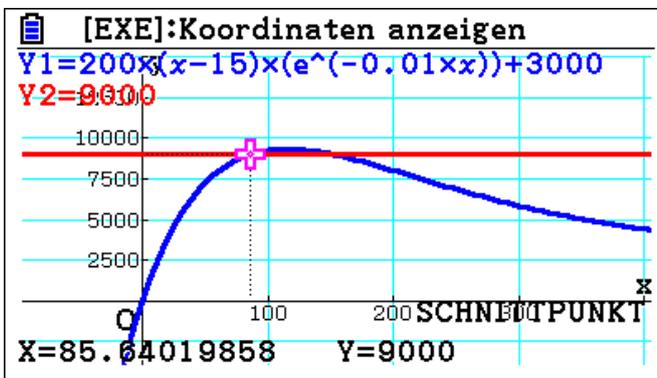
Aufgabe 7

a) $f_{200}(9) = 200 \cdot (9 - 15) \cdot e^{-0,01 \cdot 9} + 3000 \approx 1903$ Handy pro Tag entspricht der momentanen Verkaufsrate (= tägliche Verkaufszahl) am 9. Tag.

b)



c) $f_{200}(t) \geq 9000 \Leftrightarrow 85,64 \leq x \leq 151,55$ Etwa zwischen den 86. und dem 151. Tag sind die täglichen Verkaufszahlen größer als 9000 Handys pro Tag. (Über Menu 5 und den Schnittpunkt der beiden Grafen zu f und g mit $g(x) = 9000$)



d) $f_{200}(t) = 200 \cdot (t - 15) \cdot e^{-0,01 \cdot t} + 3000$; Wende zunächst Produktregel und Summenregel an (anschließend auch auf den e-Term die Kettenregel):
 $f_{200}'(t) = (230 - 2t) \cdot e^{-0,01 \cdot t}$; $f_{200}''(t) = (-4,3 + 0,02t) \cdot e^{-0,01 \cdot t}$; $f_{200}'(t) = (230 - 2t) \cdot e^{-0,01 \cdot t} = 0$
 $\Leftrightarrow 230 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 115$. $f_{200}''(115) = (-4,3 + 0,02 \cdot 115) \cdot e^{-0,01 \cdot 115} \approx -0,6 < 0$: 115 ist eine lokale Maximumstelle mit dem lokalen Maximum $f_{200}(115) = 200 \cdot (115 - 15) \cdot e^{-0,01 \cdot 115} + 3000 \approx 9333$. Aufgrund des obigen Grafenverlaufs erkennt man, dass das Maximum sogar global ist (Randwerte liegen unter dem Maximum).

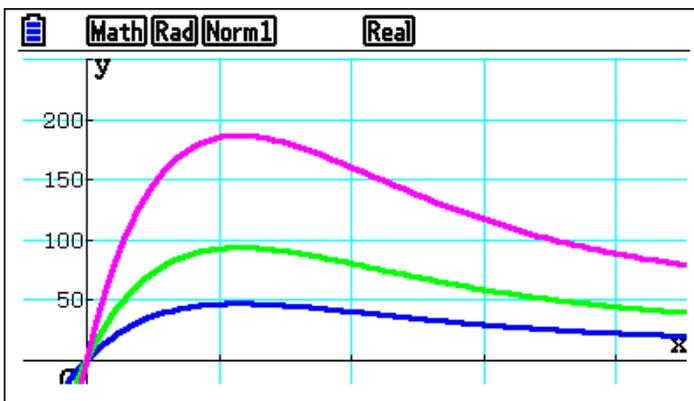
e) Das globale Maximum der ersten Ableitung ist gesucht. Da die einzige Wendestelle eine Rechts-Links-Wendestelle (dort ist die erste Ableitung lokal am kleinsten), erkennt man am Grafen, dass die Ableitung bei $t = 0$ am größten ist, da dort der Graf am steilsten ist.

f) $f_k(t) = k \cdot (t - 15) \cdot e^{-0,01t} + k \cdot 15$; Wende zunächst Produktregel und Summenregel an. Der Unterschied zu oben ist nur der konstante Faktor vor dem Klammerausdruck. Also:

$f_k'(t) = k \cdot (1,15 - 0,01t) \cdot e^{-0,01t}$; $f_k''(t) = k \cdot (-0,0215 + 0,0001t) \cdot e^{-0,01t}$; Die Nullstellen von f_k' sind offenbar die gleichen wie bei f_{200}' . Da k größer Null ist, ist auch $f_k''(115)$ negativ für jedes k . Damit ist 115 für jedes k die globale Maximumstelle.

g) Zu zeigen ist, dass $f_k'(t) = k \cdot (230 - 2t) \cdot e^{-0,01t} < 0$ für alle $t > 115$ (wenn die Ableitung über einem Bereich negativ ist, ist der Graph dort streng monoton fallend.). Da $230 - 2t$ für $t > 115$ negativ ist und k genauso wie der e -Term echt größer Null ist, ist das Produkt insgesamt negativ, was zu zeigen war.

h) Da der Faktor k den Funktionswert mit dem Term $(230 - 2t) \cdot e^{-0,01t}$ multipliziert wird, wird der Graf der Funktion h mit $h(x) = (230 - 2t) \cdot e^{-0,01t}$ von der t -Achse um den Faktor $k > 0$ in positive y -Richtung gestreckt.



i) $F_k'(t) = k \cdot (-100) \cdot e^{-0,01t} + k \cdot (-8500 - 100t) \cdot (-0,01) \cdot e^{-0,01t} + 15 \cdot k$
 $= k \cdot (-100 + 85 + t) \cdot e^{-0,01t} + 15k = k \cdot (t - 15) \cdot e^{-0,01t} + 15k = f_k(t)$

- $\int_0^{100} f_k(t) dt = [k \cdot (-8500 - 100t) \cdot e^{-0,01t} + 15 \cdot k \cdot t]_0^{100}$
 $= -18500 \cdot e^{-1} \cdot k + 1500 \cdot k - (-8500 \cdot k) = (10000 - 10000e^{-1}) \cdot k = (1 - e^{-1}) \cdot 10000 \cdot k$:
 Anzahl der verkauften Handys in den ersten 100 Tagen.
- $\frac{1}{100-0} \cdot \int_0^{100} f_k(t) dt = (1 - e^{-1}) \cdot 100 \cdot k$: Durchschnittliche tägliche Verkaufszahl in den ersten 100 Tagen.
- $W(t) = \int_{115}^t f_k(x) dx$ ($t \geq 115$): Anzahl der verkauften Handys im Zeitraum t Tage nach dem 115. Tag.

Aufgabe 8

a) $f_t(x) = tx \cdot e^{-x^2} = 0 \iff x = 0 \Rightarrow f_t(0) = 0$. Also: $S_x(0/0)$ und $S_y(0/0)$.

b) $f_t(-x) = t(-x) \cdot e^{-(-x)^2} = -tx \cdot e^{-x^2} = -f_t(x)$: Achsensymmetrie.

$f_t(x) = tx \cdot e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ und $f_t(x) = tx \cdot e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ (e -Term dominiert jeweils).

c) $F_t'(x) = \left(-\frac{t}{2}\right) \cdot (-2x \cdot e^{-x^2}) = tx \cdot e^{-x^2} = f_t(x)$ (Ketten- und Faktorregel)

d) $\int_0^a f_t(x) dx = \left[-\frac{t}{2} \cdot e^{-x^2}\right]_0^a = -\frac{t}{2} \cdot e^{-a^2} - \left(-\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \cdot e^{-a^2}$

e) $\int_0^a f_t(x) dx = \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \cdot e^{-a^2} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \frac{t}{2}$

$$\mathbf{f)} f_t'(x) = t \cdot e^{-x^2} + tx \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = (t - 2tx^2) \cdot e^{-x^2}$$

$$f_t''(x) = (-4tx) \cdot e^{-x^2} + (t - 2tx^2) \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = (4tx^3 - 6tx) \cdot e^{-x^2} = 2t \cdot (2x^3 - 3x) \cdot e^{-x^2}$$

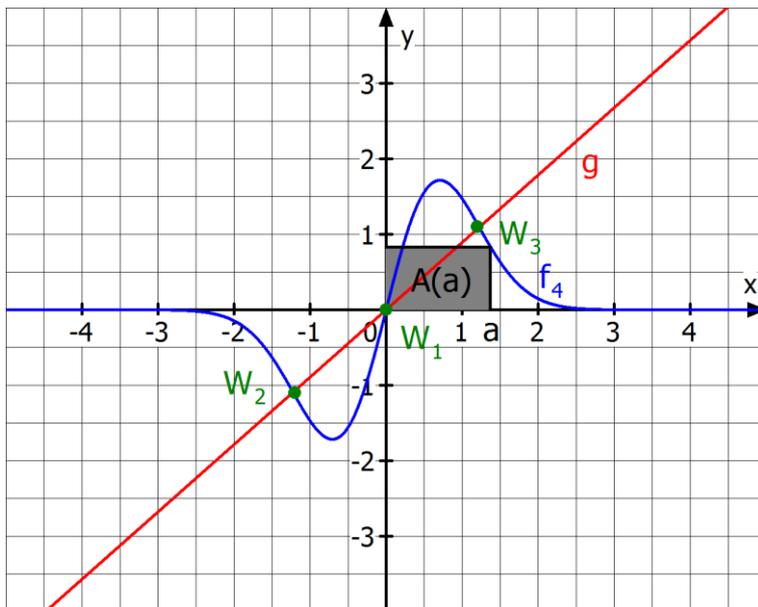
$$\text{Notwendige Bedingung: } f_t''(x) = 0 \Leftrightarrow 2t \cdot (2x^3 - 3x) \cdot e^{-x^2} = 0 \stackrel{e^{-x^2} > 0}{\Leftrightarrow} 2x^3 - 3x = x \cdot (2x^2 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{1,5}$$

$f_t''(-2) < 0$; $f_t''(-1) > 0$; $f_t''(1) < 0$; $f_t''(2) > 0$: $x = -\sqrt{1,5}$ ist Re-Li-Wendestelle, $x = 0$ Li-Re-Wendestelle und $x = \sqrt{1,5}$ Re-Li-Wendestelle. Mit der Bestimmung der y-Werte erhält man für die Wendepunkte: $W_1(0/0)$, $W_2(\sqrt{1,5}/\sqrt{1,5} \cdot t \cdot e^{-1,5})$ und $W_3(-\sqrt{1,5}/-\sqrt{1,5} \cdot t \cdot e^{-1,5})$.

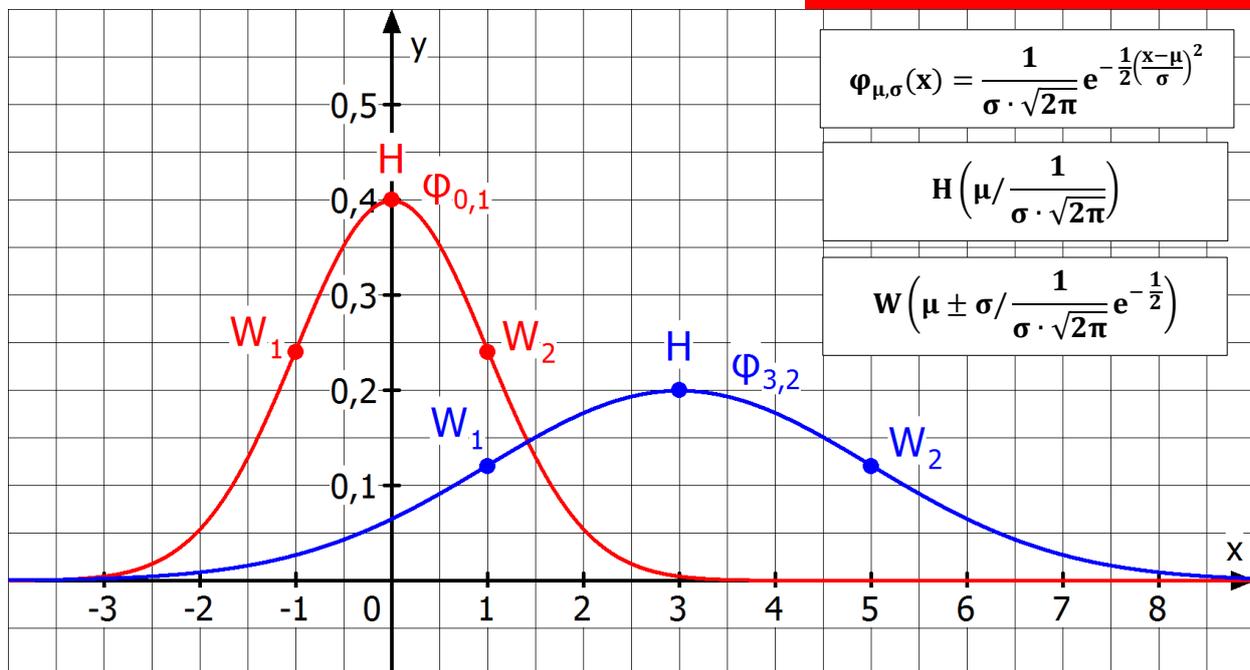
$$\mathbf{g)} g(x) = 4 \cdot e^{-1,5} \cdot x$$

$\mathbf{h)} A(a) = \frac{1}{2}a \cdot f_4(a) = \frac{1}{2}a \cdot 4a \cdot e^{-a^2} = 2a^2 \cdot e^{-a^2}$. Mit $A'(a) = (4a - 4a^3) \cdot e^{-a^2} = 0$ erhält man die Nullstellen von A' durch $4a - 4a^3 = 0 \Leftrightarrow 4a \cdot (1 - a^2) = 0 \stackrel{a > 0}{\Leftrightarrow} a = 1$. Mit $A'(0,5) > 0$; $A'(1,5) < 0$ ($a = 1$ ist lokale Maximumstelle von A) sowie $A(a) = 2a^2 \cdot e^{-a^2} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$ und $A(a) = 2a^2 \cdot e^{-a^2} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0$ (e^{-a^2} Term dominiert) (Randwertbetrachtung) folgt, dass für $a > 0$ $A(1) = 2 \cdot e^{-1}$ globales Maximum von A ist.



3. Unterrichtsvorhaben in der Q2-Phase

Stetige Zufallsgrößen - Normalverteilung



Jörn Meyer

joernmeyer@web.de

www.maspole.de

Inhaltsverzeichnis

1 Stetige Zufallsgrößen – Integrale besuchen die Stochastik.....	2
2 Gauß'sche Glockenfunktion und Normalverteilung.....	7
3 Kontrollaufgaben	16
Lösungen	19

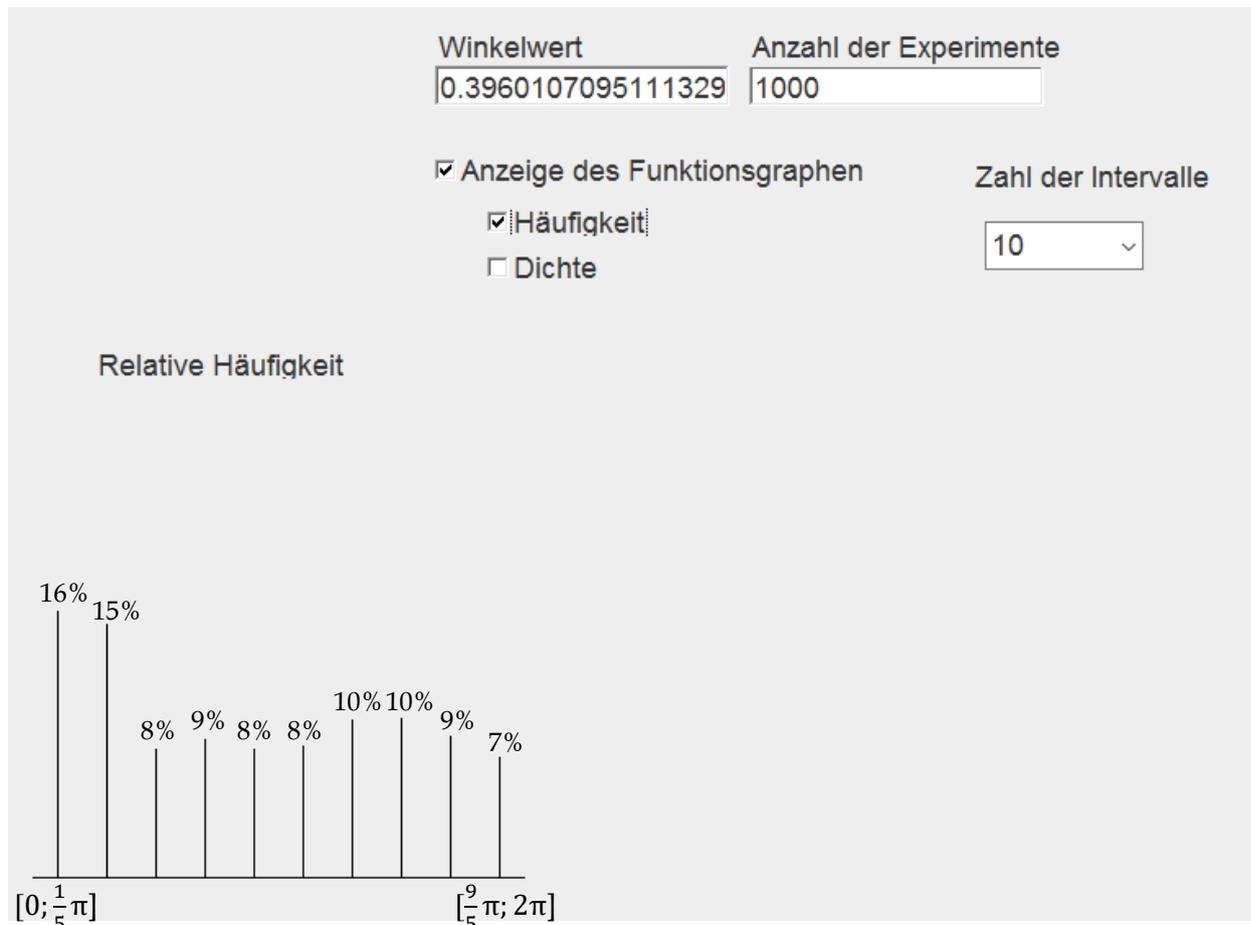
1 Stetige Zufallsgrößen - Integrale besuchen die Stochastik



Einführungsaufgabe (Manipuliertes Glücksrad 1)¹

- a) Ein Glücksrad wird gedreht. Als Ergebnis kann ein Winkel zwischen 0 und 2π gedreht werden (vgl. folgende Abbildung). Der Winkel 0,5 kann also genauso gedreht werden wie der Winkel $\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$ oder $\sqrt{2}$. Wie hoch aber die Wahrscheinlichkeit, eines dieser drei Ergebnisse zu drehen? **Begründe** Deine Antwort.

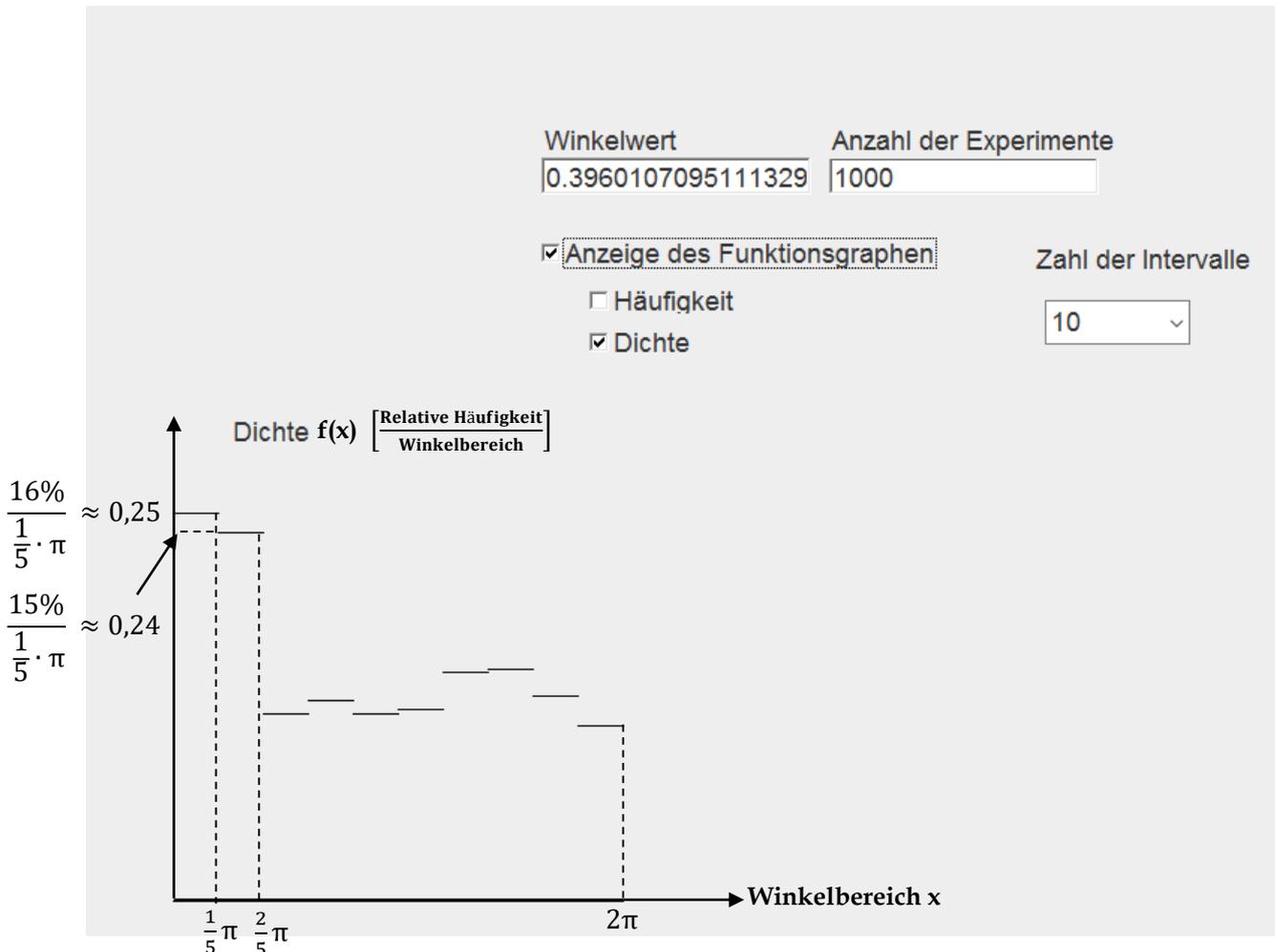
- b) Es wird nun ein manipuliertes Glücksrad mittels eines Computerprogramms simuliert. Dabei wird gezählt, wie oft ein Winkelergebnis in einem bestimmten Winkelbereich erscheint. Für eine Unterteilung des Winkelbereichs $[0; 2\pi]$ in 10 gleich große Intervalle $[0; \frac{1}{5}\pi]$, $[\frac{1}{5}\pi; \frac{2}{5}\pi]$, \dots , $[\frac{9}{5}\pi; 2\pi]$ erhält man zum Beispiel folgendes Darstellung der relativen Häufigkeiten für diese 10 Bereiche.



Gib die relative Häufigkeiten für den Winkelbereich $[\frac{7}{5}\pi; \frac{8}{5}\pi]$, $[\frac{2}{5}\pi; \pi]$ und $[0; 2\pi]$ an.

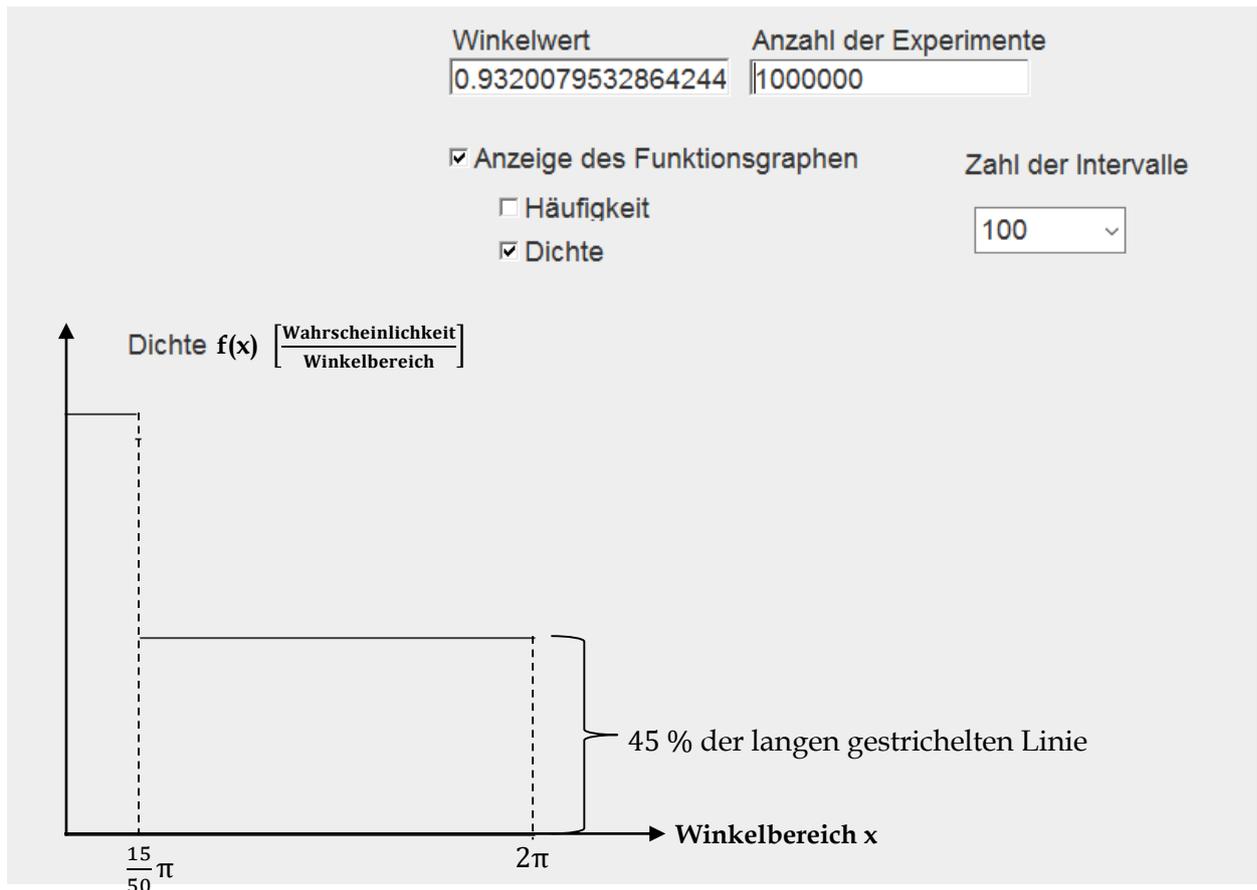
¹ Idee von Michael Rüsing (Essen)

- c) Alternativ können die Ergebnisse auch mit der sogenannten **Dichtefunktion** angezeigt werden. Dabei werden die relative Häufigkeiten von oben durch die Länge der zehn gleichgroßen Intervalle dividiert (in unserem Fall durch $\frac{1}{5}\pi$). Man erhält so einen Grafen einer Funktion mit folgender Darstellung:



Schon nach 1000 Versuchen erkennt man, dass der anfängliche Winkelbereich bis $\frac{2}{5}\pi$ deutlich überrepräsentiert ist.

- (1) **Vervollständige** mithilfe der relativen Häufigkeiten des vorherigen Säulendiagramms in der obigen Grafik die Achseneinträge und die gestrichelten Linien.
 - (2) **Gib** die Bedeutung des Flächeninhalts unterhalb des Grafen der Dichtefunktion und der x-Achse über dem Intervall $[0; 2\pi]$ an.
 - (3) **Ermittle** den Flächeninhalt zwischen Dichtefunktion und x-Achse über dem Intervall $[0; 2\pi]$.
- d) Die Anzahl der Versuche wird nun erhöht. Die Intervalllänge zur Dichtefunktion wird auf $\frac{1}{50}\pi$ verkleinert. Auf der nächsten Seite wird das Ergebnis für 1000000 Versuche angezeigt.
- (1) **Begründe**, warum die Dichtefunktion bei 1000000 Versuchen statt der relativen Häufigkeiten die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten bestimmter Winkelbereiche repräsentiert.
 - (2) **Bestimme** die Funktionsgleichung der Dichtefunktion. **Erläutere** Dein Vorgehen. [Tipp: Der Flächeninhalt zwischen Graf der Dichtefunktion und x-Achse über dem Intervall $[0; 2\pi]$ beträgt 1.]
 - (3) **Interpretiere** das Ergebnis des Zufallsexperiments bei 1000000 Wiederholungen im obigen Sachkontext.



Zur Lösung der nachfolgenden Aufgaben benötigt man einige Definitionen:

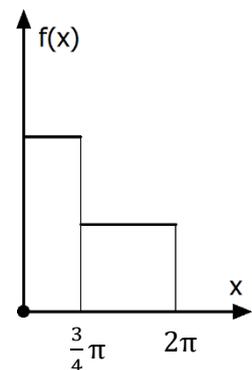
- (1) Eine Funktion f heißt **Wahrscheinlichkeitsdichte** (bzw. **Dichtefunktion**) über einem Intervall $I = [a; b]$, wenn gilt: (1) $f(x) \geq 0$ für alle x aus I und (2) $\int_a^b f(x) dx = 1$.
- (2) Eine reellwertige Zufallsgröße X mit Werten im Intervall I heißt **stetig verteilt mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f** , wenn für alle $c < d$ aus I gilt: $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x) dx$
- (3) Analog zur Definition im diskreten Fall z. B. bei Binomialverteilungen lässt sich festlegen: Für eine stetig verteilte Zufallsgröße X mit Werten zwischen a und b und der Dichtefunktion f gilt:
Erwartungswert: $\mu = E(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx$
Varianz: $V(X) = s^2(X) = \int_a^b [(x - \mu)^2 \cdot f(x)] dx$
Standardabweichung: $\sigma = s(X) = \sqrt{s^2(X)} = \sqrt{\int_a^b [(x - \mu)^2 \cdot f(x)] dx}$



Aufgabe 1 (Manipuliertes Glücksrad 2)

Gegeben ist die Dichtefunktion eines Glücksrads. Dabei sind die Funktionswerte am Anfang doppelt so hoch wie am Ende. Die rechts befindliche Grafik beschreibt den Grafen der Dichtefunktion f .

- a) **Bestimme** die Funktionsgleichung von f .
- b) **Berechne** die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass das Glücksrad im angegebenen Winkelbereich stoppt: (i) $[0; 1]$ (ii) $[1,5; 2,5]$ (iii) $[3; 4]$.





Aufgabe 2 (Glückspiel)

Durch die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} 0,1 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 0,2 & \text{falls } 1 < x < 3 \\ 0,3 & \text{falls } 3 \leq x \leq 4 \\ 0,1 & \text{falls } 4 < x \leq 6 \end{cases}$ ist im Intervall $[0; 6]$ eine Funktion gegeben.

- Skizziere den Funktionsgraphen.
- Weise nach, dass es sich um eine Dichtefunktion handelt.
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis im Intervall $[2; 5]$.
- Ein Glücksspiel werde durch diese Dichtefunktion beschrieben. Der Spieler zahlt einen Einsatz von 1 €. Falls das Ergebnis zwischen 1 und 3 liegt, bekommt er 3 € ausgezahlt. Sollte der Spieler das Spiel akzeptieren? Begründe Deine Antwort.
- Untersuche, bei welchem Gewinn das Spiel aus Teil d) fair wäre.



Aufgabe 3 (Nicht manipuliertes Glücksrad)

Bestimme die Gleichung der Dichtefunktion für ein nicht manipuliertes Glücksrad.



Aufgabe 4 (Herstellung von Metallstiften)

Eine Maschine stellt Metallstifte her, die zur Verbindung zweier Bauteile dienen. Die Produktion ist nicht so perfekt, dass alle Stifte vollkommen gleich ausfallen. Deshalb ist der Durchmesser X (in mm) der Metallstifte eine Zufallsgröße, von der wir annehmen, dass sie die Verteilung mit der Dichte f hat:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 9 \\ a \cdot (x - 9) \cdot (x - 11) & \text{für } 9 \leq x \leq 11 \\ 0 & \text{für } x > 11 \end{cases}$$

- Bestimme den Wert für die Konstante $a \in \mathbb{R}$, so dass f die beiden Bedingungen für eine Wahrscheinlichkeitsdichte erfüllt.
- Stelle die Dichte f grafisch dar.
- Ermittle den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ der Zufallsgröße X .
- Metallstifte, die mehr als 0,6 mm von 10 mm abweichen, sind Ausschuss. Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Stift Ausschuss ist. Stelle die Wahrscheinlichkeit in Deiner Abbildung aus Teil (b) dar.
- Bestimme eine Abweichungsgrenze x , so dass die Wahrscheinlichkeit für den Ausschuss nicht größer als 0,1 wird.



Aufgabe 5 (Ganzrationale Dichtefunktion)

Gegeben ist im Intervall $[0; 2]$ eine Funktion ganzrationale Funktion f dritten Grades durch die Gleichung $f(x) = k \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - x + 0,2$. Bestimme k so, dass es sich um eine Dichtefunktion handelt.



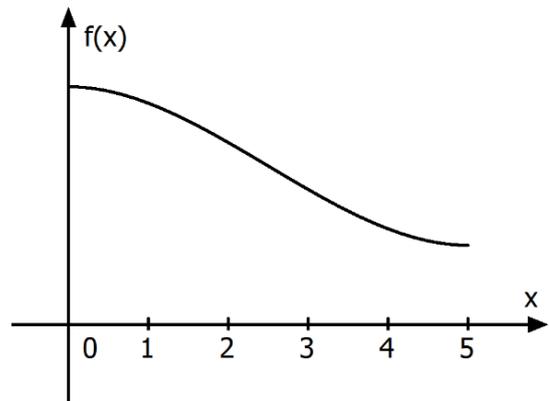
Aufgabe 6 (Dichtefunktion und Steckbriefaufgabe)

- a) Gegeben ist im Intervall $[0; 5]$ der Graf einer ganzrationalen Funktion dritten Grades (Bild rechts). Dabei gelten folgende Bedingungen:

- (1) Der Funktionswert bei $x = 0$ ist dreimal so groß wie bei $x = 5$.
- (2) An den Stellen 0 und 5 ist die Steigung Null.
- (3) Es handelt sich um eine Dichtefunktion.

Bestimme eine Gleichung für die Funktion f .

- b) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis im Intervall $[2; 3]$.



Aufgabe 7 (Dauer von Telefonaten)

Die Dauer X (in min) von Telefonaten in einer Firma wird für $x \geq 0$ ($x \in \mathbb{R}$) durch die Wahrscheinlichkeitsdichte f mit $f(x) = e^{-x}$ beschrieben.

- a) **Begründe:** f ist über \mathbb{R}^+ eine Wahrscheinlichkeitsdichte.
- b) **Berechne** und **deute** $P(1 < X < 2)$.
- c) **Berechne** den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ .
- d) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein Gespräch genau „eine Minute“ dauert, wenn man die Gesprächsdauer auf Minuten bzw. Sekunden bzw. gar nicht rundet? **Begründe.**



Aufgabe 8 (Funktionenschar)²

Betrachte die Funktionenschar $f_{a,b}(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$).

- a) **Bestimme** die Extrem- und die Wendepunkte der Schar.
- b) **Bestimme** die Asymptoten der Schar.
- c) **Stelle** den Grafen zu $f_{0,1}$ sowie $f_{2,1}$ **grafisch dar.**
- d) **Beschreibe** den Einfluss der Parameter a und b auf die Grafen der Schar.

² Aufgabe 8 ist für 1er-Kandidaten. Wer diese Aufgabe lösen kann, ist wirklich fit im Bereich der Kurvenuntersuchung exponentieller Funktionsscharen.

2 Gauß'sche Glockenfunktion und Normalverteilung

Analysis der Gauß'schen Glockenkurve



Aufgabe 1 (Gauß'sche Glockenfunktion)

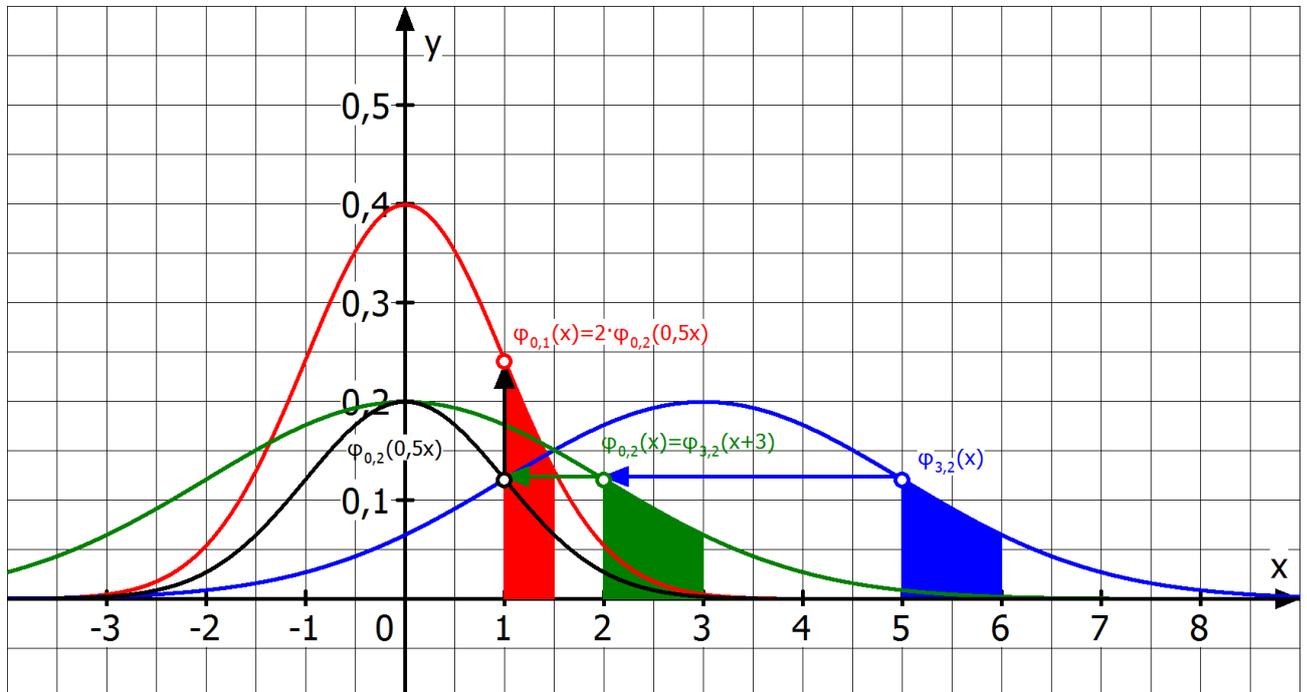
Betrachte die Funktionenschar $\varphi_{\mu,\sigma}$ mit $\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ ($\mu \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0$).

- Untersuche $\varphi_{0,1}$ und $\varphi_{3,2}$ auf Extrem- und Wendepunkte.
- Stelle die Grafen zu $\varphi_{0,1}$ und $\varphi_{3,2}$ mit dem GTR **grafisch dar** und **untersuche**, durch welche einfache Transformationen der Graf von $\varphi_{0,1}$ aus dem Grafen von $\varphi_{3,2}$ hervorgeht. **Vergleiche** Deine Ergebnisse mit der unten befindlichen Abbildung.
- Bestimme $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{0,1}(x) dx$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{3,2}(x) dx$. **Zeige**, dass die $\varphi_{0,1}$ und $\varphi_{3,2}$ Dichtefunktionen sind.
- Transformiere den Grafen von $\varphi_{\mu,\sigma}$ nacheinander mit den Transformationen (1), (2) und (3):
 - Man verschiebt um μ nach links.
 - Man streckt um den Faktor σ in x -Richtung.
 - Man streckt um den Faktor σ in y -Richtung.

Beweise: Das Ergebnis der drei Transformationen ist der Graf von $\varphi_{0,1}$.

- Begründe** mit Hilfe der folgenden Abbildungen, dass folgende Integralgleichheit gilt:

$$\int_5^6 \varphi_{3,2}(x) dx = \int_2^3 \varphi_{0,2}(x) dx = \int_1^{1,5} \varphi_{0,1}(x) dx \text{ und allgemeiner: } \int_a^b \varphi_{3,2}(x) dx = \int_{\frac{a-3}{2}}^{\frac{b-3}{2}} \varphi_{0,1}(x) dx$$



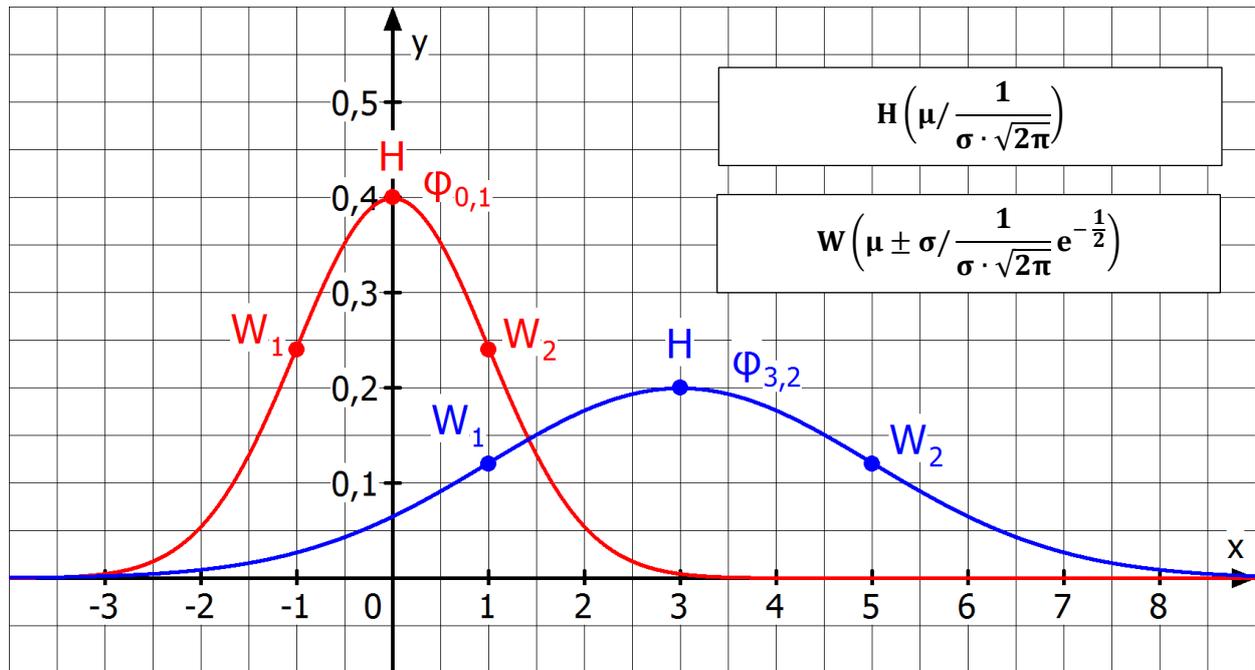
Mit der gleichen Überlegung gilt noch allgemeiner:

$$\int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(x) dx = \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \varphi_{0,1}(x) dx$$

Zeige mit dieser Gleichung und Aufgabenteil b), dass $\varphi_{\mu,\sigma}$ ebenfalls eine Dichtefunktion ist.

Gauß'sche Glockenfunktion

- (1) Die Funktion $\varphi_{\mu,\sigma}$ mit $\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ heißt **Gauß'sche Glockenfunktion**. Sie besitzt eine globale Extremstelle bei $x = \mu$ und die beiden Wendestellen $x = \mu \pm \sigma$.
- (2) Die Funktion $\varphi = \varphi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ wird mit **Standard-Glockenfunktion** bezeichnet.
- (3) Beide Funktionen sind Dichtefunktionen und lassen sich durch einfache Transformationen ineinander überführen: Durch Linksverschiebung des Grafen von $\varphi_{\mu,\sigma}$ um μ und Streckung in y-Richtung mit $\frac{1}{\sigma}$ entsteht der Graf von φ .



Aufgabe 2 (Gauß'sche Glockenfunktion skizzieren)

Skizziere die Grafen der Funktion mithilfe der Hoch- und Wendepunkte des obigen Kastens mit Papier und Bleistift. Erläutere Dein Vorgehen.

- | | | | |
|--------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| a) $\varphi_{0,1}$ | b) $\varphi_{2,1}$ | c) $\varphi_{0,2}$ | d) $\varphi_{-2,1}$ |
| e) $\varphi_{2,4}$ | f) $\varphi_{3,0,5}$ | g) $\varphi_{4,0,2}$ | h) $\varphi_{4,0,1}$ |



Aufgabe 3 (Gauß'sche Glockenfunktion mit GTR zeichnen)

Stelle den Grafen von $\varphi_{2,0,5}$ samt erster und zweiter Ableitung mit dem GTR dar und bestätige die Aussagen aus dem obigen Kasten über die Lage der Extrem- und Wendepunkte.



Aufgabe 4 (Zeit zu überprüfen)

- Bestimme die Hoch- und Wendepunkte von $\varphi_{12,1,5}$ und skizziere den Grafen zu $\varphi_{12,1,5}$.
- Schätze ohne zu rechnen: $\int_{11}^{13} \varphi_{12,1,5}(x) dx$.
- Überprüfe Deine Skizze und Schätzung mit dem GTR.

Normalverteilung

- (1) Eine stetige Zufallsgröße X heißt **normalverteilt** mit den Parametern σ und μ , wenn sie die **Gauß'sche Glockenfunktion** $\varphi_{\mu,\sigma}$ mit $\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ als Dichtefunktion besitzt.
- (2) Der Parameter μ beschreibt den **Erwartungswert** und der Parameter σ die **Standardabweichung** der normalverteilten Zufallsgröße X .
- (3) Die dazugehörige Integralfunktion $\Phi_{\mu,\sigma}$ mit $\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_{\mu,\sigma}(t)dt$ heißt **Verteilungsfunktion** von $\varphi_{\mu,\sigma}$. Im Falle $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ wird sie mit Φ bezeichnet: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_{0;1}(t)dt$. Offenbar gilt: $\int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(t)dt = \Phi_{\mu,\sigma}(b) - \Phi_{\mu,\sigma}(a)$ bzw. $\int_a^b \varphi(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Der **GTR** hat eine Taschenrechnerfunktion für die Berechnung von $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$. Über **OPTN**, **F5** (STAT), **F3** (DIST), **F1** (NORM) findet man sie mit **F1** als **Npd**. Man notiert nach **Npd**(zuerst das Argument x , dann die Standardabweichung σ sowie den Erwartungswert μ : **Npd**(x, σ, μ). (Abb. unten links)

Beispiel: $\varphi_{20;2}(19) \approx 0,176$

Will man das Integral $\int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(t)dt$ berechnen, benötigt man den Befehl **Ncd**, den man analog wie oben **Npd** erhält. Man notiert nach **Ncd**(zuerst die beiden Integrationsgrenzen a und b und dann die Standardabweichung σ sowie den Erwartungswert μ : **Ncd**(a, b, σ, μ). (Abb. unten links)

Beispiel: $\int_{18}^{22} \varphi_{20;2}(x)dx \approx 0,683$.

Über den Befehl **InvN** kann in einem Integral $\int_{-\infty}^b \varphi_{\mu,\sigma}(t)dt$ die obere Grenze b , in $\int_a^{+\infty} \varphi_{\mu,\sigma}(t)dt$ die untere Grenze a bzw. in $\int_{\mu-c}^{\mu+c} \varphi_{\mu,\sigma}(t)dt$ das symmetrische Intervall um den Erwartungswert ausgerechnet werden, wenn der Flächeninhalt (= Integralwert) bekannt ist. Dafür gibt man nach **InvN**(-1 (linkes Intervall: $]-\infty; b]$), +1 (rechtes Intervall: $[a; +\infty[$) bzw. 0 (symmetrisches Intervall um μ : $[\mu - c; \mu + c]$) ein und dann den Flächeninhalt F sowie die Standardabweichung σ und den Erwartungswert μ : **InvN**(-1 oder +1 oder 0, F, σ, μ). (Abb. unten rechts)

Beispiele:

$$\int_{-\infty}^b \varphi_{20;2}(t)dt = 0,25 \stackrel{\text{GTR}}{\Leftrightarrow} b \approx 18,65;$$

$$\int_a^{+\infty} \varphi_{20;2}(t)dt = 0,25 \stackrel{\text{GTR}}{\Leftrightarrow} a \approx 21,35.$$

$$\int_{\mu-c}^{\mu+c} \varphi_{20;2}(t)dt = 0,683 \stackrel{\text{GTR}}{\Leftrightarrow} c \approx 18$$

```

[Math][Rad][Norm] [d/c][Real]
NormPD(19, 2, 20)
0.1760326634
NormCD(18, 22, 2, 20)
0.6826894921
□
Npd Ncd InvN

```

```

[Math][Rad][Norm] [d/c][Real]
InvNormCD(-1, 0.25, 2, 20)
18.6510205
InvNormCD(1, 0.25, 2, 20)
21.3489795
InvNormCD(0, 0.683, 2, 20)
17.99871634
□
Npd Ncd InvN

```

Im **Anwendungsbezug** wird zu einer normalverteilten Zufallsgröße X mit der Standardabweichung σ und dem Erwartungswert μ durch **P**($a \leq X \leq b$) = $\int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(t)dt$ die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass die Zufallsgröße X im Intervall $[a; b]$ liegt.

Beispiel: Das Gewicht G von neugeborenen Kindern sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 3200$ g und der Standardabweichung $\sigma = 800$ g. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind zwischen 3000 und 3200 g schwer ist. Gesucht ist also $P_{\mu=3200; \sigma=800}(3000 \leq G \leq 3200)$. Der GTR liefert $P_{\mu=3200; \sigma=800}(3000 \leq G \leq 3200) \approx 9,87\%$. Fast jedes zehnte Neugeborene ist also zwischen 3000 und 3200 g schwer.

```

[Math][Rad][Norm] [d/c][Real]
NormCD(3000, 3200, 800)
0.09870632568
□
Npd Ncd InvN

```

Grundaufgaben zur Normalverteilung

Sei X normalverteilte Zufallsgröße mit der Standardabweichung σ und dem Erwartungswert μ . Grundaufgaben zur Normalverteilung können durch folgende Tabelle festgelegt werden, wobei „“ eine gegebene Größe und „“ die gesuchte Größe repräsentieren:

Grundaufgabe	1	2	3	4	5
Intervallgrenze a	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Intervallgrenze b	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Standardabweichung σ	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Erwartungswert μ	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Gesamtwahrscheinlichkeit P	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Im Folgenden wird bei der Wahrscheinlichkeit $P_{\sigma,\mu}$ der Index teilweise weggelassen, wenn Standardabweichung σ und Erwartungswert μ beide eindeutig festgelegt wurden. Bevor Du einige Übungsaufgaben erledigst, sollen die fünf Grundaufgaben mit Beispiel und GTR-Anwendung dargestellt werden.

Vollziehe sie unter Nutzung des GTR **nach**. **Notiere** Unklarheiten.

Grundaufgabe 1: Gesamtwahrscheinlichkeit P gesucht

Das Gewicht von neugeborenen Kindern sei normalverteilt mit $\mu = 3200$ g und $\sigma = 800$ g.

Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass das Gewicht eines zufällig ausgewählten Kindes weniger als 3000 g [mehr als 4000 g; zwischen 3000 g und 3400 g] beträgt.

Entscheide begründend, ob es ungewöhnlich ist, wenn ein Kind 2200 g wiegt.

Gegeben: Das Gewicht G sei normalverteilt mit der Standardabweichung $\sigma = 800$ g und dem Erwartungswert $\mu = 3200$.

Gesucht: $P(-\infty \leq G \leq 3000)$; $P(+\infty \geq G \geq 4000)$; $P(3000 \leq G \leq 3400)$; $P(-\infty \leq G \leq 2200)$

Hier kann in MENU 1 gearbeitet werden mit der dem Befehl **NormCD (a, b, σ , μ)**:

```

Math Rad Norm1 d/c Real
NormCD ( 0 , 3000 , 800 , 32 ) ▶
0.4012620031
NormCD ( 4000 , 10000 , 80 ) ▶
0.1586552539
NormCD ( 3000 , 3400 , 800 ) ▶
0.1974126514

Npd Ncd InvN

```

```

Math Rad Norm1 d/c Real
NormCD ( 0 , 2200 , 800 , 32 ) ▶
0.1056181024

Für die unbeschränkten Grenzen
gibt man Werte an, die „weit“ vom
Erwartungswert entfernt liegen
Npd Ncd InvN

```

Es gilt für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten:

$P(G \leq 3000) \approx 40,13\%$; $P(G \geq 4000) \approx 15,87\%$; $P(3000 \leq G \leq 3400) \approx 19,74\%$.

$P(G \leq 2200) \approx 10,56\%$: Es nicht besonders ungewöhnlich, wenn ein Kind 2200 g wiegt, da ca. jedes 10. Kind höchstens 2200 g wiegt.

Grundaufgabe 2: Erwartungswert μ gesucht

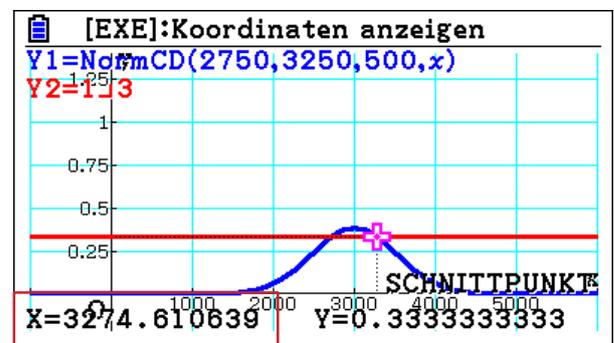
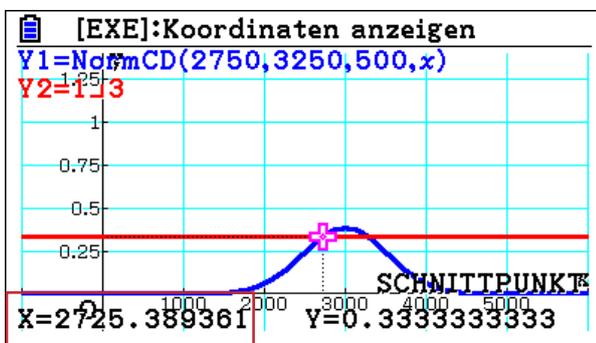
Das Gewicht von neugeborenen Kindern sei normalverteilt mit $\sigma = 500$ g. Jedes dritte Kind hat ein Gewicht zwischen 2750 g und 3250 g.

Ermittle mögliche Erwartungswerte.

Gegeben: Das Gewicht G sei normalverteilt mit der Standardabweichung $\sigma = 500$ g. Es gilt $P_{\sigma=500;\mu}(2750 \leq G \leq 3250) = \frac{1}{3}$.

Gesucht: Mögliche Erwartungswerte μ

Man definiert in MENU 5 unter Y1 die Funktion f mit $f(\mu) = P_{\sigma=500;\mu}(2750 \leq G \leq 3250) = \frac{1}{3}$ sowie unter Y2 die konstante Funktion g mit $g(\mu) = \frac{1}{3}$. Die Schnittstelle beider Funktionen liefert mögliche Erwartungswerte.



Antwortsatz: Mögliche Erwartungswerte sind ca. 2725 g oder 3274 g.

Grundaufgabe 3: Standardabweichung σ gesucht

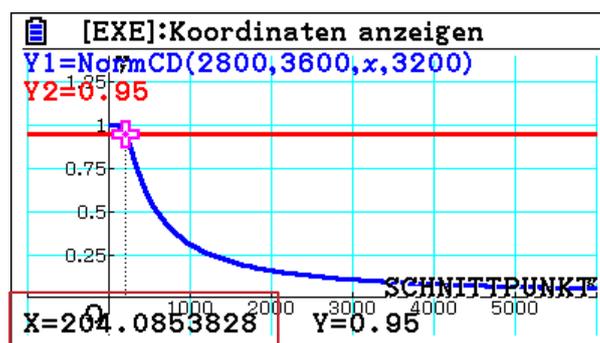
Das Gewicht von neugeborenen Kindern sei normalverteilt mit $\mu = 3200$ g. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % haben die Kinder ein Gewicht zwischen 2800 und 3600 g.

Ermittle die Standardabweichung.

Gegeben: Das Gewicht G sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 3200$. Es gilt dabei $P_{\sigma;\mu=3200}(2800 \leq G \leq 3600) = 0,95$.

Gesucht: Standardabweichung σ .

Auch hier können in MENU 5 über die Terme Y1: NormCD (2800, 3600, x, 3200) und Y2: 0,95 zwei Grafen erstellt werden, deren Schnittstelle die gesuchte Standardabweichung angibt.



Mathematisch exakt ausgedrückt: Die Funktion f mit $f(\sigma) = P_{\sigma; \mu=3200}(2800 \leq G \leq 3600)$ hat mit der Funktion g mit $g(\sigma) = 0,95$ die Schnittstelle $\sigma \approx 204$. Für $\sigma \approx 204$ g gilt aus diesem Grund $P_{\sigma; \mu=3200}(2800 \leq G \leq 3600) = 0,95$

Antwortsatz: Die gesuchte Standardabweichung beträgt ca. 204 g.

Grundaufgabe 4: Eine Intervallgrenze gesucht

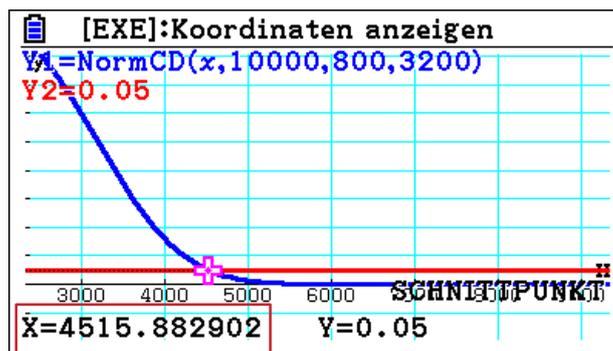
Das Gewicht von neugeborenen Kindern sei normalverteilt mit $\mu = 3200$ g und $\sigma = 800$ g.

Untersuche, wie schwer das Neugeborene mindestens sein, wenn es zu den 5% schwersten Kindern gehört.

Gegeben: Das Gewicht G sei normalverteilt mit der Standardabweichung $\sigma = 800$ g und dem Erwartungswert $\mu = 3200$. Es gilt: $P(G \geq a) = 0,05$.

Gesucht: Intervallgrenze a .

Hier können in MENU 5 über die Terme Y1: NormCD(x, 10000, 800, 3200) und Y2: 0,05 zwei Grafen erstellt werden, deren Schnittstelle die gesuchte Intervallgrenze a angibt.



Mathematisch exakt ausgedrückt: Die Funktion f mit $f(a) = P(G \geq a)$ hat mit der Funktion g mit $g(a) = 0,05$ die Schnittstelle $a \approx 4516$. Für $a \approx 4516$ gilt daher $P(G \geq a) = 0,05$.

Antwortsatz: Ein Neugeborenes muss mindestens 4516 g schwer sein, um zu den 5 % schwersten Kindern zu gehören.

Grundaufgabe 5: Beide Intervallgrenzen gesucht

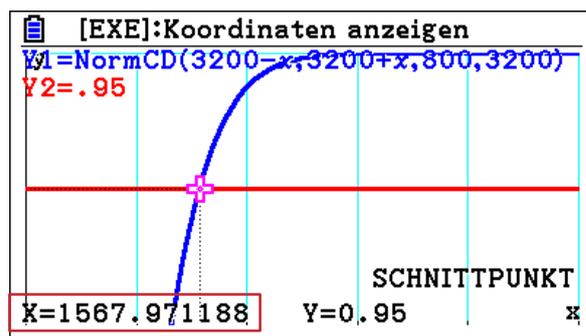
Das Gewicht von neugeborenen Kindern sei normalverteilt mit $\mu = 3200$ g und $\sigma = 800$ g.

Untersuche, in welchem zum Mittelwert symmetrischen Bereich 95% der Neugeborenen liegen.

Gegeben: Das Gewicht G sei normalverteilt mit der Standardabweichung $\sigma = 800$ g und dem Erwartungswert $\mu = 3200$. Es gilt: $P(3200 - a \leq G \leq 3200 + a) = 0,95$.

Gesucht: Intervallgrenzen $3200 - a$ und $3200 + a$.

In MENU 5 können über die Terme Y1: NormCD(3200 - x, 3200 + x, 800, 3200) und Y2: 0,95 zwei Grafen erstellt werden, deren Schnittstellen die gesuchte Intervalllänge angibt.



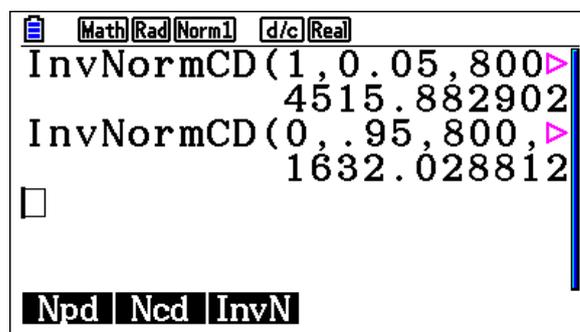
Mathematisch exakt ausgedrückt: Die Funktion f mit $f(x) = P(3200 - x \leq G \leq 3200 + x)$ hat mit der Funktion g mit $g(x) = 0,95$ die Schnittstelle $x \approx 1568$. Es gilt daher für die Wahrscheinlichkeit: $P(1632 \leq G \leq 4768) = 0,95$.

Antwortsatz: 95 % der Neugeborenen liegen im zum Erwartungswert $\mu = 3200$ symmetrischen Intervall $[1632; 4768]$.

Alternativlösungen zu Grundaufgaben 4 und 5 mithilfe von InvN:

Über den Befehl **InvN** kann in bei vorgegebener Wahrscheinlichkeit $P(-\infty \leq G \leq b)$ zur normalverteilten Zufallsgröße G mit bekannter Standardabweichung σ und vorgegebenen Erwartungswert μ die rechte Grenze b , bei $P(a \leq G \leq +\infty)$ die linke Grenze a bzw. bei $P(\mu - c \leq G \leq \mu + c)$ das symmetrische Intervall um den Erwartungswert ausgerechnet werden.

Dafür gibt man nach **InvN**(-1 (linkes Intervall: $]-\infty; b]$), 1 (rechtes Intervall: $[a; +\infty[$) bzw. 0 (symmetrisches Intervall um μ : $[\mu - c; \mu + c]$) ein und dann den Wert für die Wahrscheinlichkeit P sowie die Standardabweichung σ und den Erwartungswert μ : **InvN**(-1 oder +1 oder 0, P , σ , μ). Die Anzeige beim GTR ist folgendermaßen dargestellt:



Aufgabe 5

Die Dicke von Stahlblech sei normalverteilt mit $\mu = 1,75$ mm und $\sigma = 0,03$ mm.

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die Blechdicke im Intervall $[1,70$ mm; $1,80$ mm] liegt.



Aufgabe 6

Die Dauer einer Schwangerschaft ist angenähert normalverteilt und beträgt im Mittel 278 Tage bei einer Standardabweichung von 9,69 Tagen.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Baby bei einer Spontangeburt bereits nach einer Schwangerschaft von weniger als 250 Tagen geboren wird.



Aufgabe 7

Die Körpergröße von Kindern eines Jahrgangs sei normalverteilt mit $\mu = 90$ cm und $\sigma = 8$ cm.

Untersuche, wieviel Prozent dieser Kinder

- (1) höchstens 87 cm groß sind.
- (2) mindestens 86 cm und höchstens 95 cm groß sind.
- (3) 90 cm groß sind bei Rundung auf cm, mm bzw. ohne Rundung.



Aufgabe 8

Die mittlere Brutdauer für Eier in einem Inkubator bei 38° beträgt 21 Tage. Angenommen, die mittlere Brutdauer ist angenähert normalverteilt bei einer Standardabweichung von einem Tag.

- a) **Ermittle** die Wahrscheinlichkeit, dass die Brutdauer eines zufällig ausgewählten Eies ...
 - (1) weniger als 20 Tage beträgt.
 - (2) mehr als 22 Tage beträgt.
 - (3) zwischen 19 und 21 Tagen beträgt.
- b) **Beurteile**, ob es ungewöhnlich ist, wenn ein Küken nach 18 Tagen geschlüpft ist, wenn die Brutdauer auf Tage gerundet wird.



Aufgabe 9

Die Lebensdauer eines Laptops sei normalverteilt mit einem Erwartungswert von 42 Monaten und einer Standardabweichung von 12 Monaten.

- a) Die Garantiezeit beträgt 18 Monate, d. h. der Hersteller führt in dieser Zeit anfallende Reparaturen kostenlos durch. Für jede Reparatur kalkuliert der Hersteller Kosten in Höhe von 250 €.

Untersuche, mit welchen Kosten pro verkauftem Computer der Hersteller rechnen muss.

- b) Der Hersteller möchte die Garantiezeit so ausdehnen, dass 5% mehr Kunden in den Genuss der Garantie kommen.

Ermittle die Dauer der neuen Garantiezeit.



Aufgabe 10³

Nach dem Handbuch des Institutes zur Förderung hochbegabter Vorschulkinder ist der Intelligenzquotient in der Bevölkerung normalverteilt mit $\mu = 100$. 68,3% der Bevölkerung hat einen Intelligenzquotienten zwischen 85 und 115.

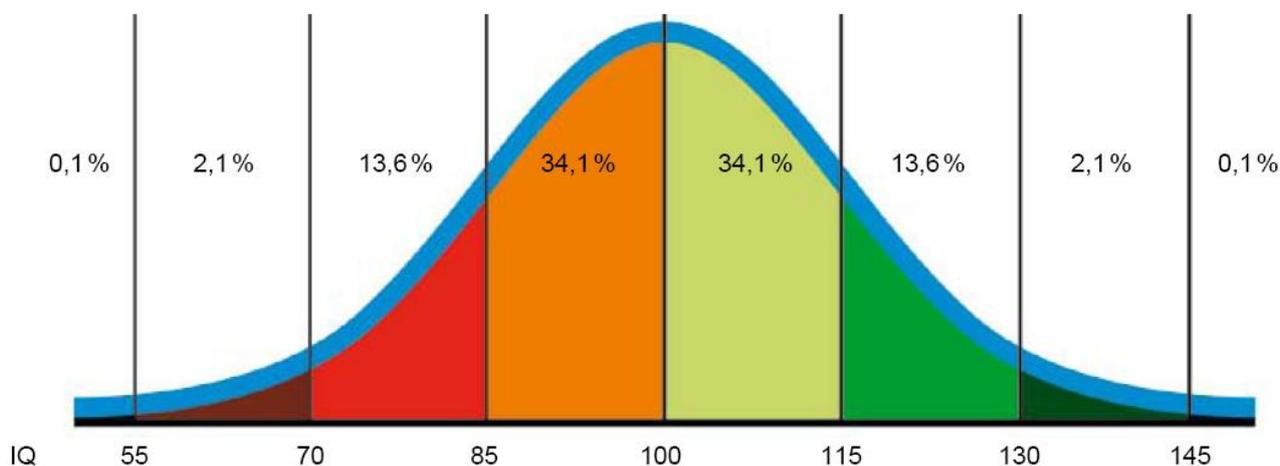
- a) **Bestimme** aus den Angaben die Standardabweichung der Normalverteilung.
- b) **Ermittle** das a mit $P(\mu - a \leq G \leq \mu + a) = 0,95$ und **formuliere** das Ergebnis in Worten.

³ In Anlehnung an Aufgabe aus Fokus Mathematik LK in NRW (S. 91) und www.mued.de (st-18-10)

- c) Nach Angaben des statistischen Bundesamtes gingen 34 % eines Jahrganges von der Grundschule ins Gymnasium über. Angenommen (was bekanntermaßen nicht der Fall ist!) bei diesen 34 % handelt es sich um die Kinder mit dem höchsten Intelligenzquotienten.

Untersuche, welches der kleinsten IQ wäre, der an einem Gymnasium anzutreffen wäre.

Die folgende Abbildung⁴ stellt die obige Normalverteilung grafisch dar.



- d) **Prüfe** bei allen angegebenen Wahrscheinlichkeitsdaten, ob sie zur Normalverteilung aus den Aufgabenteilen a) bis c) passen.
- e) **Untersuche**, wie häufig „durchschnittliche Intelligenz“ ist.
- f) **Prüfe**, ob die Angaben zu „bis 130“ und „über 130“ passen.
- g) In einer Klasse finden sich IQ-Werte zwischen 105 und 125.
Untersuche, wie viel Prozent der Bevölkerung sie in diesem Bereich liegen.
- h) **Stelle** die obige Normalverteilung mit dem GTR dar.

ABITUR 2017 Auszug aus LK HT B5⁵

- d) Die Indikatormenge auf den Teststreifen ist normalverteilt mit einem Erwartungswert von 20 mg und einer Standardabweichung von 4,0 mg. Ein Teststreifen ist unbrauchbar, wenn die Indikatormenge auf dem Teststreifen kleiner als 15 mg ist.

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teststreifen unbrauchbar ist.*

[Kontrolllösung: 10,56 %]

(2) Durch eine Verbesserung konnte die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Teststreifen aufgrund der Indikatormenge unbrauchbar ist, halbiert werden. Der Erwartungswert für die Indikatormenge blieb dabei unverändert.

Bestimmen Sie die geänderte Standardabweichung durch systematisches Probieren auf eine Nachkommastelle genau.

⁴ maßstäbe (PTB Physikalisch Technische Bundesanstalt), Heft 11: Mai 2011, Seite 54

⁵ Auszug aus einer Abituraufgabe des Landes NRW 2017 LK HT B5

3 Kontrollaufgaben

Kompetenzraster

Ohne Hilfsmittel

Ich kann ...	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
zeigen, dass eine Funktion eine Dichtefunktion ist.	1a, 2a				
den Erwartungswert für ein Glücksspiel berechnen.	1b				
eine Auszahlungsverteilung für ein faires Spiel angeben.	1b				
Wahrscheinlichkeiten mittels Dichtefunktion und Integralen berechnen.	2b				
zeigen, dass eine zusammengesetzte Funktion Stammfunktion ist.	2b				
den Erwartungswert einer Zufallsgröße mittels Integral zu berechnen.	2b				
die Standardabweichung einer Zufallsgröße mittels Integral berechnen.	2b				

Unter Zuhilfenahme von Hilfsmitteln

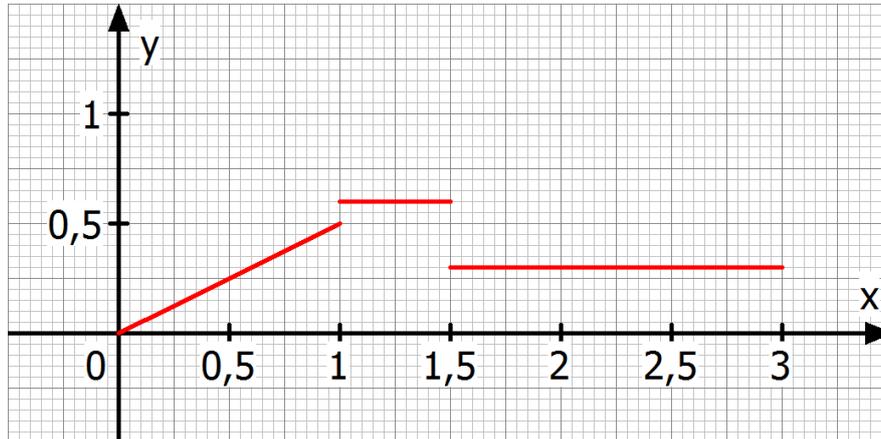
Ich kann ...	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
zeigen, dass eine Funktion eine Dichtefunktion ist.	3a				
Wahrscheinlichkeiten mittels Dichtefunktion und Integralen berechnen.	3b				
den Erwartungswert einer Zufallsgröße mittels Integral zu berechnen.	3c				
die Standardabweichung einer Zufallsgröße mittels Integral berechnen.	3c				
einen Parameter k bestimmen, damit eine Funktion Dichtefunktion ist.	3d				
die Standardabweichung einer normalverteilten Zufallsgröße berechnen (G3).	4a				
Wahrscheinlichkeiten einer normalverteilten Zufallsgröße berechnen (G1).	4b				
ein symmetrisches Intervall um den Erwartungswert bestimmen (G5).	4c				
eine Intervallgrenze einer normalverteilten Zufallsgröße bestimmen (G4).	4d,e				
den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsgröße berechnen (G2)	4f				
eine Normalverteilung grafisch mit dem GTR darstellen.	4g				



Hilfsmittelfreie Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} 0,5x & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 0,6 & \text{falls } 1 < x \leq 1,5 \\ 0,3 & \text{falls } 1,5 < x \leq 3 \end{cases}$.



- Zeige**, dass f über $[0; 3]$ eine Dichtefunktion ist.
- Ein Spielautomat, der eine Zahl zwischen 0 und 3 anzeigt, wird durch die obige Dichtefunktion simuliert. Der Einsatz pro Spiel beträgt 1 €. Im Falle einer Zahl $0 \leq x \leq 1$ zahlt der Automat 2 € aus, d. h. der Spieler gewinnt 1 €. Im Falle $1 < x \leq 1,5$ geht der Einsatz verloren. Kommt eine Zahl $1,5 < x \leq 3$ erhält der Spieler seinen Einsatz zurück.
 - Weise nach**, dass das Spiel unfair ist.
 - Gib** eine Auszahlungsverteilung **an**, die ein faires Spiel ermöglicht.

Aufgabe 2

Gegeben ist für $0 \leq x \leq +\infty$ und $k > 0$ die Funktion f mit $f_k(x) = ke^{-kx}$.

- Zeige**, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte (Dichtefunktion) ist.
- X_k sei die Zufallsgröße mit der Dichtefunktion f_k .
 - Gib** Terme an für $P(X_2 < 2)$ und für $P(X_2 \geq 3)$.
 - Zeige**, dass $G_k(x) = \left(-x - \frac{1}{k}\right) \cdot e^{-kx}$ eine Stammfunktion zu $g_k(x) = x \cdot ke^{-kx}$ ist.
 - Weise** mit (2) und der Formel für den Erwartungswert⁶ nach, dass $\mu = \mu(X_k) = \frac{1}{k}$.
 - Zeige**, dass $S_k(x) = \left(-x^2 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot e^{-kx}$ eine Stammfunktion zu $s_k(x) = \left(x - \frac{1}{k}\right)^2 \cdot ke^{-kx}$ ist.
 - Weise** mit (3), (4) und der Formel für die Standardabweichung⁷ nach, dass $\sigma = \sigma(X_k) = \frac{1}{k}$.

⁶ $\mu = \int_a^b [x \cdot f(x)] dx$

⁷ $\sigma = \sqrt{\int_a^b [(x - \mu)^2 \cdot f(x)] dx}$



Aufgaben unter Zuhilfenahme des GTR

Aufgabe 3

Niki wirft Münzen so, dass sie möglichst nahe an der Wand zu liegen kommen. Die Münzen prallen aber oft ab und rollen zurück. Der Abstand X (in Metern) von der Wand ist eine Zufallsgröße, die man mithilfe der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$ über $[0; 1]$ beschreiben kann.

- Begründe**⁸ rechnerisch, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte über $[0; 1]$ ist.
- Bestimme**⁹ (gerne unter Zuhilfenahme des GTR) die Wahrscheinlichkeit, dass eine Münze weniger als 0,1 m von der Wand liegen bleibt.
- Für den **Erwartungswert** μ und **Standardabweichung** σ der stetig verteilten Zufallsgröße X mit Werten zwischen a und b und der Dichtefunktion f gilt allgemein:

$$\mu = \int_a^b [x \cdot f(x)] dx \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{\int_a^b [(x - \mu)^2 \cdot f(x)] dx}$$

Bestimme unter Zuhilfenahme des GTR den Erwartungswert μ und Standardabweichung σ des Abstandes X des obigen Münzwurfs.

- Gegeben sei die Funktion g mit $g(x) = k \cdot (x - x^3)$ mit dem konstanten Faktor k .
Untersuche, wie der Parameter k gewählt werden muss, damit g eine Dichtefunktion über dem Intervall $[0; 1]$ wird.

Aufgabe 4

Eine Bekleidungsfirma geht davon aus, dass die Körpergröße junger Frauen normalverteilt ist mit einem Erwartungswert $\mu = 166$ cm. Die Körpergröße von 95 % der Frauen liegt zwischen 179 cm und 153 cm.

- Ermittle** die Standardabweichung σ dieser Normalverteilung. [Kontrollergebnis: $\sigma \approx 6,63$ cm]
- Berechne** den für eine Körpergröße von 153 cm bis 156 cm ausgelegte Warenanteil.
- Untersuche**, in welchem symmetrischen Intervall um den Erwartungswert die Körpergröße von 50 % der Frauen liegt.
- Bestimme** die Mindestkörpergröße einer Frau, die zu den 5 % größten Frauen gehört.
- Untersuche**, mit welcher Höchstkörpergröße eine Frau zu 10 % kleinsten Frauen zu zählen ist.
- Untersuche**, welcher Erwartungswert einer normalverteilten Verteilung der Körpergrößen vorgelegen haben könnte, wenn bei gleicher Standardabweichung 95 % der Frauen zwischen 180 cm und 154 cm groß wären.
- Stelle** die obigen Normalverteilungen **grafisch dar**.

⁸ Hier muss neben dem Ansatz eine Rechnung angegeben werden.

⁹ Hier darf nach Angabe des Ansatzes der GTR benutzt werden.

Lösungen

1 Stetige Zufallsgrößen - Integrale besuchen die Stochastik

Erkundungen: a) Die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Winkel zwischen 0 und 2π zu drehen, beträgt Null, da es überabzählbar viele Zahlen zwischen 0 und 2π gibt.

b) (1) Für die Werte auf der y -Achse dividiert man die relativen Häufigkeiten für die zehn Winkelbereiche jeweils durch $\frac{1}{5}\pi$. Auf der x -Achse werden alle Vielfachen von $\frac{1}{5}\pi$ markiert, bis man zu 2π gelangt. (2) Die Flächen unter dem Grafen gibt die relativen Häufigkeiten für den entsprechenden Winkelbereich an. (3) Der Flächeninhalt zwischen Graf der Dichtefunktion und der x -Achse über dem Intervall $[0; 2\pi]$ beträgt $100\% = 1$.

c) (1) Gemäß dem Gesetz der großen Zahlen nähern sich die relativen Häufigkeiten für große n der tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten an. (2) Die Dichtefunktion hat folgenden Gleichung:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{15}{50}\pi \\ 0,45 \cdot a & \text{falls } \frac{15}{50}\pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Ferner beträgt der Flächeninhalt zwischen Graf und x -Achse über dem Intervall 0 bis 2π gleich 1 . Also gilt: $a \cdot \frac{15}{50}\pi + 0,45 \cdot a \cdot \frac{85}{50}\pi = 1 \Leftrightarrow \frac{213}{200} \cdot a \cdot \pi = 1 \Leftrightarrow a = \frac{200}{213\pi} \approx 0,3$ und $0,45 \cdot a \approx 0,135$.

(3) Zahlen aus dem Winkelbereich 0 bis $\frac{15}{50}\pi$ werden deutlich häufiger gedreht wie Zahlen aus dem übrigen Winkelbereich. Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 28% stammt eine Zahl aus dem deutlich kleineren Winkelbereich 0 bis $\frac{15}{50}\pi$.

1a) Die Fläche unter der Treppenfunktion muss genau 1 betragen. Mit den dargestellten Bezeichnungen ergibt sich:

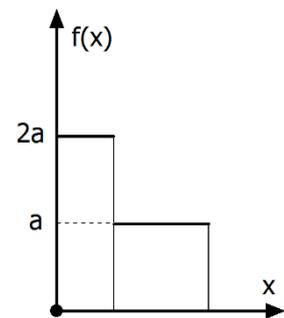
$$\frac{3}{4}\pi \cdot 2a + \frac{5}{4}\pi \cdot a = 1 \Leftrightarrow \frac{11}{4}\pi a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{4}{11\pi} \text{ und damit die Funktion } f \text{ mit}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{11\pi} \approx 0,23 & \text{für } 0 < x \leq \frac{3}{4}\pi \approx 2,36 \\ \frac{4}{11\pi} \approx 0,115 & \text{für } \frac{3}{4}\pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

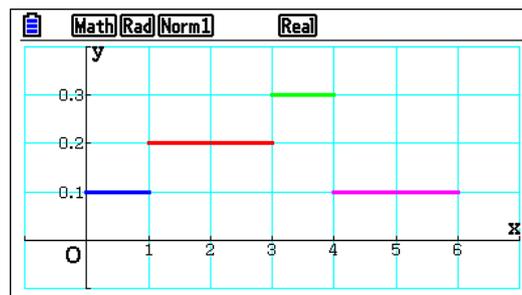
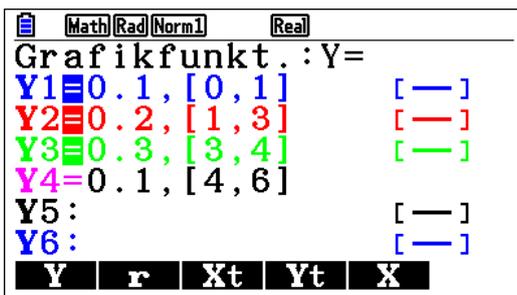
$$\mathbf{1b) (i)} P(0 \leq X \leq 1) = \frac{8}{11\pi} \cdot 1 = \frac{8}{11\pi} \approx 0,231$$

$$(ii) P(1,5 \leq X \leq 2,5) = \frac{8}{11\pi} \cdot \left(\frac{3}{4}\pi - 1,5\right) + \frac{4}{11\pi} \cdot \left(2,5 - \frac{3}{4}\pi\right) \approx 0,215$$

$$(iii) P(3 \leq X \leq 4) = \frac{4}{11\pi} \cdot 1 = \frac{4}{11\pi} \approx 0,116$$



2a) Treppenfunktion skizzieren



2b) Bedingungen für Dichtefunktion prüfen:

(I) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0; 6]$ (klar) und (II) $\int_0^6 f(x)dx = 1$ gilt? Nachrechnen:

$$\int_0^6 f(x)dx = 0,1 \cdot 1 + 0,2 \cdot 2 + 0,3 \cdot 1 + 0,1 \cdot 2 = 1.$$

2c) $P(2 \leq X \leq 5) = 0,2 \cdot 1 + 0,3 \cdot 1 + 0,1 \cdot 1 = 0,6$

2d) Erwartungswert für den Gewinn gesucht. Gewinntabelle:

Ergebnis	$0 \leq x \leq 1$	$1 < x < 3$	$3 \leq x \leq 4$	$4 < x \leq 6$
Gewinn in €	-1	2	-1	-1

Damit ergibt sich für den Erwartungswert

$\mu = (-1) \cdot 0,1 \cdot 1 + 2 \cdot 0,2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0,3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0,1 \cdot 2 = 0,2$. Da $\mu > 0$ ist auf lange Sicht, ist der Spieler im Vorteil.

2e) Das Spiel ist fair, wenn $\mu = 0$ ist. Man setzt den Gewinn auf den Wert g und erhält die folgende Gewinntabelle:

Ergebnis	$0 \leq x \leq 1$	$1 < x < 3$	$3 \leq x \leq 4$	$4 < x \leq 6$
Gewinn in €	-1	g	-1	-1

Es ergibt sich die Gleichung:

$0 = (-1) \cdot 0,1 \cdot 1 + g \cdot 0,2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0,3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0,1 \cdot 2 \Leftrightarrow 0,4 \cdot g = 0,6 \Leftrightarrow g = \frac{3}{2}$. Bei einem Gewinn von 1,50 €, also bei einer Auszahlung von 2,50 €, wäre das Spiel fair.

3) Die Dichtefunktion ist eine Konstante $f(x) = k > 0$ mit $\int_0^{2\pi} k \, dx = 1 \Leftrightarrow 2\pi k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2\pi}$

4a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) \geq 0$, wenn $a < 0$ ist. Mit

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1$ erhält man den Wert für a :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx \Leftrightarrow a \int_9^{11} [(x-9)(x-11)] \, dx = -\frac{4}{3}a$$

Daraus folgt $a = -0,75$

4b) Dichte und Verteilungsfunktion (Bild rechts)

4c) Erwartungswert und Standardabweichung dürfen mit der Integralfunktion des GTR berechnet werden.

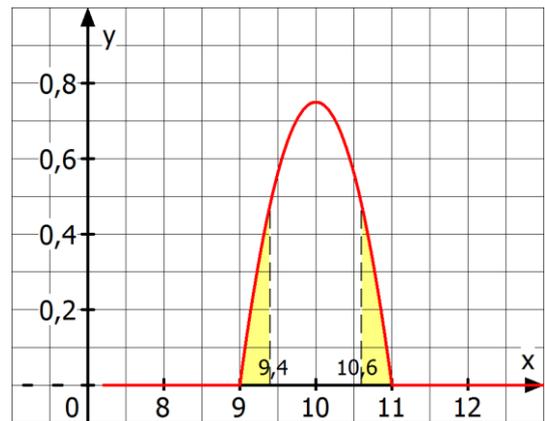
Für den Erwartungswert erhält man mit der Definition im Kasten: $\mu = \int_9^{11} [x \cdot f(x)] \, dx = 10$

Den Erwartungswert setzt man in die Formel für die

Standardabweichung ein: $s(X) = \sqrt{\int_9^{11} [(x-\mu)^2 \cdot f(x)] \, dx} = \sqrt{0,2} \approx 0,447$.

4d) $P(\text{Ausschuss}) = P(x < 9,4) + P(x > 10,6) = \int_9^{9,4} f(x) \, dx + \int_{10,6}^{11} f(x) \, dx = 0,104 + 0,104 = 0,208$

4e) Wird die maximale zulässige Abweichung mit m bezeichnet, muss z. B. mit dem GTR (über MENU 5) die Gleichung $\int_{10-m}^{10+m} f(x) \, dx \geq 0,9$ gelöst werden¹⁰. Es ergibt sich $m = 0,729$.



Math Rad Norm1 Real

Grafikfunkt.: Y=

Y4: [-]

Y5: $\int_{10-x}^{10+x} -0,75 \cdot (x - [-])$

Y6: [-]

Y7: [-]

Y8: [-]

[SELECT] [DELETE] [TYPE] [TOOL] [MODIFY] [DRAW]

Math Rad Norm1 Real

Y-Wert eingeben

Y: 0.9

[EXE]: Koordinaten anzeigen

Y5=f(-0.75x(x-9)x(x-11),10-x,10+x)

X=0.7292992757 Y=0.91

X-BEREICH

5) $\int_0^2 f(x) \, dx = \left[\frac{k}{4} \cdot x^4 + \frac{2}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 0,2x \right]_0^2 = 1 \Leftrightarrow 4k + \frac{16}{3} - 2 + 0,4 = 1 \Leftrightarrow k = -\frac{41}{60}$

¹⁰ Der GTR versteht nur den Ausdruck $\int_{10-x}^{10+x} f(x) \, dx$ mit der doppelten Variablenbelegung von x .

6a) Ansatz einer ganzrationalen Funktion dritten Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Die Bedingungen lauten: (1) $f(0) = 3k$; (2) $f'(0) = 0$; (3) $f(5) = k$; (4) $f'(5) = 0$; (5) $\int_0^5 f(x)dx = 1$. Man erhält das folgende 5x5-LGS: (1) $d - 3k = 0$; (2) $c = 0$; (3) $125a + 25b + 5c + d - k = 0$; (4) $75a + 10b + c = 0$; (5) $\frac{625}{4}a + \frac{125}{3}b + 12,5c + 5d = 1$. Mithilfe des GTR folgt: $a = \frac{2}{625}$; $b = -\frac{3}{125}$; $c = 0$; $d = \frac{3}{10}$; $k = 0,1$.
Damit folgt $f(x) = \frac{2}{625}x^3 - \frac{3}{125}x^2 + \frac{3}{10}$.

6b) Mit dem GTR folgt: $P(2 \leq x \leq 3) = \int_2^3 f(x) dx = \frac{1}{5}$

7a) $e^{-x} > 0$ und $\int_0^R e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^R = -e^{-R} - (-e^0) = 1 - e^{-R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 1$

7b) $P(1 < X < 2) = \int_1^2 f(x) dx = e^{-1} - e^{-2} \approx 0,2325$ Mit ca. 23%iger Wahrscheinlichkeit dauert ein Gespräch zwischen einer und zwei Minuten.

7c) Mit dem GTR (jeweils große Zahl für obere Grenze einsetzen) folgt $\mu = \int_0^{+\infty} [x \cdot f(x)] dx = 1$ und $\sigma = \sqrt{\int_0^{+\infty} [(x - \mu)^2 \cdot f(x)] dx} = 1$

7d) Es ergeben sich mit dem GTR folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$\int_{0,5}^{1,5} e^{-x} dx \approx 0,3834; \int_{1-\frac{1}{60}}^{1+\frac{1}{60}} e^{-x} dx \approx 0,0122 \text{ und } \int_1^1 e^{-x} dx = 0.$$

8a) Zur Ermittlung der **Extremstellen** berechnet man zunächst die Nullstellen der ersten Ableitung. Nach der Ketten- und Faktorregel gilt:

$$f_{a,b}'(x) = \frac{1}{b \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{x-a}{b}\right) \cdot \frac{1}{b}\right) = -\frac{x-a}{b^3 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

Wegen $f'(x) < 0$ für $x > a$ und $f'(x) > 0$ für $x < a$, liegt bei $x = a$ ein VZW von f von + nach - vor.

Insgesamt erhält man wegen $f(a) = \frac{1}{b \cdot \sqrt{2\pi}}$ und $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{b \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} \right] = 0$ den globalen HP $\left(a \mid \frac{1}{b \cdot \sqrt{2\pi}}\right)$.

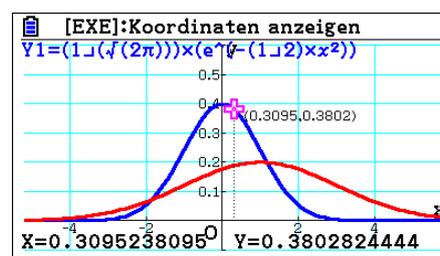
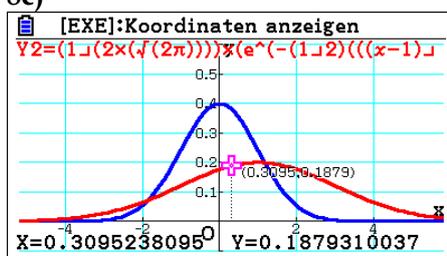
Zur Bestimmung der **Wendestellen** berechnet man zunächst die Nullstellen der zweiten Ableitung. Mit der Produkt-, Faktor- und Kettenregel gilt:

$$f_{a,b}''(x) = \frac{-1}{b^3 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} + \left(-\frac{x-a}{b^3 \cdot \sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x-a}{b^2}\right) = \left(\frac{-b^2 + (x-a)^2}{b^5 \cdot \sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} = 0$$

$\Leftrightarrow -b^2 + (x-a)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-a)^2 = b^2 \Leftrightarrow x-a = b$ oder $x-a = -b \Leftrightarrow x = a \pm b$. Man prüft einen VZW der zweiten Ableitung bei $a \pm b$ nach, indem man z. B. $x = a - 2b$, $x = a$ und $x = a + 2b$ in die zweite Ableitung einsetzt: $f_{a,b}''(a - 2b) > 0$; $f_{a,b}''(a) < 0$; $f_{a,b}''(a + 2b) > 0$. Es liegen also der Li-Re-WP $WP_1\left(a - b \mid \frac{1}{b \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}\right)$ und der Re-Li-WP $WP_2\left(a + b \mid \frac{1}{b \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}\right)$ vor.

8b) Die Asymptote ist die x-Achse.

8c)



8d) Der Parameter a verschiebt den Grafen nach rechts. Der Parameter b streckt die Parabel in x - und y -Richtung (je kleiner b , desto größer ist die Streckung in x und y -Richtung).

2 Gauß'sche Glockenfunktion und Normalverteilung

5 $P(1,70 \leq X \leq 1,80) \approx 0,9044$

6 $P(X \leq 250) \approx 0,002$. Spontane Geburten innerhalb der ersten 250 Tage sind also sehr selten.

7 a) $P(X \leq 87) \approx 0,3538$

b) $P(86 \leq X \leq 95) \approx 0,4255$

c) $P(89,5 \leq X \leq 90,5) \approx 0,05$; $P(89,95 \leq X \leq 90,05) \approx 0,005$; $P(X = 90) = 0$

8a) (1) $P(X < 20) \approx 0,1587$

(2) $P(X > 22) = 1 - P(X \leq 22) \approx 0,1587$

(3) $P(19 \leq X \leq 21) = P(X \leq 21) - P(X < 19) \approx 0,47725$

b) $P(17,5 \leq X \leq 18,5) \approx 0,006$. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis beträgt ca. 0,6 %, daher ist es ungewöhnlich.

9 a) $P(X \leq 18) \approx 0,0225$. Erwartete Kosten: $E(X) = 0,0225 \cdot 250 \text{ €} \approx 5,63 \text{ €}$.

b) $P(X \leq x) = 0,0225 + 0,05 = 0,0725 \Rightarrow x \approx 24,5$. Daher müsste die Garantiezeit auf 25 Monate ausgedehnt werden.

10a) $\mu = 100$; $\sigma = 15$

b) $P(70,60 \leq G \leq 129,4) = 0,95$ (über InvNormCD (0,0.95,15,100)). 95 % der Menschen haben einen Intelligenzquotienten zwischen 70 und 130

c) Gesucht ist das kleinste a mit $P(G \geq a) \leq 0,34$. (über InvNormCD (1,0.34,15,100) lösen) Man erhält für $a \geq 106$ $P(G \geq a) \leq 0,34$. Der „Aufnahme-IQ“ müsste mindestens 106 betragen, damit die „intelligentesten“ 34 % zum Gymnasium gingen.

d) X: Zahl des IQ (Verwende NormCD (untere Grenze, obere Grenze, Standardabweichung, Erwartungswert))

$P(X \leq 55) \approx 0,13 \%$; $P(X \leq 70) \approx 0,0228 \approx 2,28 \%$ und $P(55 \leq X \leq 70) \approx 2,15 \%$

$P(X \leq 85) \approx 15,87 \%$ und $P(70 \leq X \leq 85) \approx 13,59 \%$; $P(X \leq 100) \approx 50 \%$ und $P(85 \leq X \leq 100) \approx 34,13 \%$

$P(X \leq 115) \approx 84,13 \%$ und $P(100 \leq X \leq 115) \approx 34,13 \%$; $P(X \leq 130) \approx 97,72 \%$ und $P(115 \leq X \leq 130) \approx$

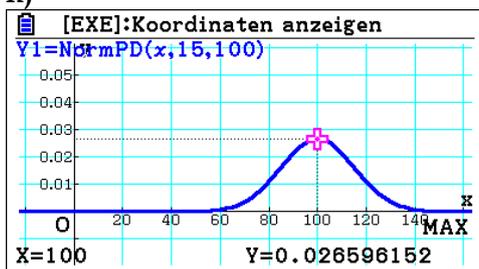
$13,59 \%$; $P(X \leq 145) \approx 99,87 \%$ und $P(130 \leq X \leq 145) \approx 2,15 \%$; $P(X > 145) = 1 - P(X \leq 145) \approx 1 - 99,87 \%$ $\approx 0,13 \%$. Die angegebenen Prozentsätze passen.

e) $P(85 \leq X \leq 115) = 2 \cdot 34,1 \% = 68,2 \%$. „Normal intelligent“ sind rund 68 % der Bevölkerung, häufig gerundet zu $\frac{2}{3}$ oder 70 %.

f) $P(115 \leq X \leq 130) = 13,6 \%$. Das sind „knapp 14 %“. $P(X > 130) \approx 2,1 \% + 0,1 \% \approx 2,2 \%$. Das liegt „nur etwas über 2 %“.

g) $P(105 \leq X \leq 125) \approx 32,32 \%$ Knapp $\frac{1}{3}$ der Bevölkerung hat einen IQ-Wert zwischen 105 und 125.

h)

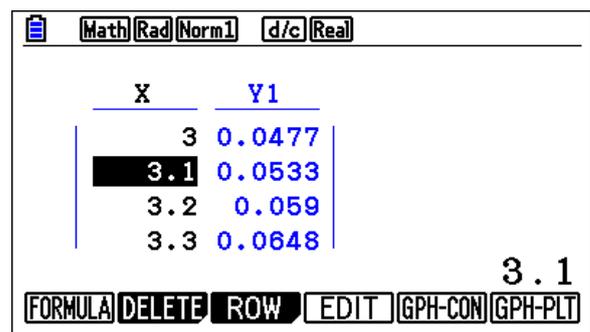
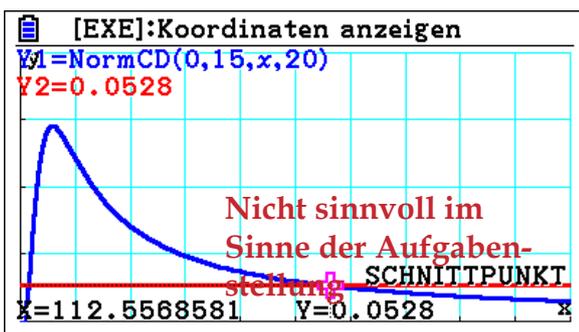
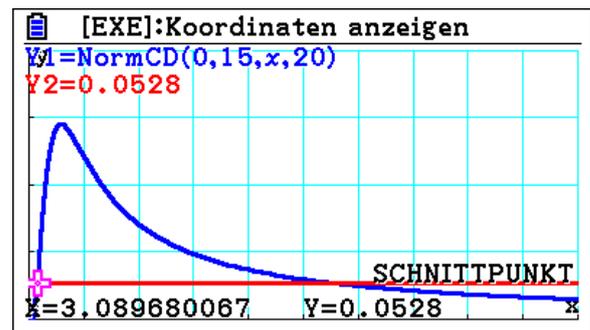
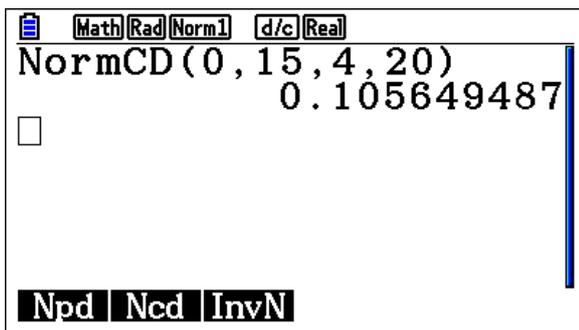


Abituraufgabe

d) (1): Die Zufallsgröße Z beschreibt die Indikatormenge auf einem Teststreifen in mg. Für einen Erwartungswert von 20 mg und eine Standardabweichung von 4,0 mg gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P(Z < 15) \approx 10,56\%$.

(2): Man definiert die Funktion f mit $f(\sigma) = P_{\sigma; \mu=20}(Z < 15)$ sowie die konstante Funktion g mit $g(\sigma) = 0,0528$. Die Schnittstelle beider Funktionen liefert die gesuchte Standardabweichung von $\sigma \approx 3,1$ mg. Alternativ (im Sinne der Aufgabenstellung) kann auch mit einer Wertetabelle (MENU 7) gearbeitet werden, in der bei der Funktion f der Wert für σ variiert wird.

Die dazugehörigen GTR-Eingaben werden durch folgende Abbildung dokumentiert:



3 Kontrollaufgaben

Ohne GTR

Aufgabe 1

a) Die Fläche unter dem Grafen der Dichtefunktion über dem Intervall $[0; 3]$ lässt sich in ein Dreieck und zwei Rechtecke zerlegen. Für die Gesamtwahrscheinlichkeit gilt: $P[0; 3] = P[0; 1] + P[1; 1,5] + P[1,5; 2] = 0,25 + 0,3 + 0,45 = 1$.

b) (1) Für den zu erwartenden Gewinn gilt $\mu = 0,25 \cdot 1 + 0,3 \cdot (-1) + 0,45 \cdot 0 = -0,05$. Daher ist das Spiel unfair.

$$(2) 0,25 \cdot a + 0,3 \cdot (-1) + 0,45 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow a = 1,2$$

Aufgabe 2

$$a) \int_0^{+\infty} ke^{-kx} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} [-e^{-kx}]_0^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} (-e^{-kR} + 1) = 1$$

Gegeben ist für $0 \leq x \leq +\infty$ und $k > 0$ die Funktion f mit $f_k(x) = ke^{-kx}$.

$$b) (1) \int_0^2 2e^{-2x} dx = -e^{-4} + 1 \approx 98,17\%$$

$$\int_3^{+\infty} 2e^{-2x} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} [-e^{-2x}]_3^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} (-e^{-2R} + e^{-6}) = e^{-6} \approx 0,25\%$$

$$(2) G_k(x) = \left(-x - \frac{1}{k}\right) \cdot e^{-kx} \Rightarrow G_k'(x) = -e^{-kx} + \left(-x - \frac{1}{k}\right) \cdot (-k) \cdot e^{-kx} = (-1 + kx + 1) \cdot e^{-kx} \\ = kxe^{-kx} = g_k(x)$$

$$(3) \mu = \int_0^{+\infty} [x \cdot f_k(x)] dx = \int_0^{+\infty} g_k(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\left(-x - \frac{1}{k}\right) \cdot e^{-kx} \right]_0^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\left(-R - \frac{1}{k}\right) \cdot e^{-kR} + \frac{1}{k} \right] = \frac{1}{k}$$

$$(4) S_k(x) = \left(-x^2 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot e^{-kx} \Rightarrow S_k'(x) = -2xe^{-kx} + \left(-x^2 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot (-k) \cdot e^{-kx} = \left(kx^2 - 2x + \frac{1}{k}\right) \cdot e^{-kx} \\ = \left(x^2 - \frac{2}{k}x + \frac{1}{k^2}\right) \cdot k \cdot e^{-kx} = \left(x - \frac{1}{k}\right)^2 \cdot k \cdot e^{-kx} = s_k(x)$$

$$(5) \sigma = \sqrt{\int_0^{+\infty} [(x - \mu)^2 \cdot f_k(x)] dx} = \sqrt{\int_0^{+\infty} s_k(x) dx} = \sqrt{\lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\left(-x^2 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot e^{-kx} \right]_0^R} \\ = \sqrt{\lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\left(-R^2 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot e^{-kR} + \frac{1}{k^2} \right]} = \sqrt{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{k}$$

Mit GTR

Aufgabe 3

$$a) \int_0^1 (3x^2 - 6x + 3) dx = [x^3 - 3x^2 + 3x]_0^1 = 1$$

$f(x) = 3x^2 - 6x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$, d. h. $f(x) \geq 0$ für alle x , also auch für alle x zwischen 0 und 1. (Graf von f ist nach oben geöffnete Parabel, die die x -Achse bei $x = 1$ berührt.)

$$b) P[0; 0,1] = \int_0^{0,1} (3x^2 - 6x + 3) dx = 27,1 \%$$

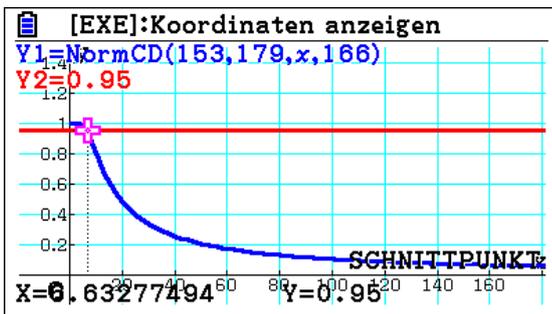
$$c) \mu = \int_0^1 (3x^3 - 6x^2 + 3x) dx = 0,25 \text{ (mittlerer Abstand von der Wand)}$$

$$\sigma = \sqrt{\int_0^1 [(x - 0,25)^2 \cdot f(x)] dx} = \sqrt{\frac{3}{80}} \approx 0,19$$

$$d) \int_0^1 k \cdot (x - x^3) dx = 1 \Leftrightarrow k \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k = 1 \Leftrightarrow k = 4$$

Aufgabe 4

a) Die Größe G von Frauen sei normalverteilt mit $\mu = 166$ cm. Gesucht ist die Standardabweichung σ mit $P_{\mu=166 \text{ cm}; \sigma} (153 \leq G \leq 179)$. Sie ergibt sich die sich als Schnittstelle der Funktionen f und g mit $f(\sigma) = P_{\mu=166 \text{ cm}; \sigma} (153 \leq G \leq 179)$ und $g(\sigma) = 0,95$. Man erhält $\sigma \approx 6,63$.

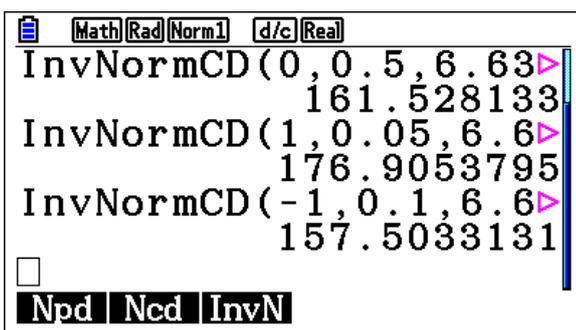


b) $P_{\mu=166 \text{ cm}; \sigma \approx 6,63} (153 \leq G \leq 156) \approx 4,1\%$ der Waren sind auf Körpergrößen von 153 cm bis 156 cm ausgerichtet.

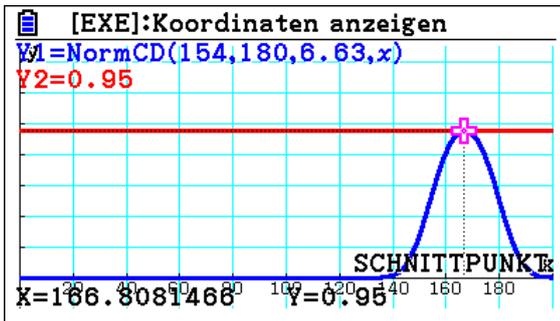
c) Es gilt $P_{\mu=166 \text{ cm}; \sigma \approx 6,63} (161,5 \leq G \leq 170,5) \approx 0,50$.

d) Es gilt $P_{\mu=166 \text{ cm}; \sigma \approx 6,63} (G \geq 176,9) \approx 0,05$.

e) Es gilt $P_{\mu=166 \text{ cm}; \sigma \approx 6,63} (G \leq 157,5) \approx 0,10$.



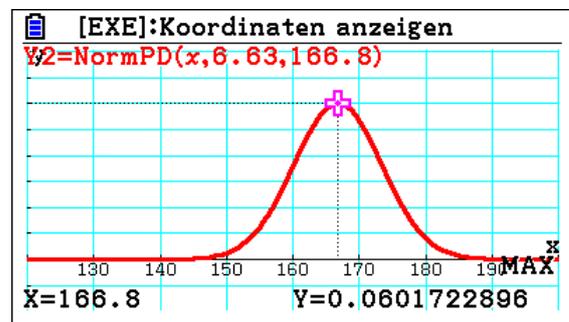
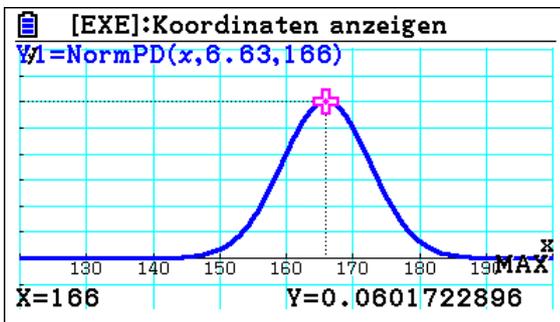
f) Gesucht ist der Erwartungswert μ mit $P_{\mu;\sigma\approx 6.63}(154 \leq G \leq 180) = 0,95$. Er ergibt sich die sich als Schnittstelle der Funktionen f und g mit $f(\mu) = P_{\mu;\sigma\approx 6.63}(154 \leq G \leq 180)$ und $g(\mu) = 0,95$. Man erhält $\mu \approx 166,8$. Alternativlösung über Tabellenfunktion und systematisches Probieren.



X	Y1
166.6	0.9496
166.8	0.9499
167	0.95
167.2	0.9499

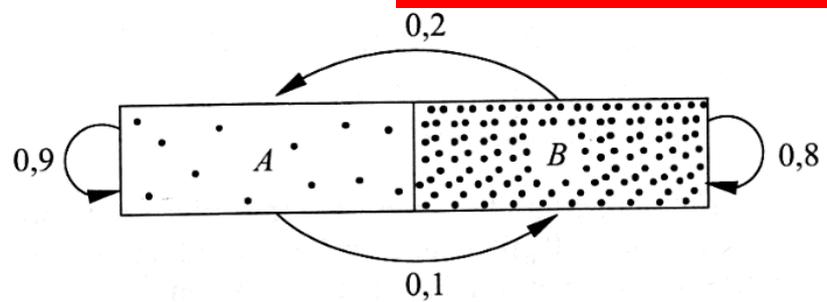
0.9499916899
 FORMULA DELETE ROW EDIT GPH-CON GPH-PLT

g)



4. Unterrichtsvorhaben in der Q2-Phase

Modellieren und Rechnen mit Matrizen



Jörn Meyer

joernmeyer@web.de

www.maspole.de

Inhaltsverzeichnis

1 Was ist eine Matrix und, wie rechnet man damit?	2
2 Materialverflechtung	7
3 Stochastische Prozesse	11
4 Mehrstufige Prozesse und Populationsmatrizen	20
5 Kontrollaufgaben	22
Lösungen	28

1 Was ist eine Matrix, und wie rechnet man damit?

Was ist eine Matrix?

Matrizen sind Dir bereits bei den linearen Gleichungssystemen (LGS) begegnet. Dort konnten die Koeffizienten des LGS als Matrix (Koeffizienten-Matrix) geschrieben werden. Mithilfe des Gauß-Verfahrens wurde anschließend der Lösungsvektor bestimmt.

In diesem Kapitel lernst Du zunächst, wie man mit Matrizen rechnen kann. Anschließend werden wir mit Hilfe von Matrizen Prozesse aus der Produktion (Materialverflechtung), der Stochastik (Austauschprozesse bzw. stochastische Prozesse) und der Biologie (zyklische Prozesse) beschreiben.

Eine **Matrix** ist die tabellarische Anordnung von Zahlenwerten, z. B.: $\begin{pmatrix} 826 & 834 & 848 \\ 424 & 542 & 562 \\ 232 & 344 & 286 \end{pmatrix}$.

Aber erst, wenn die Überschriften der einzelnen Spalten (senkrecht) und Zeilen (waagrecht) ergänzt werden, ergibt sich der Sinn einer Matrix. So kann Onkel Klaus z. B. den Umsatz von drei Glücksspielen am Wochenende in der folgenden Matrix notieren:

	Freitag	Samstag	Sonntag
Spiel 1	826 €	834 €	848 €
Spiel 2	424 €	542 €	562 €
Spiel 3	232 €	344 €	286 €

Ist die Bedeutung der **Komponenten** einer Matrix fest vereinbart, erspart das Schema einer Matrix aufwendige Schreibarbeit. Matrizen bieten aber auch eine Rechenerleichterung. Will Klaus z. B. die obigen Umsätze mit denen des letzten Wochenendes vergleichen, benutzt er eine Vergleichsmatrix, deren Einträge aus den Differenzwerten der Gewinne beider Wochenenden bestehen. Man erhält:

$$\begin{pmatrix} 826 & 834 & 848 \\ 424 & 542 & 562 \\ 232 & 344 & 286 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 683 & 567 & 642 \\ 342 & 402 & 561 \\ 118 & 254 & 164 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 143 & 267 & 206 \\ 82 & 140 & 1 \\ 114 & 90 & 122 \end{pmatrix}.$$

Auf diese Weise stellt er schnell fest, dass er dieses Wochenende erfolgreicher war, da nur positive Zahlen als Differenzen auftreten. Allgemein ist die Anzahl der Spalten und Zeilen einer Matrix nicht vorgeschrieben und man verallgemeinert:

Ein rechteckige Anordnung von Zahlen mit **m Zeilen** und **n Spalten** heißt **Matrix vom Typ m×n** (lies: „m-Kreuz-n“). Die Anordnung wird in zwei runde Klammern gefasst.

$$\begin{array}{c} \text{Spalte} \\ 1 \quad j \quad n \\ \begin{array}{c} \text{Zeile} \\ 1 \\ i \\ m \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Zahl a_{ij} gibt den **Eintrag** (oder die **Komponente**) der Matrix in der **i-ten Zeile** und **j-ten Spalte** an.

Beispiele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ hat z. B. die Komponente $a_{12} = 2$. Gilt für eine 2×2 -Matrix B für eine beliebige Komponente $b_{ij} = i + 2j$, erhält man $B = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 1 & 1 + 2 \cdot 2 \\ 2 + 2 \cdot 1 & 2 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.



Aufgabe 1 (Matrizentypen unterscheiden)

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Bestimme den Typ jeder Matrix.
- Gib folgende Komponenten an: a_{23} , a_{34} , b_{52} , b_{22} , c_{22} , c_{33} .



Aufgabe 2 (Matrizen konstruieren)

Ermittle die $m \times n$ -Matrix A mit den angegebenen Bedingungen:

- $m = n = 3$; $a_{ij} = 1$ für $i = j$ und $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$.
- $m = n = 4$; $a_{ij} = i - j$.
- $m = 3$; $n = 5$; $a_{ij} = i \cdot j$

Wie rechnet man mit Matrizen?

Das **Addieren und Subtrahieren** von zwei $m \times n$ -Matrizen geschieht komponentenweise:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ik} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & b_{ik} & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & a_{ik} \pm b_{ik} & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Das **Multiplizieren einer Matrix mit einer Zahl c (Skalar-Multiplikation)** geschieht durch Multiplikation der Zahl c mit jeder Komponente.

$$c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ik} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & \cdots & c \cdot a_{1n} \\ \vdots & c \cdot a_{ik} & \vdots \\ c \cdot a_{m1} & \cdots & c \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$



Aufgabe 3 (Addieren von Matrizen und Skalar-Multiplikation)

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Berechne:

- $A + B$
- $A - B$
- $3B$
- $-0,1A$
- $2A - 3B$

Beim **Multiplizieren zweier Matrizen** entsteht eine neue Komponente in der Ergebnismatrix dadurch, dass man spalten- und zeilenweise multipliziert und die Faktoren addiert. Multipliziert man beispielsweise eine 3×2 -Matrix mit einer 2×4 -Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

entsteht als Produkt eine 3×4 -Matrix. Ihre Komponente z. B. in der 2. Zeile und der 3. Spalte entsteht aus der **2. Zeile der ersten Matrix** und der **3. Spalte der zweiten Matrix** durch eine Multiplikation und Addition: $3 \cdot 7 + 5 \cdot 6 = 51$

Insgesamt entsteht in diesem Beispiel die neue Matrix: $\begin{pmatrix} 24 & 44 & 64 & 38 \\ 19 & 35 & 51 & 29 \\ 20 & 38 & 56 & 23 \end{pmatrix}$

Ein Matrizenprodukt ist aber nur möglich, wenn die **Spaltenzahl der ersten Matrix** mit der **Zeilenzahl der zweiten Matrix** übereinstimmen (**Verknüpfungsbedingung**).

Das folgende Schema (**Falk-Schema**) hilft bei der Matrizenmultiplikation zweier Matrizen:

•	3	5	7	8
	2	4	6	1
4 6	24	44	64	38
3 5	19	35	51	29
2 7	20	38	56	23

Eine quadratische $n \times n$ -Matrix E_n , deren Elemente in der Hauptdiagonale alle 1 und deren sonstige Elemente alle Null sind, heißt **Einheitsmatrix**.

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zwei quadratische $n \times n$ -Matrizen **A** und **B** heißen **invers zueinander**, falls $A \cdot B = B \cdot A = E_n$. Man bezeichnet die zu **A** inverse Matrix mit A^{-1} .



Aufgabe 4 (Matrizenmultiplikation)

Berechne die folgenden Matrizenprodukte und **gib an**, wie man vorab überprüfen kann, welche Dimension die entstehende Matrix hat.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

h) $(4 \ 7 \ -2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$



Aufgabe 5 (Getränkehändler)

Ein Getränkehändler beliefert die Kunden A, B und C mit vier Sorten Wein. Es wurden folgende Mengen ausgeliefert:

- **Kunde A:** 10 Kartons der Sorte I; 5 Kartons der Sorte II; 3 Kartons der Sorte IV.
- **Kunde B:** 6 Kartons der Sorte I; 15 Kartons der Sorte II; 10 Kartons der Sorte III; 1 Karton der Sorte IV.
- **Kunde C:** 20 Kartons der Sorte III; 10 Kartons der Sorte IV.

Die Preise (in € pro Karton) sind durch den Preisvektor: $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_I \\ p_{II} \\ p_{III} \\ p_{IV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \\ 60 \\ 90 \end{pmatrix}$ dargestellt.

Schreibe die Auslieferungen an die drei Kunden als Matrix und **berechne** die jeweils zu zahlenden Beträge.

Wie nutzt man den GTR für die Matrizenrechnung?

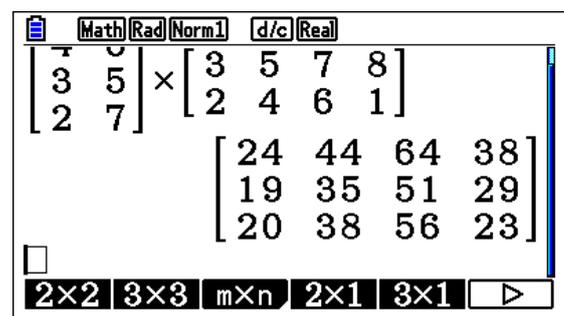
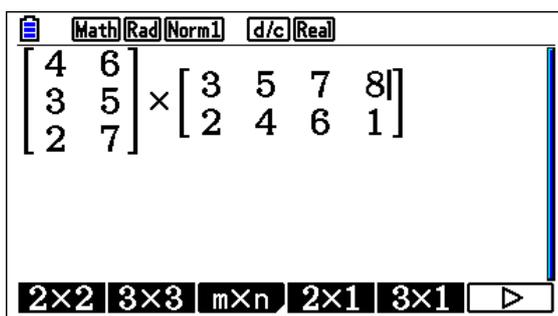
An folgendem Beispiel so dargestellt werden, wie man den GTR einsetzen kann, um Operationen mit Matrizen durchzuführen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

In MENU 1 (Run-Matrix) hat man zwei Möglichkeiten Matrizenoperationen durchzuführen. Zum einen kann im Rechenmodus die Operation direkt eingegeben werden. Zum anderen besteht die Möglichkeit die entsprechenden Matrizen zu speichern und anschließend mit ihnen zu rechnen.

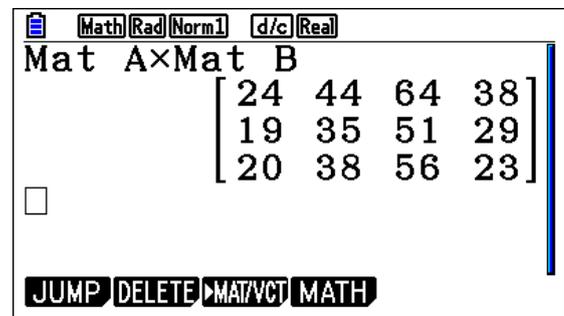
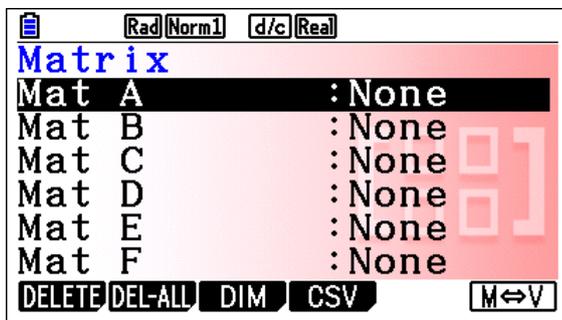
Variante 1: Rechenmodus

1. Hier gelangt man über $\boxed{F4}$ (MATH), $\boxed{F1}$ (MAT/VCT) und $\boxed{F3}$ (mxn) zu einer Maske, mit der man die Dimension der ersten Matrix definieren kann. In unserem Fall geben wir für $m = 3$ (Zeilenzahl der ersten Matrix) und $n = 2$ (Spaltenzahl der ersten Matrix) ein.
2. Nun erscheint nach Drücken der \boxed{EXE} -Taste die Vorlage einer 3×2 -Matrix, in die die Komponenten eingetragen werden (über die Pfeiltasten gelangt man zur nächsten Komponente).
3. Anschließend gibt man hinter der Matrix (dorthin gelangt man mit der Pfeiltaste) das Operationszeichen $\boxed{\times}$ ein und wiederholt den Vorgang 1 und 2 für die zweite 2×4 -Matrix. Mit EXE erscheint das Ergebnis einer 3×4 -Matrix.



Variante 2: Matrizenmodus

1. Hier gelangt man über $\boxed{F3}$ (MAT/VCT) zu einer Liste von möglichen Matrizen. Mit $\boxed{F3}$ (DIM) kann man wie bei Variante 1 die Dimension der Matrix A festlegen. In unserem Fall geben wir für $m = 3$ (Zeilenzahl der ersten Matrix A) und $n = 2$ (Spaltenzahl der ersten Matrix A) ein.
2. Nun erscheint nach Drücken der \boxed{EXE} -Taste die Vorlage einer 3×2 -Matrix, in die die Komponenten eingetragen werden. Dabei gelangt man über die \boxed{EXE} -Taste zur nächsten Komponente.
3. Um die zweite Matrix einzugeben gelangt man über EXIT zunächst zum Matrizenmenu und führt dort den Vorgang 1 und 2 für die zweite Matrix B aus.
4. Über EXIT gelangt man wieder zurück in den Rechenmodus. Dort gelangt man \boxed{SHIFT} und $\boxed{2}$ zum Symbol MAT. Nun gibt man über ALPHA den Buchstaben A ein, dann das Operationszeichen \times sowie analog MAT B. Mit EXE erscheint das Ergebnis einer 3×4 -Matrix.

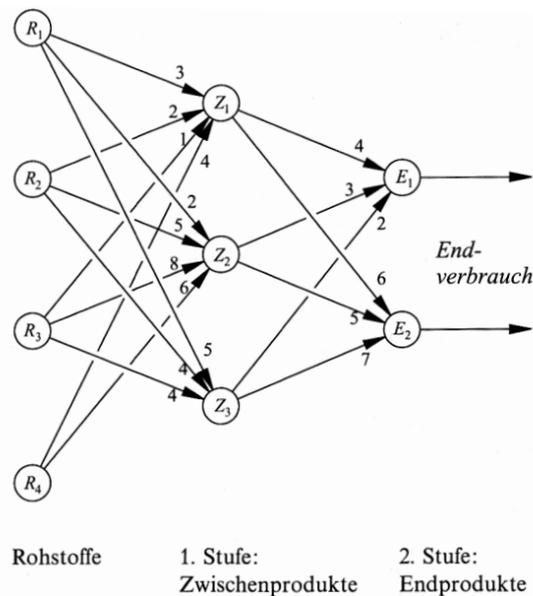


2 Materialverflechtung¹



Aufgabe 1 (Einführungsaufgabe)

In einem Unternehmen werden zwei Typen von Endprodukten E_1 und E_2 aus drei verschiedenen Typen von Zwischenprodukten Z_1 , Z_2 und Z_3 gefertigt, die jeweils wiederum aus vier verschiedenen Rohstoffen R_1 , R_2 , R_3 und R_4 hergestellt werden. Zur Herstellung eines Endprodukts E_1 werden z. B. 4 Teile Z_1 , 3 Teile Z_2 und 2 Teile Z_3 gebraucht. Je Stück Z_1 werden 2 Teile R_2 , je Stück Z_2 werden 5 Teile R_2 und je Stück Z_3 4 Teile R_2 gebraucht. Daher werden für die Produktion von Endprodukt E_1 insgesamt $2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 31$ Teile R_2 gebraucht. Folgende Abbildung verdeutlicht die Verflechtung der Rohstoffe, Zwischenprodukte und Endprodukte.

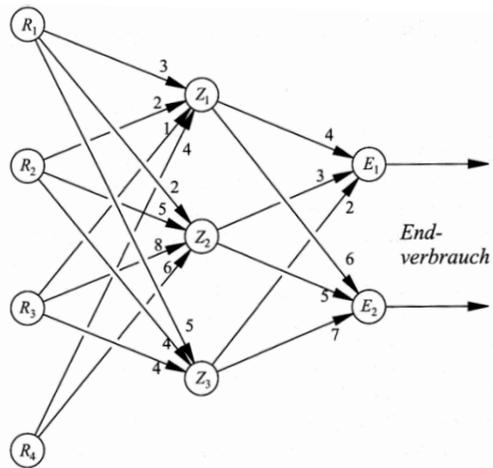


- Berechne die übrigen Bedarfswerte R_1 , R_2 , R_3 und R_4 für E_1 bzw. E_2 .
- Gib die Prozessmatrix A der Herstellung der Zwischenprodukte aus den Rohstoffen an.
- Bestimme die Übergangsmatrix B beim Prozess der Zwischen- zu den Endprodukten.
- Ermittle mit Hilfe der Ergebnisse von Aufgabenteil a) die Prozessmatrix C beim Übergang von den Rohstoffen zu den Endprodukten.
- Untersuche den rechnerischen Zusammenhang der Matrizen A , B und C .
- Die Produktionsplanung (der Output) lautet 100 E_1 und 50 E_2 .
Bestimme den Gesamtbedarf an R_1 , R_2 , R_3 und R_4 (also den Input).
- Ein Teil R_1 kostet 10 €, ein Teil R_2 20 €, ein Teil R_3 30 € und ein Teil R_4 40 €.
Bestimme die Gesamtkosten der obigen Produktion.
- Betrachte die folgende Übersicht und übertrage die Übersicht zur Materialverflechtung mit Hilfe der Vorlage in Dein Heft.

→ Vorlage Materialverflechtung

¹ Fakultativ im LK Mathematik

Materialverflechtung:



Rohstoffe 1. Stufe: Zwischenprodukte 2. Stufe: Endprodukte

Bedarf der R_i für Endprodukt E_1 :

$$c_{11} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = \mathbf{28}$$

$$c_{21} = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = \mathbf{31}$$

$$c_{31} = 1 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = \mathbf{36}$$

$$c_{41} = 4 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = \mathbf{34}$$

Bedarf der R_i für Endprodukt E_2 :

$$c_{12} = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 7 = \mathbf{63}$$

$$c_{22} = 2 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = \mathbf{65}$$

$$c_{32} = 1 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = \mathbf{74}$$

$$c_{42} = 4 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 0 \cdot 7 = \mathbf{54}$$

Matrizendarstellung:

$$\begin{matrix} & Z_1 & Z_2 & Z_3 & E_1 & E_2 \\ R_1 & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} & & & \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \\ R_2 & & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} & & & \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \\ R_3 & & & \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} & & \\ R_4 & & & & \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix} & \end{matrix} Z_3$$

$$= \begin{matrix} & E_1 & E_2 \\ R_1 & \begin{pmatrix} \mathbf{28} & \mathbf{63} \end{pmatrix} \\ R_2 & \begin{pmatrix} \mathbf{31} & \mathbf{65} \end{pmatrix} \\ R_3 & \begin{pmatrix} \mathbf{36} & \mathbf{74} \end{pmatrix} \\ R_4 & \begin{pmatrix} \mathbf{34} & \mathbf{54} \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = C \cdot \vec{y}$$

$$= \begin{pmatrix} 28 & 63 \\ 31 & 65 \\ 36 & 74 \\ 34 & 54 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5950 \\ 6350 \\ 7300 \\ 6100 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}^T = \vec{p}^T \cdot C$$

$$\vec{k}^T = (10 \quad 20 \quad 30 \quad 40) \cdot C = (3340 \quad 6310)$$

$$K = \vec{k}^T \cdot \vec{y}$$

$$K = (3340 \quad 6310) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$K = 649500$$

Die Bedarfsmatrix C des Gesamtprozesses erhält man durch Multiplikation der Bedarfsmatrizen A (Stufe 1) und B (Stufe 2) der Einzelprozesse: $C = A \cdot B$.

Ist \vec{y} der Vektor der Ausgangswerte (**Output-Vektor**), dann ist $\vec{x} = C \cdot \vec{y}$ mit der Matrix $C = A \cdot B$ der Vektor der Eingangswerte (**Input-Vektor**).

Ist \vec{p}^T der transponierte Preisvektor der Rohstoffe, dann gilt für den transponierten Kostenvektor der Endprodukte $\vec{k}^T = \vec{p}^T \cdot C$ und für die Gesamtkosten gilt $K = \vec{p}^T \cdot \vec{x} = \vec{k}^T \cdot \vec{y}$.



Aufgabe 2

Zur Produktion der beiden Güter werden drei Einzelteile R, S und T benötigt. Der Verbrauch an Einzelteilen je Mengeneinheit der beiden Güter ergibt sich aus der folgenden Tabelle:

	X	Y
R	4	0
S	2	5
T	1	3

Für die ersten drei Monate existiert folgender Absatzplan:

	Jan	Feb	März
X	5	9	4
Y	3	7	11

- a) **Zeichne** den Verflechtungsgraphen und **bestimme** für jeden Monat den Bedarf an Einzelteilen R, S und T.

Die drei Einzelteile werden nicht selbst produziert, sondern eingekauft. Der Preis für ein Teil beträgt bei R 5 €, bei S 2 € und bei T 4 €.

- b) **Untersuche**, in welchem Monat für den Zukauf dieser Teile am meisten Geld ausgegeben werden muss.



Aufgabe 3

Die folgenden Tabellen beschreiben die Zusammenhänge in einem 2-stufigen Produktionsprozess:

	Z ₁	Z ₂	Z ₃
R ₁	a	b	c
R ₂	8	1	3
R ₃	2	5	2

	E ₁	E ₂	E ₃
Z ₁	2	2	1
Z ₂	5	0	2
Z ₃	3	7	3

	E ₁	E ₂	E ₃
R ₁	25	10	11
R ₂	30	37	19
R ₃	35	18	18

Zur Herstellung der Zwischenprodukte Z₁, Z₂ bzw. Z₃ werden a, b bzw. c Mengeneinheiten von R₁ benötigt.

Zeichne den Verflechtungsgraphen und **bestimme** a, b und c. **Überprüfe** am Ende mit dem GTR.



Aufgabe 4

In einer Düngemittelfabrik werden aus drei Grundstoffen G₁, G₂ und G₃ zunächst zwei Zwischenprodukte Z₁ und Z₂ hergestellt. Daraus werden zwei Düngersorten D₁ und D₂ gemischt, die anschließend in den Verkauf kommen. In den folgenden Tabellen wird der Tonnenbedarf angegeben, der zur Herstellung einer Tonne eines Zwischenprodukts bzw. eines Düngemittels gebraucht wird.

	Z ₁	Z ₂
G ₁	0,3	0,3
G ₂	0,3	0,5
G ₃	0,4	0,2

	D ₁	D ₂
Z ₁	0,3	a
Z ₂	0,7	b

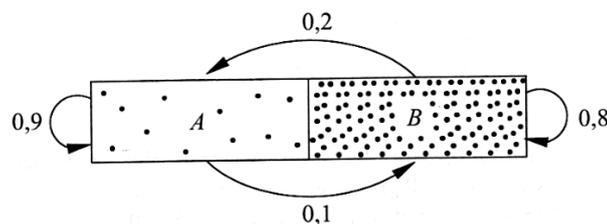
- a) **Gib** die Bedarfsmatrizen A_{GZ} und A_{ZD} der beiden Produktionsstufen **an** und **zeichne** den Verflechtungsgraphen.
- b) Für die Produktion von 3 t D_1 und 4 t D_2 werden 3,3 t Z_1 und 3,7 t Z_2 benötigt.
Ermittle die Parameter a und b in der Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix. [Kontrollergebnis: a = 0,6 und b = 0,4]
- c) **Berechne** die Bedarfsmatrix A_{GD} des Gesamtprozesses und **bestimme**, wie viel Tonnen der Grundstoffe für 3 t D_1 und 4 t D_2 gebraucht werden.
- d) Eine Tonne G_1 kostet 100 €, eine Tonne G_2 kostet 150 € und eine Tonne G_3 200 €. **Berechne** die Kosten für 1 t D_1 und 1 t D_2 . **Ermittle** die Gesamtkosten für 3 t D_1 und 4 t D_2 .
- e) Die Kosten für die Grundstoffe G_1 und G_2 ändern sich. 1 t G_3 kostet weiterhin 200 €. Die Kosten für 1 t D_1 und 1 t D_2 betragen jeweils 152 €.
Bestimme die Preise für 1 t Tonne G_1 und 1 t G_2 .
- f) Im Lager sind noch 45 t G_1 und 55 t G_2 . Begründe, dass es möglich ist, die Grundstoffe G_1 und G_2 durch Herstellung von Zwischenprodukten restlos aufzubrauchen.
Ermittle, wie viele Tonnen der einzelnen Zwischenprodukte mit diesen Lagerbeständen produziert werden können. **Bestimme** zusätzlich, wie viele Tonnen des Grundstoffes G_3 für diese Produktion benötigt werden.

3 Stochastische Prozesse



Aufgabe 1 (Diffusion)

Unter einer **Diffusion** versteht man in der Physik einen Vorgang, bei dem ein Stoff aufgrund molekularer Bewegung in einen anderen eindringt oder ihn ganz durchdringt. Wir betrachten als Beispiel für einen solchen Vorgang das folgende vereinfachte Modell einer Diffusion (vgl. Abbildung unten). Ein mit 12000 Teilchen gefüllter Kasten ist durch eine durchlässige Wand in zwei Hälften A und B geteilt. Die Verteilung der Teilchen auf die beiden Hälften ändert sich jeweils nach Ablauf einer festen Zeiteinheit: 10 % der sich in A befindlichen Teilchen gelangen nach B (die restlichen 90 % bleiben in A) und 20 % der sich in B befindlichen Teilchen gelangen nach A (die restlichen 80 % bleiben in B). Am Anfang sind 3000 Teilchen in A und 9000 Teilchen in B. Es soll untersucht werden, wie sich die Verteilung der 12000 Teilchen auf die beiden Hälften entwickelt.



- Berechne** die Verteilung der Teilchen auf die beiden Hälften nach einer Zeiteinheit sowie nach zwei und nach drei Zeiteinheiten.
- Gib** eine Matrix U an, die den Austauschprozess der beiden Teilchen A und B beschreibt.

Definition: Wir drücken die Verteilung der beiden Teilchen auf die beiden Hälften durch einen sogenannten **Zustandsvektor** $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aus, wobei x die Anzahl der Teilchen in A und y die Anzahl der Teilchen in B bedeuten. Es ergibt sich daher für den **Anfangszustand** die sogenannte **Startverteilung (Anfangszustandsvektor)** $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 3000 \\ 9000 \end{pmatrix}$. Vektoren werden hier formal als 2×1 -Matrizen aufgefasst.

- Untersuche**, wie sich die Zustandsvektoren \vec{v}_1 , \vec{v}_2 und \vec{v}_3 mithilfe der Matrix U berechnen lassen.
- Gib** einen Term für den Zustandsvektor \vec{v}_4 nach vier Zeiteinheiten an, der nur von der Startverteilung \vec{v}_0 und der Übergangsmatrix U abhängt. **Untersuche**, wie sich der Zustandsvektor \vec{v}_{10} nur aus der Startverteilung \vec{v}_0 und der Übergangsmatrix U berechnen lässt. **Gib** einen Term für den Zustandsvektor \vec{v}_n nach n Zeiteinheiten an, der nur von der Startverteilung \vec{v}_0 und der Übergangsmatrix U abhängt.

Definition: Die Folge der Zustandsverteilungen, die zu dem obigen Prozessdiagramm gehören, wird auch als **stochastischer Prozess** bezeichnet. Die dazugehörige Matrix U heißt **stochastische Matrix**. Sie ist quadratisch, enthält keine negativen Einträge und hat in jeder Spalte die Koeffizientensumme 1.

- Berechne** mithilfe des GTR die Zustandsvektoren für die ersten zehn Zeiteinheiten und stelle die dazugehörigen Punkte in einem x - y -Koordinatensystem dar. Zur Erinnerung: Du kannst Du den GTR auf zwei Weisen nutzen:

- (1) **Direkt mit Matrizen rechnen:** Gib im MENU 1 über $\boxed{\text{MATH}}$ und $\boxed{\text{MATH/VCT}}$ und die Dimension der Matrizen die entsprechenden Matrizen ein und verwende die Operationen wie beim Rechnen mit reellen Zahlen.
- (2) **Vorab Matrizen definieren:** Definiere in MENU 1 über $\boxed{\text{MATH/VCT}}$ die beiden Matrizen U und den Anfangszustandsvektor. Über $\boxed{\text{SHIFT}}$ und $\boxed{2}$ kann das Matrizensymbol erzeugt werden, durch $\boxed{\text{ALPHA}}$ der entsprechende Buchstabe der Matrix.

Definition: Ein Zustand heißt **stabil**, wenn es einen Zustandsvektor \vec{v} gibt, der sich im stochastischen Prozess mit der Matrix U nicht mehr ändert. Es gilt also: $U \cdot \vec{v} = \vec{v}$. Der dazugehörige Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ heißt **stabile Verteilung** (Gleichgewichtsverteilung, stationäre Verteilung, Fixvektor).

- f) **Zeige**, dass $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 4000 \end{pmatrix}$ eine stabile Verteilung des obigen Diffusionsprozesses ist.

Wir wollen nun überlegen, wie man diese stabile Verteilung hätte berechnen können, ohne vorher den Verlauf der Zustandsvektoren betrachten zu müssen. Verwende dafür den Ansatz:

$$U \cdot \vec{v} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- g) **Stelle** die obige Gleichung als lineares 2x2-Gleichungssystem mit den Unbekannten x und y dar.
- h) **Löse** das LGS und **bestimme** dann die stabile Verteilung. [Tipp: Das LGS hat unendliche viele Lösungen (warum?). Betrachte nun die Lösung, für die $x + y = 12000$ gilt (warum?).]
- i) **Untersuche**, ob sich die stabile Verteilung verändert, wenn zu Beginn alle Teilchen in der Hälfte B sind. [Hinweis: Hier muss nicht erneut gerechnet werden.]

Merksatz: Für einen stochastischen Prozess mit der Prozessmatrix U und der Startverteilung \vec{v}_0 berechnet sich über das Produkt: $\vec{v}_n = U^n \cdot \vec{v}_0$ die **Verteilung (Zustandsverteilung) nach n Zuständen**.



Aufgabe 2 (Bevölkerungsentwicklung)²

Gegeben ist folgendes Prozessdiagramm eines stochastischen Prozesses:



- a) **Vervollständige** das Prozessdiagramm und **gib** die Übergangsmatrix **an**.
- b) Anfangs befindet sich das System mit gleicher Wahrscheinlichkeit in einem der drei Zustände. **Berechne** die Zustandsverteilung nach einem bzw. nach zwei Schritten.
- c) Das Prozessdiagramm soll die Einwohnerzahlen von drei Städten beschreiben, die sich durch Umzüge ständig ändern.
Gib zwei Aspekte der Realität **an**, die durch dieses Modell nicht abgebildet werden.

² Lambacher Schweizer LK-Band NRW 2017, S. 374



Aufgabe 3 (Vererbung von Merkmalen)

Eine Population von Insekten enthält Tiere mit zwei verschiedenen Merkmalen A und B (z. B. Farbe). Beobachtungen über einen längeren Zeitraum zeigen, dass Insekten mit Merkmal A zu 70% Nachkommen mit Merkmal A und zu 30% solche mit Merkmal B haben. Insekten mit Merkmal B haben zu 80% wieder Nachkommen mit diesem Merkmal, zu 20% solche mit Merkmal A. Die Vermehrungsrate wird durch die Merkmale nicht beeinflusst.

- Zeichne** den Übergangsgraphen, gib die stochastische Matrix U an und **begründe**, dass es sich um einen stochastischen Prozess handelt.
- Zu Beginn der Beobachtungen haben 50 % der Tiere Merkmal A und 50 % Merkmal B.
Gib den Anlaufvektor des Prozesses \vec{v}_0 an, und **berechne** die Zustandsvektoren nach einer Generation, nach zwei und nach drei Generationen.
- Gib** jeweils einen Term für den Zustandsvektor \vec{v}_{100} nach 100 Generationen an, der einerseits von der Prozessmatrix U und dem Anlaufvektor \vec{v}_0 sowie andererseits von der Prozessmatrix U und dem Zustandsvektor \vec{v}_{99} nach 99 Generationen abhängt.
- Zeige**, dass der Austauschprozess bei einer Verteilung von „40 % der Insekten haben Merkmal A“ und „60 % der Insekten haben Merkmal B“ stabil bleibt.
- Untersuche**, wie viele Insekten langfristig Merkmal A bzw. Merkmal B besitzen, wenn auch die Gesamtzahl der Insekten mit 10 Millionen Insekten langfristig konstant bleibt.
- Durch Umwelteinflüsse ändert sich die Prozessmatrix in $V = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}$.
Berechne die stabile Verteilung des neuen Prozesses.
- Berechne** mithilfe des GTR die Entwicklung der Matrizen V^n für ein immer größer werdendes n und beschreibe Deine Beobachtungen. **Gib** die Bedeutung von V^n im Sachzusammenhang an.

Definition: Man definiert bei einem stochastischen Prozess die Matrix $G := \lim_{n \rightarrow \infty} V^n$ als die **Grenzmatrix der Matrizenfolge V^n** für ein immer größer werdendes n .

Satz: Wenn sich die Potenzen der Übergangsmatrix V^n bei einem stochastischen Prozess für $n \rightarrow \infty$ der Grenzmatrix G nähert, dann kann man zu jeder Startverteilung \vec{v}_0 durch $\vec{g} = G \cdot \vec{v}_0$ die stabile Verteilung \vec{g} berechnen.



Aufgabe 4 (Autovermietung)

Ein Autovermieter hat eine Niederlassung in drei Städten A, B und C. Die gemieteten PKW können ohne Aufpreis am Ende des Tages an einer der drei Niederlassungen zurückgegeben werden – gleichgültig an welcher Stelle das Mietfahrzeug übernommen wurde. Durch Beobachtung stellt der Geschäftsführer folgende Übergangswahrscheinlichkeiten für Fahrzeuge zwischen den drei Niederlassungen fest:

- 80 % der Fahrzeuge, die am Morgen in Niederlassung A stehen, stehen am nächsten Morgen wieder in A, je 10 % sind von A nach B bzw. C gewechselt.

- Nach Niederlassung B kehren 60 % der ausgeliehenen Fahrzeuge zurück; je 20 % wechseln nach A bzw. C.
- Von Niederlassung C aus wechseln erfahrungsmäßig 20 % nach Niederlassung A und 10 % nach B, 70 % kehren wieder zurück.

- a) **Zeichne** ein Übergangendiagramm (Prozessdiagramm)!
- b) **Bestimme** die Übergangsmatrix A des Systems und zeige, dass A ein Austauschprozess ist.

An einem Tag stehen morgens 30 % der Fahrzeuge in A, 50 % in B und 20 % in C, d.h., der sogenannte

Anlaufvektor ist: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

- c) **Berechne** die Anteile an der Gesamtzahl aller Fahrzeuge an den drei Standorten am Abend des ersten und zweiten Tages.
- d) **Ermittle** die Verteilung der Fahrzeuge auf die drei Standorte am Morgen des Vortages.
- e) **Gib** einen Term für die Verteilung der Mietfahrzeuge am Abend des 10. Tages **an**.
- f) **Berechne** die stationäre Verteilung des Prozesses zum einen mit Hilfe des Ansatzes $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$, und zum anderen unter Ausnutzung der Grenzmatrix G.
- g) **Bestimme** die stationäre Verteilung, falls der Autovermieter genau 120 Autos im Umlauf hat.

Aufgrund eines steuerlichen Vorteils an Standort A soll das Grundstück dort erweitert werden. Daher kehren am Abend 5 % mehr Autos zu Standort A zurück. Das Wechselverhalten an den beiden anderen Standorten und die Gesamtzahl an Autos bleiben unverändert.

- h) **Erkläre**, dass sich das Wechselverhalten durch die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,2 & 0,2 \\ 0,15 - q & 0,6 & 0,1 \\ q & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq q \leq 0,15 \text{ beschreiben lässt.}$$

- i) **Ermittle** einen Wert für q für den Fall, dass an einem bestimmten Morgen jeweils 40 Autos an jedem Standort stehen und am gleichen Abend an Standort C wieder 40 Autos stehen. **Berechne** ebenso die Autos, die am gleichen Abend an den Standorten A und B stehen.
- j) **Untersuche**, welche maximale Anzahl von Autos bei einer morgendlichen Gleichverteilung von 40 Autos abends am Standort C stehen können. **Bestimme** ebenso die abendliche Autoanzahl an den beiden anderen Standorten.

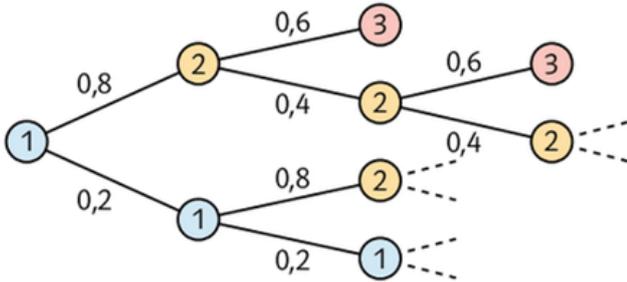


Aufgabe 5 (Level bei einem Computerspiel)³

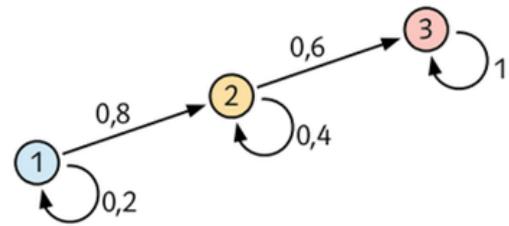
Bei einem Computerspiel gibt es drei Zustände, die Level 1, Level 2 und Level 3. Ein Spieler beginnt auf Level 1 und bewältigt die Übergänge von Level 1 nach Level 2 mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % und von 2 nach 3 mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %. Er spielt so lange, bis er Level 3 erreicht hat. Die Situation kann durch ein „unendliches“ Baumdiagramm oder ein Prozessdiagramm mit drei Zuständen beschrieben werden:

³ Modifiziert nach Lambacher Schweizer LK-Band NRW 2017, S. 352

Baumdiagramm



Prozessdiagramm



- Begründe**, warum der Spieler theoretisch unendlich lange spielen könnte.
- Gib** die Prozessmatrix U **an** und **begründe**, dass es sich beim dargestellten Prozess um einen stochastischen Prozess (Austauschprozess) handelt. **Beschreibe**, wie sich ein stochastischer Prozess am Prozessdiagramm ablesen lässt.
- Berechne** die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler nach zwei, drei bzw. zehn Spielen Level 3 [Level 2; Level 1] erreicht.
- Gib** den Zustandsvektor nach n Spielen **an** ($n > 1$).
- Bestimme** die Zustandsverteilungen nach einem, zwei, drei, fünf und zehn Spielen.
- Ermittle** die stabile Verteilung des Prozesses.

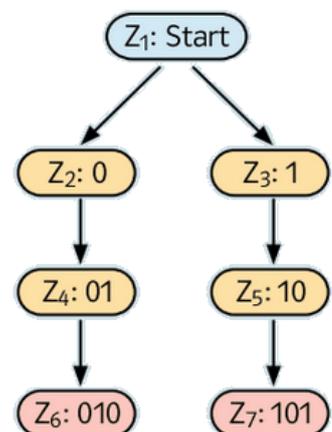
Definitionen:

- Ein Zustand eines stochastischen Prozesses heißt **absorbierend**, wenn es sich um einen Endzustand handelt, an dem ein Ringpfeil mit der Wahrscheinlichkeit 1 befindet. Alle anderen Zustände heißen **innere Zustände**.
- Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen ein Spieler sich zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem der möglichen drei Zustände befindet heißt **Zustandsverteilung**.

**Aufgabe 6 (010 oder 101 gesucht)⁴**

Ein Chip mit den Seiten 0 und 1 wird so lange geworfen, bis entweder das Muster 010 oder 101 aufgetreten ist.

- Vervollständige** das rechts dargestellte Prozessdiagramm mit 7 Zuständen.
- Gib** eine Übergangsmatrix **an**.
- Notiere** die Startverteilung und **berechne** die ersten zwei Zustandsverteilungen.



⁴ Modifiziert nach Lambacher Schweizer LK-Band NRW 2017, S. 374



Aufgabe 7 (Freiwurfserie und Freiwurftrefferzahl)

Ein Basketballtrainer verlangt von seinen Jugendspielern am Ende des Trainings, dass sie drei Freiwürfe hintereinander treffen. Die Spieler haben eine durchschnittliche Trefferquote von 70 %. Die Zustände z_i beschreiben die Zahl der Treffer, die ein Spieler **hintereinander** erzielt hat ($i = 0, 1, 2, 3$).

- Stelle die Situation mit einem Übergangsgraphen und einem Baumdiagramm dar.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler **mit** dem dritten, vierten bzw. fünften Versuch drei Treffer in Folge getroffen hat [nach 3, 4 bzw. 5 Treffern drei Treffer in Folge getroffen hat].
- Gib die Prozessmatrix U an, die den stochastischen Prozess von null Treffern (Zustand z_0) bis hin zu drei Treffern (Zustand z_3) beschreibt.
- Berechne U^2, U^3 und U^{100} . Interpretiere diese Matrizen jeweils im Sachkontext.

- Bestimme $\vec{v}_n = U^n \cdot \vec{v}$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 10$. Gib die Bedeutung im Sachkontext an. Vergleiche mit den Ergebnissen aus b).

Der Trainer verlangt beim nächsten Training 5 Treffer, die allerdings nicht in Folge erzielt werden müssen. Die Zustände z_i beschreiben nun die Zahl der Treffer, die ein Spieler **insgesamt** erzielt hat ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$). Die Trefferquote ist weiterhin 70 %.

- Stelle die Situation mit einem Übergangsgraphen und einer Prozessmatrix dar, und berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler **nach** 5 [6, 7, 10] Versuchen 5 Treffer erzielt hat. Bestimme die Wahrscheinlichkeit **mit** dem 5., 6. bzw. 7. Treffer fertig zu sein.

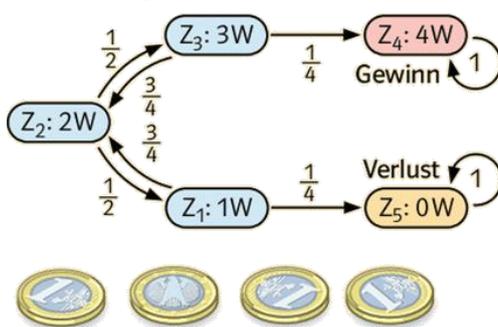


Aufgabe 8 (Absorptionswahrscheinlichkeit und mittlere Wartezeit)⁵

Auf einem Tisch liegen vier Münzen, von denen anfangs eine „Wappen“ und drei „Zahl“ zeigen. Bei jedem Spielzug wird eine Münze zufällig gewählt und gewendet. Das Spiel endet, wenn vier Mal „Wappen“ oben liegt (gewonnen!) oder vier Mal „Zahl“ erscheint (verloren!).

- Begründe, dass der Prozess durch das folgende Diagramm und die dazugehörige Übergangsmatrix beschrieben werden kann.

Prozessdiagramm



Übergangsmatrix

von	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	Z ₅	nach
	0	1/2	0	0	0	Z ₁
	3/4	0	3/4	0	0	Z ₂
	0	1/2	0	0	0	Z ₃
	0	0	1/4	1	0	Z ₄
	1/4	0	0	0	1	Z ₅

⁵ Aufgabengedanke nach Lambacher Schweizer LK-Band NRW 2017, S. 371-372, fakultativ im LK

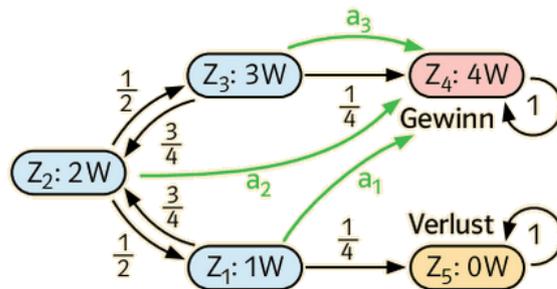
b) **Schätze** Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten sowie die mittlere Anzahl von Zügen bis zum Spielende.

c) **Bestätige**, dass $\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,375 \\ 0,625 \end{pmatrix}$ eine stationäre Verteilung ist, wenn man von einem Anfangszustand Z_1 ausgeht.

d) **Interpretiere** die Wahrscheinlichkeiten in \vec{g}_1 .

e) **Bestimme** die stationären Verteilungen \vec{g}_2 bzw. \vec{g}_3 , wenn man von Anfangszuständen Z_2 bzw. Z_3 ausgeht. [Tipp: Verwende die Grenzmatrix.]

Bei dem beschriebenen Beispiel kann man exakt berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist zu gewinnen. In der folgenden Figur sind die Wahrscheinlichkeiten, von den Zuständen Z_1, Z_2 bzw. Z_3 „irgendwann“ zu gewinnen, mit a_1, a_2 bzw. a_3 bezeichnet. Allgemein werden diese Wahrscheinlichkeiten mit **Absorptionswahrscheinlichkeiten** bezeichnet.



Man kann diese Wahrscheinlichkeiten als Lösung des folgenden LGS berechnen:

$$\text{I } a_1 = \frac{3}{4}a_2$$

$$\text{II } a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_3$$

$$\text{III } a_3 = \frac{3}{4}a_2 + \frac{1}{4}$$

f) **Begründe** die Gültigkeit der drei Gleichungen.

g) **Bestimme** die Lösungsmenge des LGS.

h) **Gib an**, wo du die Absorptionswahrscheinlichkeiten a_1, a_2 bzw. a_3 in den stationären Verteilungen \vec{g}_1, \vec{g}_2 bzw. \vec{g}_3 wiederfindest.

i) **Stelle** ein LGS auf, mit dem man die Wahrscheinlichkeiten zu verlieren berechnen kann.

Es interessiert neben den Absorptionswahrscheinlichkeiten auch die mittlere Zahl von Spielzügen bis zum Spielende. Allgemein: bis man einen absorbierenden Zustand erreicht. Für einen inneren Zustand Z_k nennt man diese Zahl die **mittlere Wartezeit**. Sie wird mit m_k bezeichnet. Zur Berechnung der mittleren Wartezeiten m_1, m_2 und m_3 beim obigen Münzenspiel kann man folgendes LGS aufstellen:

$$\text{I } m_1 = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot (1 + m_2)$$

$$\text{II } m_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + m_1) + \frac{1}{2} \cdot (1 + m_3)$$

$$\text{III } m_3 = \frac{3}{4} \cdot (1 + m_2) + \frac{1}{4} \cdot 1$$

Umgeformt ergibt sich:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad m_1 = 1 + \frac{3}{4} \cdot m_2 \\ \text{II} \quad m_2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot m_1 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \\ \text{III} \quad m_3 = 1 + \frac{3}{4} \cdot m_2 \end{array}$$

- j) **Begründe** die Gültigkeit der drei Gleichungen im nicht umgeformten LGS. [Tipp: die Einsen stehen immer für einen Spielzug.]
- k) **Begründe**, das zweite umgeformte LGS, ohne auf das erste zurückzugreifen.
- l) **Bestimme** die Lösungsmenge des LGS.

ABITUR 2017 Auszug aus GK bzw. LK HT B4⁶

Beim Onlinebanking gibt es verschiedene Sicherheitsvorkehrungen. Bei einer Sicherheitsabfrage muss der Benutzer (nennen wir ihn Ben) zusätzlich zu seinem Onlinebanking-PIN einen Zahlencode, der aus sechs Ziffern besteht, kennen und teilweise eingeben, um sich anzumelden. Damit eine potenzielle Angreiferin (nennen wir sie Anna) nicht auf Anhieb alle sechs Ziffern erfährt, werden von der Bank bei jedem Anmeldevorgang nur zwei zufällig ausgewählte Ziffern abgefragt. Welche der sechs Ziffern abgefragt werden, bestimmt die Bank nach dem Zufallsprinzip. Ist z. B. der Code von Ben 235793 und beim Anmelden öffnet sich folgendes Fenster,

The screenshot shows a login security window with the following elements:

- Title: **Zum sicheren Login benötigen wir die 1. und 4. Ziffer Ihres Zugangscodes.**
- Input fields: Six boxes labeled 1 to 6. Box 1 contains '1', box 4 is empty, others are greyed out.
- Keypad: Buttons for digits 1-9, 0, and 'Korrektur'.
- Buttons: 'Abbrechen' and '> Anmelden'.

so muss Ben die Ziffern 2 und 7 eingeben. Will Anna nun den gesamten 6-stelligen Code stehlen, muss sie mehrere Male beim Einloggen „zuschauen“. Zu diesem Zweck installiert sie eine Schadsoftware auf Bens Computer, die ihr bei jedem Zuschauen die Beobachtung der beiden eingegebenen Ziffern und ihrer Position ermöglicht.

⁶ Auszug aus einer Abituraufgabe des Landes NRW 2017 GK bzw. LK HT B4

- a) Die Matrix U beschreibt den Prozess aus Annas Sicht von anfangs null bekannten Ziffern (Zustand z_0) bis hin zu sechs bekannten Ziffern (Zustand z_6). Dabei beschreibt z_i den Zustand mit i bekannten Ziffern ($i = 0, 2, 3, 4, 5, 6$). Der Zustand z_1 kann nicht eintreten, da nach dem ersten „Zuschauen“ sofort zwei Ziffern bekannt sind.

$$U = \begin{array}{c} \text{von} \\ \begin{array}{cccccc} z_0 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{15} & \frac{3}{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{15} & \frac{9}{15} & \frac{6}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{15} & \frac{8}{15} & \frac{10}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15} & \frac{5}{15} & 1 \end{pmatrix} \\ \text{nach} \\ \begin{array}{c} z_0 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{array} \end{array}$$

(1) Zeichnen Sie das Übergangsdiagramm.

(2) Betrachten Sie nun die zweite Spalte.

Erklären Sie im Sachzusammenhang die Einträge mit dem Wert Null in dieser Spalte. Leiten Sie die von Null verschiedenen Werte in dieser Spalte her.

- b) Ben meldet sich jeden Monat fünfmal beim Onlinebanking an.

(1) Bestimmen Sie $U^2 \cdot \vec{s}$ mit $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.

(2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Anna nach einem Monat den Code vollständig kennt, wenn sie vorher keine Ziffer des Codes kannte.

(3) Angenommen, Anna kennt bereits zwei Ziffern des Codes. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Anna nach dreimaligem Zuschauen der Code vollständig bekannt ist. (LK)

(4) Ermitteln Sie die Anzahl der Anmeldevorgänge, die Anna mindestens beobachten muss, um den Code mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit vollständig zu kennen.

- c) Betrachtet wird ein anderer stochastischer Prozess, der durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$

(1) Erklären Sie die Bedeutung für den stochastischen Prozess, wenn ein Diagonalelement den Wert 1 besitzt.

(2) Ermitteln Sie jeweils, welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung sich der durch A beschriebene Prozess bei Verwendung der Startverteilungen $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,3 \\ 0,6 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,5 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ auf lange Sicht nähert.

(3) Bestimmen Sie für den durch A beschriebenen Prozess die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf lange Sicht für die allgemeine Startverteilung $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. (LK)

(4) Beurteilen Sie nun ohne weitere Rechnung folgende Aussage:

Auf lange Sicht gibt es für jeden stochastischen Prozess genau eine sich stabilisierende Wahrscheinlichkeitsverteilung, die unabhängig von der Startverteilung ist.

4 Mehrstufige Prozesse und Populationsmatrizen⁷



Aufgabe 1 (Kälber und Kühe)

Aus Kälbern entwickeln sich im Laufe von zwei Jahren Kühe, die dann wieder Kälber bekommen und anschließend geschlachtet werden. Aus 25% der Kälber werden Kühe (die restlichen werden schon vorher geschlachtet) und jede Kuh bekommt durchschnittlich vier Kälber, bevor sie geschlachtet wird. Der Bauer hat einen Bestand von 20 Jungtieren und 20 Kühen.

- Stelle** die beschriebene Situation in einem Grafen **dar** und **ermittle** die Populationsmatrix U .
- Untersuche**, für wie viele Tiere der Stall mindestens ausgerichtet sein muss, wenn der Bestand der beschriebenen Entwicklung überlassen wird, ohne dass Tiere zugekauft, zusätzlich geschlachtet oder verkauft werden.

Die Überlebensrate der Kälber mit nun a bezeichnet und Vermehrungsrate der Kühe mit b (im obigen Fall war $a = 0,25$ und $b = 4$).

- Gib** eine Bedingung **an**, unter welcher der Bestand langfristig ausstirbt, konstant bleibt bzw. sich vermehrt.

Der Bauer plant, den Stall zu vergrößern und lässt jedes Jahr 10 % der zu schlachtenden Kühe am Leben. Für die Überlebens- und Vermehrungsrate gilt weiterhin $a = 0,25$ und $b = 4$.

- Stelle** die neue Situation in einem Grafen und als Prozessmatrix V **dar**.
- Untersuche**, wie viel Prozent der Kälber unter dem neuen Prozess V mindestens vier Jahre überleben.
- Berechne** die Populationsentwicklung unter V mit dem Bestand von 20 Kühen und 20 Kälbern für die nächsten zwei Jahre sowie für ein Jahr vorher.
- Beschreibe** die langfristige Entwicklung in der neuen Situation und **begründe** Deine Aussage.



Aufgabe 2 (Mehr zu Kälbern und Kühen)

Wir betrachten die Populationsprozesse U und V aus Aufgabe 1.

- Untersuche**, unter welcher Bedingung ein Bestandsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ von Jahr zu Jahr gleich bleibt. Berechne den Bestandsvektor für insgesamt 200 Tiere.
- Begründe**, dass es unter V keinen Bestandsvektor \vec{p} gibt, der jährlich unverändert bleibt.

Im Populationsprozess V sollen jedes Jahr **nach** den Schlachtungen und **nach** den Geburten der neuen Kälber zwei Kühe und zwei Kälber verkauft werden. Der Ausgangsbestand ist $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}$.

- Bestimme** den Bestandsvektor \vec{p}_1 für das Folgejahr.
- Ermittle** den Bestandsvektor \vec{p} , der unter dem Populationsprozess V mit **zusätzlicher** Entnahme von zwei Kälbern und zwei Kühen unverändert bleibt.

⁷ Fakultativ im LK Mathematik



Aufgabe 3 (Käferpopulation)

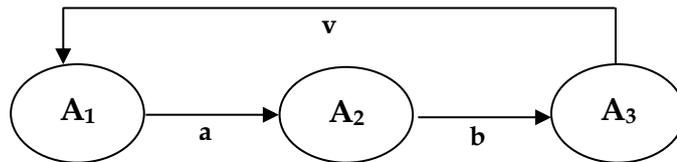
Ein Käfer (K) legt so viele Eier, dass sich daraus im nächsten Jahr 20 Larven entwickeln. Bald danach stirbt er. Ein Viertel dieser Larven überlebt das erste Jahr; im zweiten Jahr verpuppen sich 20 % der Larven und werden im dritten Jahr wieder zu einem Käfer. Die anfängliche Population besteht aus 80 einjährigen Larven (L_1), 30 zweijährigen Larven (L_2) und 18 Käfern.

- Zeichne den Übergangsgraphen und bestimme die Populationsmatrix U .
- Berechne die Population für die ersten drei Jahre.
- Ermittle U^2 und U^3 und überprüfe mithilfe dieser Matrizen die Ergebnisse zur Population der ersten drei Jahre.



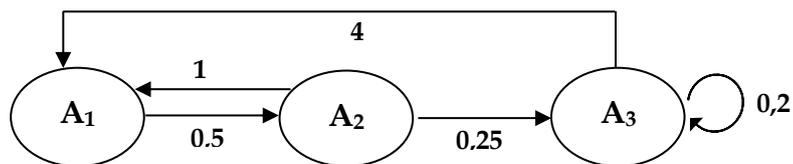
Aufgabe 4 (Populationsentwicklung bei einer Säugetierart)

Bei einer Säugetierart können die jährlichen Änderungen in einer aus drei Altersstufen A_1 , A_2 und A_3 bestehenden Population durch folgenden Graphen beschreiben werden. Dabei gelten folgenden Bedingungen: $v > 0$; $0 < a \leq 1$; $0 < b \leq 1$; Vermehrungsrate: v ; Überlebensraten: a und b .



- Bestimme die Übergangsmatrix U .
- Berechne U^2 und U^3 und ermittle eine Bedingung für a , b und v , so dass sich eine beliebige Population alle drei Jahre reproduziert.

Die Entwicklung einer zweiten Tierart lässt sich durch folgenden Graphen beschreiben:



- Gib die Populationsmatrix T an und beschreibe den Graphen aus biologischer Sicht.
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein Jungtier (A_1) mindestens fünf Jahre überlebt.

5 Kontrollaufgaben

Kompetenzraster

Ohne Hilfsmittel

Ich kann ...	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
Matrizenprodukte auf Definierbarkeit überprüfen und dann berechnen.	1				
Matrizenprodukte mit Parametereinträgen berechnen.	2a,b				
einen Übergangsgraphen zu einem Glücksspiel erstellen.	3a, 4a				
erklären, warum ein bestimmtes Glücksspiel unendlich lange dauern kann.	3a				
eine Zustandsverteilung bestimmen.	3b, 4b				
eine Prozessmatrix zu einer Situation erstellen.	3a, 4c				
ein Diagramm und eine Matrix zu einem Populationsprozess angeben.	5a				
Modellannahmen zu einem Populationsprozess angeben.	5b				
einen Bestandsvektor bestimmen.	5c				
eine Überlebensrate berechnen.	5d				
eine Tötungsrate angeben, damit der Populationsprozess stabil bleibt.	5e				

Unter Zuhilfenahme von Hilfsmitteln

Ich kann ...	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
Prozessmatrizen zu einem Prozess angeben.	6a				
zeigen, dass es sich um einen stochastischen Prozess handelt.	6a				
einen Übergangsgraphen erstellen.	6b				
Matrizenprodukte bestimmen, interpretieren und ggf. im Sachkontext prüfen.	6c,6e				
Zustandsvektoren berechnen und im Sachkontext prüfen.	6d,g				
stationäre Verteilung berechnen und deren Bedeutung im Kontext erklären.	6f				
mit einer Grenzmatrix eine mögliche Entwicklung beschreiben.	6h				
Zustandsvektoren unter Berücksichtigung einer Korrekturmatrix berechnen.	6i				
prüfen, ob eine frühere Korrektur eine Veränderung des Prozesses bedeutet.	6j				
bei einem Absorptionsprozess Absorptionswahrscheinlichkeiten bestimmen.	7a				
bei einem Absorptionsprozess mittlere Wartezeiten bestimmen.	7b				
Bedarfsmatrizen eines Prozesses zur Materialverflechtung bestimmen.	8a				
die Bedarfsmatrix des Gesamtprozesses berechnen.	8b				
Einträge einer Bedarfsmatrix interpretieren.	8b				
Rohstoffbedarf und Rohstoffkosten berechnen.	8c				
eine maximal mögliche Produktionsmenge berechnen.	8d				



Hilfsmittelfreie Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Matrizen A, B und C:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0,5 \\ 1 & 3 & -0,2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, B = (1 \quad 10 \quad 100) \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Erläutere, welche der Produkte A·B, A·C, B·C, B·A, C·A und C·B definiert sind, und **berechne** sie.

Aufgabe 2

- a) Gegeben sei die stochastische Matrix $S = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$ mit $0 \leq a, b \leq 1$ und einem Zustandsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

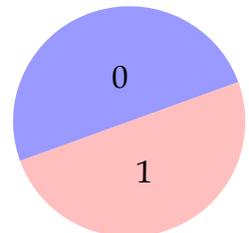
Begründe, dass bei den Vektoren \vec{x} und $S \cdot \vec{x}$ die Summe der Komponenten gleich ist.

- b) Gegeben ist die stochastische Matrix $M = \begin{pmatrix} a & 0,5 \\ 1-a & 0,5 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq a \leq 1$.

Untersuche, ob es eine reelle Zahl a gibt mit $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3

Bei einem Spiel wird das abgebildete Glücksrad mehrfach gedreht und die Punktzahl jeweils addiert. Das Spiel ist beendet, wenn der Spieler 2 Punkte erreicht.



- a) **Zeichne** einen Übergangsgraphen und Prozessmatrix zu diesem Spiel. **Erkläre**, warum dieses Spiel theoretisch unendlich lange dauern kann.
- b) **Bestimme** die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spiel nach höchstens drei Durchgängen endet.

Aufgabe 4⁸

Ein System ist nach jeder Minute in einem der Zustände Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 und Z_5 . Rechts befindet sich die zugehörige Übergangsmatrix.

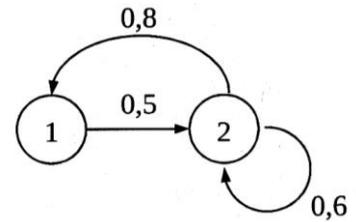
$$U = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 1 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) **Zeichne** ein Prozessdiagramm.
- b) Am Anfang ist das System in Zustand Z_1 .
Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Systemzustände nach 1 Minute, 2 Minuten und 3 Minuten.
- c) **Bestimme** eine Übergangsmatrix für Beobachtungen in 2 Minuten-Abständen.

⁸ Lambacher Schweizer LK Mathematik NRW, 2017; S. 367

Aufgabe 5 (Entwicklung einer Population)⁹

Die jährliche Entwicklung der Population einer Vogelart bestehend aus Jung- (1) und Altvögeln (2) ist durch den folgenden Übergangsgraphen gegeben:



- Gib** zu dem Übergangsgraphen eine Übergangsmatrix U an.
- Beschreibe** anhand des Übergangsgraphen, nach welchen Modellannahmen die Entwicklung der Population dieser Vogelart abläuft.

Die Population besteht zu Beobachtungsbeginn aus 80 Jungvögeln und 110 Altvögeln.

- Berechne** den Bestandsvektor nach einem Jahr sowie den Bestandsvektor des Vorjahres.
- Bestimme**, wie viel Prozent der Jungvögel drei Jahre alt werden.

Um die Population konstant zu halten, soll der Ausgangsbestand an Altvögeln durch Tötung so verändert werden, dass er sich innerhalb eines Jahres nicht mehr ändert. Die Anzahl an Jungvögeln bleibt unverändert.

- Untersuche**, wie viele Altvögel getötet werden müssen, damit der Bestandsvektor von Jahr zu Jahr unverändert bleibt.

⁹ Fakultativ im LK



Aufgaben unter Zuhilfenahme des GTR

Aufgabe 6 (Entwicklung der Wirtschaftssektoren)

Der französische Nationalökonom Jean Fourastié stellte 1949 eine Theorie zur wirtschaftlichen Entwicklung von Entwicklungsländern auf. Danach sind in der vorindustriellen Gesellschaft die meisten Erwerbstätigen im primären Wirtschaftssektor I (Forst- und Landwirtschaft), in Folge der industriellen Revolution immer mehr Erwerbstätige im sekundären Sektor II (Industrie und produzierendes Gewerbe) und schließlich in der postindustriellen Gesellschaft die meisten Erwerbstätigen im tertiären Sektor III (Dienstleistungen) beschäftigt. Nach Fourastié bewirkt das wirtschaftliche Wachstum eine Verlagerung des Schwerpunktes der Wirtschaft vom primären über den sekundären zum tertiären Sektor.

Zwei Modelle F_1 und F_2 sollen nun den Entwicklungsprozess der Beschäftigungsanteile zwischen den drei Wirtschaftssektoren **über einen Zeitraum von 10 Jahre** beschreiben. Die folgenden **Tabellen 1** und **2** beschreiben diesen Prozess:

F_1	von		
	I	II	III
I	0,75	0	0
II	0,10	0,90	0
III	0,15	0,10	1

Tabelle 1: Modell F_1

F_2	von		
	I	II	III
I	0,50	0,01	0,01
II	0,20	0,60	0,12
III	0,30	0,39	0,87

Tabelle 2: Modell F_2

Die folgende **Tabelle 3** gibt die prozentualen Verteilungen der Beschäftigten auf die drei Wirtschaftssektoren in den USA für die Jahre 1980, 1990 und 2000 an:

Sektor \ Jahr	1980	1990	2000
I Landwirtschaft	0,04	0,03	0,02
II Industrie	0,30	0,27	0,24
III Dienstleistung	0,66	0,70	0,74

Tabelle 3: Prozentuale Verteilung der Beschäftigten auf die drei Sektoren

- Gib** die Übergangsmatrizen F_1 und F_2 für die beiden Modelle **an**, und **zeige**, dass es sich in beiden Fällen um einen Austauschprozess handelt.
- Stelle** den Übergangsgraphen dar.
- Berechne** F_1^2 und F_2^2 , und **gib** ihre Bedeutungen im Sachzusammenhang an.

Es sei $\overrightarrow{v_{1980}}$ die prozentuale Verteilung der Erwerbstätigen auf die drei Wirtschaftssektoren im Jahr 1980 (vgl. Tabelle 3).

- Ermittle** für beide Modelle jeweils $\overrightarrow{v_{1990}}$ und $\overrightarrow{v_{2000}}$ und **entscheide**, ob F_1 und/oder F_2 gute Modelle für die wirtschaftliche Entwicklung in den USA im Zeitraum von 1980 bis 2000 sind.

$$\text{Es gilt } F_1^{80} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } F_2^{20} = \begin{pmatrix} 0,02 & 0,02 & 0,02 \\ 0,23 & 0,23 & 0,23 \\ 0,75 & 0,75 & 0,75 \end{pmatrix}.$$

- Interpretiere** die Matrizen F_1^{80} und F_2^{20} im obigen Sachzusammenhang und **entscheide** mit Hilfe dieser beiden Matrizen, welches der beiden Modelle langfristig realistischer ist.

- f) **Ermittle** für das Modell F_2 mithilfe des Ansatzes $F_2 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ eine stationäre Verteilung \vec{v} und **erkläre** die Bedeutung der stationären Verteilung im Sachzusammenhang.

Die Rohstoffreserven werden immer knapper. Ökologische Probleme zwingen die Politik zum Handeln. Der ökologische Landbau soll gestärkt werden. Der prozentuale Anteil der Beschäftigten im Industriesektor II sinkt immer weiter. Wegen politischer Vorgaben lautet die Übergangsmatrix F_3 zwischen den drei Wirtschaftssektoren **ab dem Jahr 2000** (F_3 beschreibt wie F_1 und F_2 den Austauschprozess über einen Zeitraum von zehn Jahren):

$$F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0,10 & 0 \\ 0 & 0,50 & 0 \\ 0 & 0,40 & 1 \end{pmatrix}.$$

- g) **Bestimme** die Verteilung der Beschäftigten auf die einzelnen Sektoren unter diesen Voraussetzungen im Jahr 2020.

[Hinweis: Verwende für die Startverteilung die Werte des Jahres 2000 aus Tabelle 3.]

$$\text{Es gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} F_3^n = \begin{pmatrix} 1 & 0,20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,80 & 1 \end{pmatrix}$$

- h) **Beschreibe**, wie sich unter diesen Voraussetzungen die relative Verteilung der einzelnen Wirtschaftssektoren langfristig entwickelt.

Zahlreiche Lobbyisten des Industriesektors üben Druck auf die Politik aus. Sie wollen ein Aussterben des Industriesektors verhindern. Es wird vertraglich vereinbart, dass **ab dem Jahr 2040** durch gezielte Fördermaßnahmen des Industriesektors **für zehn Jahre** eine Verteilung hin zum Industriesektor stattfindet. Anschließend verlaufen die Vorgaben wieder nach dem Modell F_3 . Folgende Korrekturmatri­x K wird vereinbart:

$$K = \begin{pmatrix} 0,60 & 0 & 0 \\ 0,40 & 1 & 0,40 \\ 0 & 0 & 0,60 \end{pmatrix}$$

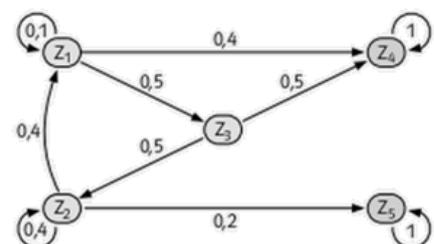
- i) **Ermittle** unter Berücksichtigung der Matrizen F_3 und K sowie der prozentualen Verteilung \vec{v}_{2000} einen Term für den Vektor \vec{v}_{2050} , der die prozentuale Verteilung der Beschäftigten im Jahr 2050 beschreibt.

[Hinweis: Hier muss nicht gerechnet werden.]

- j) **Beurteile**, ob das Ergebnis für \vec{v}_{2050} beeinflusst würde, wenn die gleiche Korrektur 20 Jahre früher erfolgte.

Aufgabe 7 (Absorptionswahrscheinlichkeit und mittlere Wartezeit)¹⁰

- a) **Bestimme** mithilfe der Grenzmatrix und mithilfe eines LGS für den in der rechts befindlichen Abbildung dargestellten Prozess die Wahrscheinlichkeiten, von den inneren Zuständen aus die absorbierende Zustände zu erreichen.

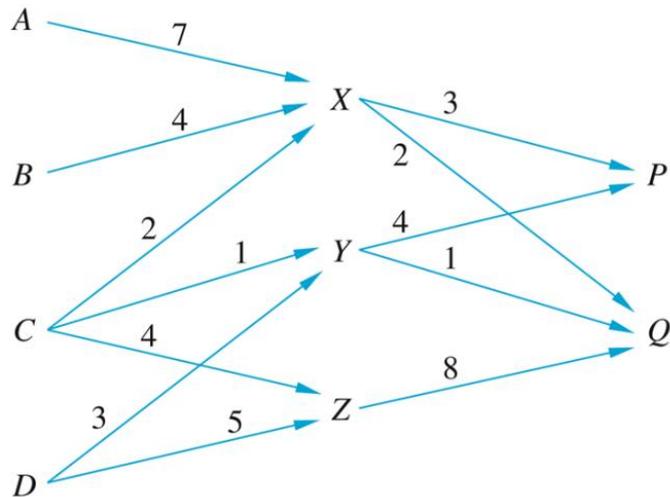


- b) **Ermittle** die mittleren Wartezeit für den obigen Prozess.

¹⁰ Fakultativ im LK

Aufgabe 8 (Materialverflechtung)¹¹

In einem Unternehmen werden aus den Rohstoffen A, B, C, D in der ersten Produktionsstufe die Zwischenprodukte X, Y, Z hergestellt, die wiederum in einer zweiten Produktionsstufe zu den Endprodukten P und Q weiterverarbeitet werden, so wie es die nachfolgende Abbildung wiedergibt. Die Zahlen neben den Pfeilen geben an, wie viele Mengeneinheiten (ME) eines Stoffes für die Produktion benötigt werden.



- a) **Gib** die Bedarfsmatrizen B_{RZ} und B_{ZE} der beiden Produktionsstufen **an**.
- b) **Bestimme** die Bedarfsmatrix $C = B_{RE}$ der Gesamtproduktion und **gib** die Bedeutung des Eintrages c_{32} der Matrix C **an**.

Eine Firma liefert die Rohstoffe für einen Auftrag von 30 ME des Endproduktes P und 50 ME des Endproduktes Q. Die Rohstoffpreise pro ME betragen 0,25 Geldeinheiten (GE) für A, 2 GE für B, 16 GE für C und 3 GE für D.

- c) **Bestimme** den Rohstoffbedarf **und** die Rohstoffkosten des Auftrages. (6P)

Im Lager befinden sich 70 ME des Zwischenproduktes X, 60 ME von Y und 160 ME von Z.

- d) **Untersuche**, wie viele ME der Endprodukte P und Q hergestellt werden können.

¹¹ Fakultativ im LK

Lösungen

1 Was ist eine Matrix und wie rechnet man damit?

Aufgabe 1

a) A: 3×4-Matrix; b: 5×2-Matrix; C: 3×3-Matrix

b) $a_{23} = 0$; $a_{34} = 0$; $b_{52} = 1$; $b_{22} = 4$; $c_{22} = 1$; $c_{33} = -2$.

Aufgabe 2

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

$$\text{a) } A + B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A - B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } 3 \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 9 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } -0,1 \cdot B = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,2 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0 & 0,1 \end{pmatrix} \quad \text{e) } 2 \cdot A - 3 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 5 \\ 0 & -7 & 1 \\ 1 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} -6 \\ 21 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 20 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 5 & -14 & 1 \\ -2 & 8 & -4 \\ 4 & -18 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \quad \text{d) } (99)$$

Aufgabe 6

a)	Sorte I	Sorte II	Sorte III	Sorte IV
A	10	5	0	3
B	6	15	10	1
C	0	0	20	10

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 & 3 \\ 6 & 15 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \\ 60 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 795 \\ 1545 \\ 2100 \end{pmatrix}.$$

Kunde A zahlt 795 €, Kunde B 1545 € und Kunde C 2100 €.

2 Materialverflechtung

Aufgabe 2

a)

			Jan	Feb	März
		X	5	9	4
		Y	3	7	11
R	X	4	20	36	16
S		2	25	53	63
T		1	14	30	37

$$\text{b) } (5 \quad 2 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 20 & 36 & 16 \\ 25 & 53 & 63 \\ 14 & 30 & 37 \end{pmatrix} = (206 \quad 406 \quad 354)$$

Im Februar wird mit 406 € am meisten Geld ausgegeben.

Aufgabe 3

				E ₁	E ₂	E ₃
			Z ₃	2	2	1
			Z ₂	5	0	2
			Z ₁	3	7	3
R ₁	a	b	c	2a+5b+3c	2a+7c	a+2b+3c
R ₂	8	1	3	30	37	19
R ₃	2	5	2	11	18	18

Ein Vergleich mit der dritten Bedarfsmatrix ergibt das folgende LGS:

$$2a + 5b + 3c = 25$$

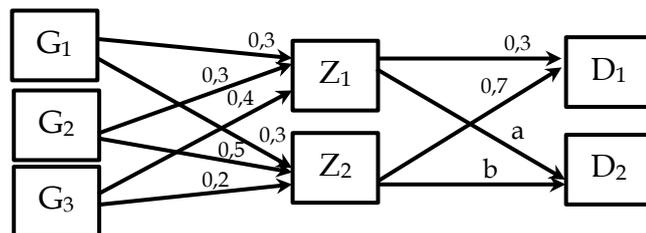
$$2a + 7c = 10$$

$$a + 2b + 3c = 11$$

Mit dem Gaußverfahren oder dem GTR folgt: $a = 5, b = 3, c = 0$.

Aufgabe 4

$$\text{a) } A_{GZ} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \text{ und } A_{ZD} = \begin{pmatrix} 0,3 & a \\ 0,7 & b \end{pmatrix}$$



b) Der Inputvektor lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3,3 \\ 3,7 \end{pmatrix}$, der Outputvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Gesucht sind die Parameter a und b der Bedarfsmatrix $A_{ZD} = \begin{pmatrix} 0,3 & a \\ 0,7 & b \end{pmatrix}$. Es gilt: $\vec{x} = A_{ZD} \cdot \vec{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3,3 \\ 3,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & a \\ 0,7 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 + 4a \\ 2,1 + 4b \end{pmatrix}$. Also erhält man: $3,3 = 0,9 + 4a$ und $3,7 = 2,1 + 4b$, also $a = 0,6$ und $b = 0,4$. Zur Herstellung von einer Tonne Dünger 2 benötigt man 0,6 Tonnen Zwischenprodukt 1 und 0,4 Tonnen Zwischenprodukt 2.

$$\text{c) } A_{GD} = A_{GZ} \cdot A_{ZD} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,44 & 0,38 \\ 0,26 & 0,32 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = A_{GD} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,44 & 0,38 \\ 0,26 & 0,32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,1 \\ 2,84 \\ 2,06 \end{pmatrix}$$

Für 3 Tonnen des Düngers 1 und 4 Tonnen des Düngers 2 werden 2,1 Tonnen von Grundstoff 1, 2,84 Tonnen von Grundstoff 2 und 2,06 Tonnen von Grundstoff 3 benötigt.

d) Für den transponierten Kostenvektor gilt: $(100 \ 150 \ 200) \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,44 & 0,38 \\ 0,26 & 0,32 \end{pmatrix} = (148 \ 151)$. Die Kosten für 1 t D₁ sind 148 € und für 1 t D₂ 151 €. Die Gesamtkosten für 3 t D₁ und 4 t D₂ erhält man durch folgende Matrizenmultiplikation $(148 \ 151) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (1048)$. Sie betragen 1048 €.

e) Ansatz:

$$(x \ y \ 200) \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,44 & 0,38 \\ 0,26 & 0,32 \end{pmatrix} = (152 \ 152) \Leftrightarrow (0,3x + 0,44y + 52 \ 0,3x + 0,38y + 64) = (152 \ 152)$$

Man erhält das LGS für x und y:

$$\begin{array}{l} 0,3x + 0,44y + 52 = 152 \\ 0,3x + 0,38y + 64 = 152 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 0,3 \quad 0,44 \quad | \quad 100 \\ 0,3 \quad 0,38 \quad | \quad 88 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 0,3 \quad 0,44 \quad | \quad 100 \\ 0 \quad 0,06 \quad | \quad 12 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1 \quad \frac{22}{15} \quad | \quad 333\frac{1}{3} \\ 0 \quad 1 \quad | \quad 200 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Eine Tonne des ersten Grundstoffes kostet 40 €, eine Tonne des zweiten Grundstoffes 200 €.

$$f) \begin{pmatrix} 45 \\ 55 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3z_1 + 0,3z_2 \\ 0,3z_1 + 0,5z_2 \\ 0,4z_1 + 0,2z_2 \end{pmatrix} \text{ ergibt des LGS mit den Unbekannten } z_1, z_2 \text{ und } g_3:$$

$$0,3z_1 + 0,3z_2 = 45$$

$$0,3z_1 + 0,5z_2 = 55.$$

$$0,4z_1 + 0,2z_2 = g$$

Die ersten beiden Gleichungen liefern mit dem GTR die Lösungen $z_2 = 50$, $z_1 = 100$ und damit durch Einsetzen in die dritte Gleichung $g_3 = 50$. Die 100 t Z₁ und 50 t Z₂ können restlos aufgebraucht werden durch 45 t G₁, 55 t G₂ und 50 t G₃.

3 Stochastische Prozesse

Aufgabe 1

a) Für die Anzahl der Teilchen in Hälfte A und Hälfte B nach einer Zeiteinheit sowie nach zwei und drei Zeiteinheit gilt:

$$x_1 = 0,9 \cdot 3000 + 0,2 \cdot 9000 = 4500 \text{ und } y_1 = 0,1 \cdot 3000 + 0,8 \cdot 9000 = 7500$$

$$x_2 = 0,9 \cdot 4500 + 0,2 \cdot 7500 = 5550 \text{ und } y_2 = 0,1 \cdot 4500 + 0,8 \cdot 7500 = 6450$$

$$x_3 = 0,9 \cdot 5550 + 0,2 \cdot 6450 = 6285 \text{ und } y_3 = 0,1 \cdot 5550 + 0,8 \cdot 6450 = 5715$$

b) Die Prozessmatrix U erhält man durch folgende Tabelle:

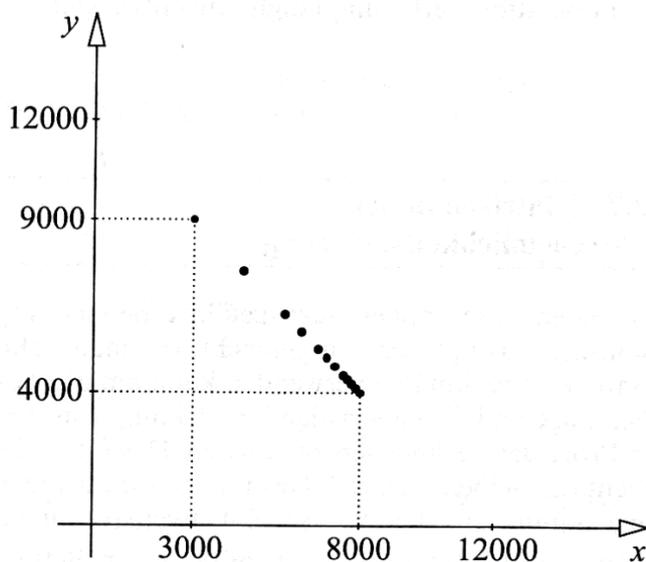
	von	A	B
nach			
A		0,9	0,2
B		0,1	0,8

$$\text{Also: } U = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

c) $\vec{v}_1 = U \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3000 \\ 9000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4500 \\ 7500 \end{pmatrix}; \vec{v}_2 = U \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5550 \\ 6450 \end{pmatrix}; \vec{v}_3 = U \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 6285 \\ 5715 \end{pmatrix}$

d) $\vec{v}_4 = U \cdot \vec{v}_3 = U \cdot U \cdot \vec{v}_2 = U \cdot U \cdot U \cdot \vec{v}_1 = U \cdot U \cdot U \cdot U \cdot \vec{v}_0 = U^4 \cdot \vec{v}_0; \vec{v}_{10} = U^{10} \cdot \vec{v}_0; \vec{v}_n = U^n \cdot \vec{v}_0$

e)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	3000	4500	5550	6285	6799,5	≈ 7160	≈ 7412	≈ 7588	≈ 7712	≈ 7798	≈ 7859
y_i	9000	7500	6450	5715	5200,5	≈ 4840	≈ 4588	≈ 4412	≈ 4288	≈ 4202	≈ 4141



f) Ein Zustand $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ändert sich genau dann nicht mehr, wenn gilt: $U \cdot \vec{v} = \vec{v}$. Offenbar gilt:

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8000 \\ 4000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 4000 \end{pmatrix}.$$

g) $U \cdot \vec{v} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ beschreibt das folgende lineare Gleichungssystem:

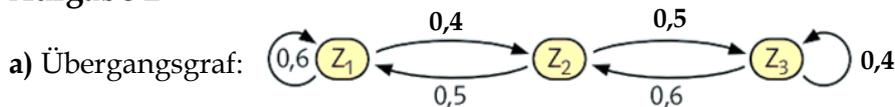
$$\begin{aligned} (1) \quad 0,9x + 0,2y &= x &\Leftrightarrow (1) - 0,1x + 0,2y &= 0 \\ (2) \quad 0,1x + 0,8y &= y &\Leftrightarrow (2) + 0,1x - 0,2y &= 0 \end{aligned}$$

h) Man erhält als Lösung: $x = 2y$, also den Lösungsvektor $\vec{v} = y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nun interessiert uns die Lösung mit $x + y = 12000$, da sich insgesamt 12000 Teilchen im Kasten befinden. Setzt man $x = 2y$ in die Zusatzbedingung ein erhält man $3y = 12000$, also: $y = 4000$.

i) Die stabile Verteilung ändert sich nicht, da die obigen Rechnungen unabhängig von der Startverteilung sind.

Gegeben ist folgendes Prozessdiagramm eines stochastischen Prozesses:

Aufgabe 2



$$U = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{v}_1 = U \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = U \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{75} \\ \frac{49}{150} \\ \frac{43}{150} \end{pmatrix}$$

c) Es sterben Menschen und scheiden aus dem System heraus. Menschen ziehen in andre Städte und fallen aus dem System heraus.

Aufgabe 3

a) Übergangsgraf:



$U = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$. Es handelt sich um einen Austauschprozess, da die Prozessmatrix U quadratisch mit nicht negativen Einträgen ist, und die beiden Spaltensummen 1 sind. Bezogen auf die Anwendungssituation bedeutet dies, dass insgesamt keine Insekten verloren gehen und alle Insekten entweder Merkmal A oder Merkmal B haben.

b) $\vec{v}_1 = U \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = U \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0,425 \\ 0,575 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_3 = U \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0,4125 \\ 0,5875 \end{pmatrix}$

c) $\vec{v}_{100} = U^{100} \cdot \vec{v}_0$ oder $\vec{v}_{100} = U \cdot \vec{v}_{99}$.

d) $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$

e) $0,4 \cdot 10$ Millionen = 4 Millionen Insekten haben langfristig Merkmal A, $0,6 \cdot 10$ Millionen = 6 Millionen Insekten besitzen auf Dauer Merkmal B.

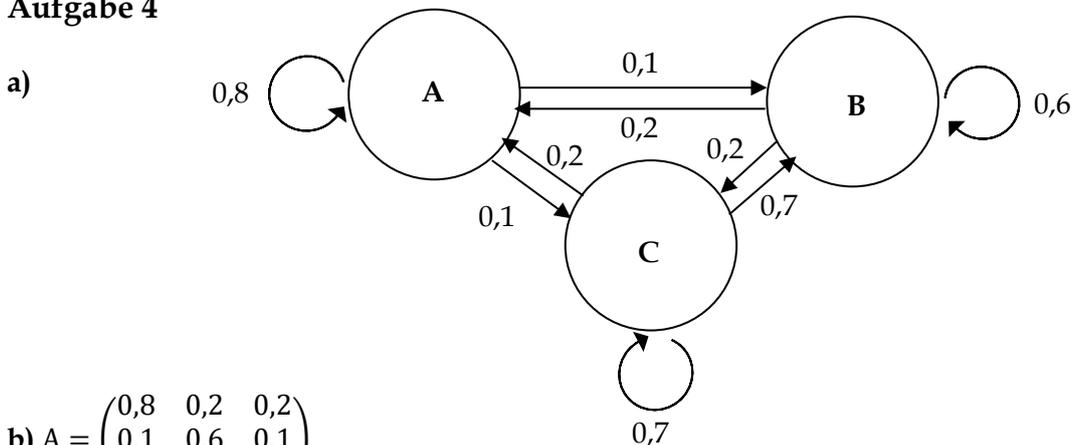
f) $U \cdot \vec{v} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ beschreibt das folgende lineare Gleichungssystem:

(1) $0,6x + 0,3y = x \Leftrightarrow (1) - 0,4x + 0,3y = 0$
 (2) $0,4x + 0,7y = y \Leftrightarrow (2) + 0,4x - 0,3y = 0$. Man erhält als Lösung: $x = 0,75y$, also den Lösungsvektor $\vec{v} = y \cdot \begin{pmatrix} 0,75 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nun interessiert uns die Lösung mit $x + y = 1$, da beide Anteile x und y sich zu $100\% = 1$ ergänzen. Setzt man $x = 0,75y$ in die Zusatzbedingung ein erhält man $1,75y = 1$, also: $y = \frac{4}{7} \approx 57\%$. Damit beträgt $x = \frac{3}{7} \approx 43\%$.

g) $V^2 = \begin{pmatrix} 0,48 & 0,39 \\ 0,52 & 0,61 \end{pmatrix}; V^4 = \begin{pmatrix} 0,4332 & 0,4251 \\ 0,5668 & 0,5749 \end{pmatrix}; V^8 \approx \begin{pmatrix} 0,43 & 0,43 \\ 0,57 & 0,57 \end{pmatrix}; V^{16} \approx \begin{pmatrix} 0,43 & 0,43 \\ 0,57 & 0,57 \end{pmatrix}$

V^8 beschreibt den Austauschprozess über einen Zeitraum von 8 Generationen und entspricht in etwa der Grenzmatrix, in der die beiden Spalten der stabilen Verteilung entsprechen.

Aufgabe 4



b) $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$

A ist quadratisch mit Spaltensumme 1 und nichtnegativen Einträgen.

c) $\vec{x}_1 = A \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,38 \\ 0,35 \\ 0,27 \end{pmatrix}$ $\vec{x}_2 = A \cdot \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0,428 \\ 0,275 \\ 0,297 \end{pmatrix}$

d) Ansatz: $\vec{x}_0 = A \cdot \vec{x}_{-1} \Leftrightarrow \vec{x}_{-1} = A^{-1} \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0,8 \\ \frac{1}{30} \end{pmatrix}$

e) $\vec{x}_{10} = A^{10} \cdot \vec{x}_0$

f) $A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ liefert ein homogenes LGS. Mit der Zusatzbedingung $a + b + c = 1$ ergibt sich als

stationäre Verteilung $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix}$. D. h., auf Dauer befinden sich 50 % der Fahrzeuge in Standort A,

20 % in Standort B und 30 % in Standort C. Mithilfe des TGR multipliziert man die Matrix A wiederholt mit sich selber. Es ergibt sich schon für $A^{16} \approx G = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$.

g) 60 Autos befinden sich langfristig in Standort A, 24 Autos in Standort B, 36 Autos in Standort C.

h) Der Eintrag b_{11} erhöht sich auf 0,85. Für die Summe der beiden anderen Einträge bleibt noch 0,15 übrig, da es sich um einen Austauschprozess handelt und keine Autos dazukommen. Die 0,15 werden mit q und $0,15 - q$ für $0 \leq q \leq 0,15$ auf b_{21} und b_{31} aufgeteilt: $q + 0,15 - q = 0,15$. Die zweite und dritte Spalte von B entsprechen der zweiten und dritten Spalte von A.

i) Der Ansatz $\begin{pmatrix} 0,85 & 0,2 & 0,2 \\ 0,15 - q & 0,6 & 0,1 \\ q & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 40 \end{pmatrix}$ liefert $q = 0,1$ und $a = 50$ und $b = 30$.

j) Ansatz: $\begin{pmatrix} 0,85 & 0,2 & 0,2 \\ 0,15 - q & 0,6 & 0,1 \\ q & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 50, q = \frac{34-b}{40}, q = \frac{c-36}{40}$

Wegen $0 \leq q \leq 0,15$ gilt $0 \leq \frac{c-36}{40} \leq 0,15 \Leftrightarrow 0 \leq c - 36 \leq 6 \Leftrightarrow 36 \leq c \leq 42$. Die mögliche Zahl von Autos am Standort C beträgt maximal 42 und minimal 36 Autos. Daher gilt $34 \leq c \leq 28$. Im „maximalen“ Fall erhält man $a = 50$, $b = 28$ und $c = 42$. q beträgt dabei 0,15.

Aufgabe 5

a) Ein Spieler kann theoretisch unendlich lange in Zustand 1 bzw. Zustand 2 verbleiben und nie in Zustand 3 gelangen.

b) $U = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,6 & 1 \end{pmatrix}$ ist quadratisch, mit Spaltensumme 1 und nichtnegativen Einträgen, also Matrix eines stochastischen Prozesses. Die Summe der Pfeilwahrscheinlichkeiten, die von einem Zustand abgehen beträgt 1.

c) Man berechne mit dem GTR für $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = U^2 \cdot \vec{v}_0$, $\vec{v}_3 = U^3 \cdot \vec{v}_0$ und $\vec{v}_{10} = U^{10} \cdot \vec{v}_0$ und lese die Wahrscheinlichkeiten im jeweiligen Zustandsverteilungsvektor ab.

$$\vec{v}_2 = U^2 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,48 \\ 0,48 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = U^3 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,008 \\ 0,224 \\ 0,768 \end{pmatrix}, \vec{v}_{10} = U^{10} \cdot \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0,0004 \\ 0,9996 \end{pmatrix}$$

Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Level des Spiels können durch die drei Komponenten abgelesen werden. Zum Beispiel beträgt die Wahrscheinlichkeit nach drei Spielen immer noch in Level 1 zu sein 0,8 %. Nach 10 Spielen in Level 2 zu sein hat eine Wahrscheinlichkeit von 0,0004. Nach zwei Spielen beträgt die Wahrscheinlichkeit, Level 3 erreicht zu haben, 48 %.

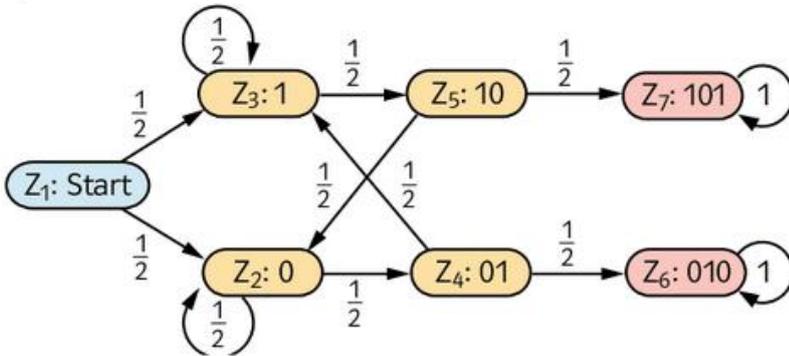
d) Die Komponenten des Vektors $\vec{v}_n = U^n \cdot \vec{v}_0$ geben die Wahrscheinlichkeiten an, den Level 1, 2 bzw. 3 erreicht zu haben.

e) In Ergänzung zu c) $\vec{v}_1 = U \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_5 = U^5 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,00032 \\ 0,03968 \\ 0,96 \end{pmatrix}$

f) $U^{100} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = G$; $\vec{v} = G \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine stabile Verteilung des absorbierenden Prozesses.

Aufgabe 6

a)



Das Muster 010 kann also am Ende des unteren „Astes“ auftreten, das Muster 101 am Ende des oberen.

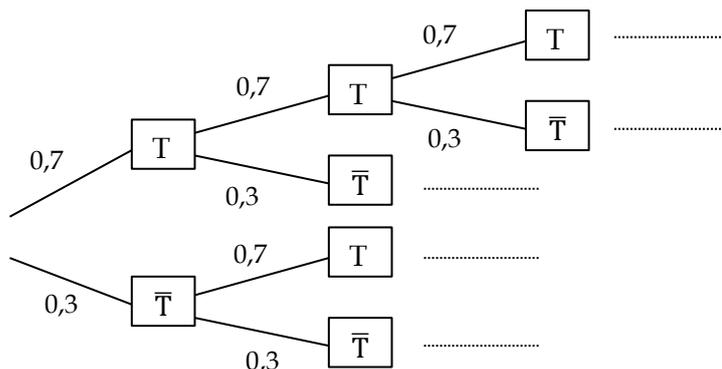
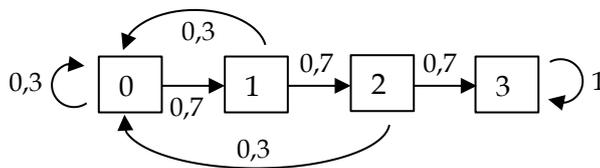
$$b) U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$c) \text{ Startverteilung } \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_1 = U \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\vec{v}_2 = U \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

a)



b) $P(\text{Fertig nach 3 W\u00fcrfen}) = P(\text{Fertig mit dem 3. Wurf}) = P(T, T, T) = 0,7^3 = \mathbf{34,3\%}$
 $P(\text{Fertig mit 4. Wurf}) = P(\bar{T}, T, T, T) = 0,3 \cdot 0,7^3 = 10,29\%$
 $P(\text{Fertig nach 3 oder 4 W\u00fcrfen}) = P(T, T, T, -) + P(\bar{T}, T, T, T) = 0,7^3 \cdot 1 + 0,3 \cdot 0,7^3 = \mathbf{0,4459}$
 $P(\text{Fertig mit 5. Wurf}) = P(\bar{T}, \bar{T}, T, T, T) + P(T, \bar{T}, T, T, T) = 0,3^2 \cdot 0,7^3 + 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,7^3 = 10,29\%$
 $P(\text{Fertig nach 3, 4 oder 5 W\u00fcrfen}) = P(\text{Fertig nach 3 oder 4 W\u00fcrfen}) + P(\text{Fertig mit dem 5. Wurf})$
 $= 0,4459 + 10,29\% = \mathbf{54,88\%}$

$$\text{c) } U = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,3 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}$$

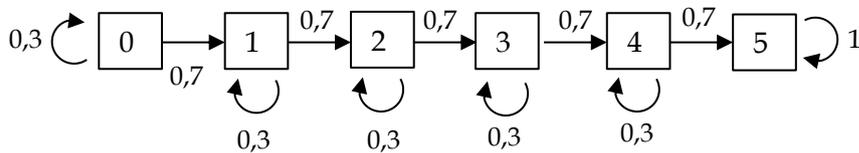
$$\text{d) } U^2 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,09 & 0 \\ 0,21 & 0,21 & 0,21 & 0 \\ 0,49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,49 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}, U^3 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,153 & 0,09 & 0 \\ 0,21 & 0,21 & 0,063 & 0 \\ 0,147 & 0,147 & 0,147 & 0 \\ 0,343 & 0,49 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}, U^{100} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen beschreiben den stochastischen Prozess bei einer Wurfdauer von 2, 3 und langfristig von 100 W\u00fcrfen.

e)

n	1	2	3	4	5	10
$\vec{v}_n = U^n \cdot \vec{v}$ Zustandsverteilung nach n W\u00fcrfen	$\begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,21 \\ 0,49 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,21 \\ 0,147 \\ \mathbf{0,343} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,1971 \\ 0,21 \\ 0,147 \\ \mathbf{0,4459} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,16623 \\ 0,13797 \\ 0,147 \\ \mathbf{0,5488} \end{pmatrix}$	$\approx \begin{pmatrix} 0,053 \\ 0,047 \\ 0,041 \\ 0,859 \end{pmatrix}$

f)



$$V = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}$$

n	5	6	7	10
$\vec{v}_n = V^n \cdot \vec{v}$ Zustandsverteilung nach n W\u00fcrfen	$\approx \begin{pmatrix} 0,0024 \\ 0,0284 \\ 0,1323 \\ 0,3087 \\ 0,3601 \\ \mathbf{0,1681} \end{pmatrix}$	$\approx \begin{pmatrix} 0,0007 \\ 0,0102 \\ 0,0596 \\ 0,1852 \\ 0,3241 \\ \mathbf{0,4202} \end{pmatrix}$	$\approx \begin{pmatrix} 0,0002 \\ 0,0036 \\ 0,0250 \\ 0,0972 \\ 0,2269 \\ \mathbf{0,6471} \end{pmatrix}$	$\approx \begin{pmatrix} 0,0000 \\ 0,0001 \\ 0,0014 \\ 0,0090 \\ 0,0367 \\ \mathbf{0,9527} \end{pmatrix}$

$P(\text{Fertig mit 5. Wurf}) = P(T, T, T, T, T) = 0,7^5 \approx 16,81\%$

$P(\text{Fertig mit 6. Wurf}) = P(\text{Fertig nach 6 W\u00fcrfen}) - P(\text{Fertig mit 5. Wurf}) \approx 0,4202 - 0,1681 = 0,2521$

$P(\text{Fertig mit 7. Wurf}) = P(\text{Fertig nach 7 W\u00fcrfen}) - P(\text{Fertig nach 6 W\u00fcrfen}) \approx 0,2269$

Aufgabe 8

a) Es können fünf Zustände vorliegen. Dies entspricht der Anzahl der möglichen Wappen (0, 1, 2, 3, 4). Von jedem Zustand gehen Pfeilwahrscheinlichkeiten ab, die addiert 1 ergeben. Je mehr Wappen oben liegen, desto geringer wird die Wahrscheinlichkeit, eine weitere Münze zum Wappen umzudrehen.

b) individuelle Lösung

$$c) \vec{g}_1 = U^{100} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,375 \\ 0,625 \end{pmatrix}$$

d) Geht man von Zustand Z_1 aus, gewinnt man zu 37,5%, während man mit einer Wahrscheinlichkeit von 62,5% verliert.

$$e) \vec{g}_2 = U^{100} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,50 \\ 0,50 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{g}_3 = U^{100} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,625 \\ 0,375 \end{pmatrix}$$

f) Um von Zustand Z_1 nach Z_4 zu gelangen, gibt es nur eine Möglichkeit. Man gelangt zunächst mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{4}$ zu Z_2 und von dort mit der Wahrscheinlichkeit a_2 zu Z_4 . Daher gilt für die Wahrscheinlichkeit von Z_1 aus zu gewinnen $\mathbf{a}_1 = \frac{3}{4}\mathbf{a}_2$. Um von Zustand Z_2 aus zu gewinnen, gibt es zwei Möglichkeiten. Einerseits gelangt man mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ zu Z_1 und von dort mit einer Wahrscheinlichkeit von a_1 zu Z_4 . Andererseits gelangt man über Z_3 zu Z_4 . Insgesamt gilt also für die Wahrscheinlichkeit von Z_2 zu Z_4 zu gelangen: $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_3$. Um von Z_3 nach Z_4 zu gelangen, gibt es zwei Wege: direkt nach Z_4 oder über Z_2 nach Z_4 . Für die Wahrscheinlichkeit von Z_3 aus zu gewinnen, gilt: $\mathbf{a}_3 = \frac{3}{4}\mathbf{a}_2 + \frac{1}{4}$.

$$g) \text{ Man kann das LGS umformen in: } \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \text{ Mit dem GTR folgt } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,375 \\ 0,50 \\ 0,625 \end{pmatrix}$$

h) Die Absorptionswahrscheinlichkeiten sind die vierte Komponente in den stabilen Verteilungen von Aufgabenteilen c) und e).

i)

$$(1) \quad b_1 = \frac{3}{4}b_2 + \frac{1}{4}$$

$$(2) \quad b_2 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_3$$

$$(3) \quad b_3 = \frac{3}{4}b_2$$

$$\text{mit der Lösung } b_1 = \frac{5}{8}, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{3}{8}.$$

j)

Beispielsweise kommt Gleichung (1) folgendermaßen zustande:

$$m_1 = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot (1 + m_2)$$

- Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ wird von Z_1 in einem Schritt Z_5 erreicht; das bedeutet durchschnittlich $\frac{1}{4} \cdot 1$ Schritte.

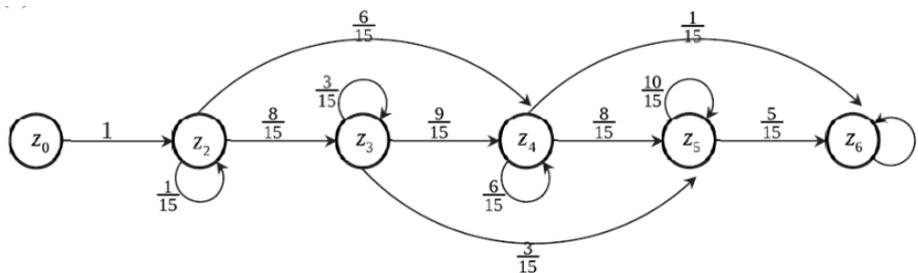
- Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ wird von Z_1 in einem Schritt Z_2 erreicht und von dort in durchschnittlich m_2 Schritten ein absorbierender Zustand; das bedeutet insgesamt durchschnittlich $\frac{3}{4} \cdot (1 + m_2)$ Schritte. Insgesamt ergibt sich damit Gleichung (1).

- k) Beispielsweise ergibt sich (1) $m_1 = 1 + \frac{3}{4} \cdot m_2$ durch folgende Überlegung direkt:
 Man braucht jedenfalls einen Schritt (von Z_1 nach Z_2 oder Z_3) und wenn man bei Z_2 landet nochmals m_2 Schritte; da das nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ passiert, werden bei der zweiten Möglichkeit durchschnittlich $\frac{3}{4} \cdot m_2$ Schritte benötigt, insgesamt also $1 + \frac{3}{4} \cdot m_2$ Schritte.

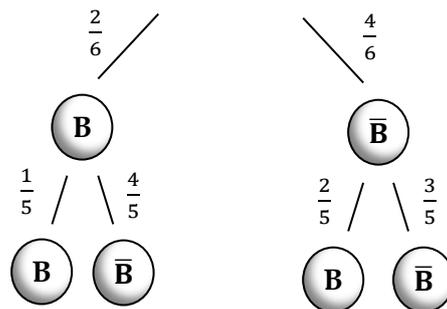
l) Man kann das LGS umformen in: $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mit dem GTR folgt $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

Abituraufgabe

a) (1)



(2) Ausgehend vom Zustand Z_2 (d. h., 2 Ziffern des Codes sind bereits bekannt) kann Anna beim nächsten Zuschauen keine neue Ziffer (sie verbleibt in Z_2), eine neue Ziffer (Wechsel zu Z_3) oder zwei neue Ziffern (Wechsel zu Z_4) erfahren. Alle weiteren Übergänge sind unmöglich, d. h., sie treten mit einer Wahrscheinlichkeit von 0 ein. Daher stehen in der ersten, fünften und letzten Zeile der zweiten Spalte Nullen. Berechnung der anderen Übergangswahrscheinlichkeiten in der zweiten Spalte durch Betrachtung eines zweistufigen Baumdiagramms, ausgehend von bereits zwei bekannten Ziffern (B = bekannte Ziffer erscheint; \bar{B} = nicht bekannte Ziffer erscheint):



Es ergeben sich folgende Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$P(Z_2 \rightarrow Z_2) = P(B, B) = \frac{1}{15}$$

$$P(Z_2 \rightarrow Z_3) = P(B, nB) + P(nB, B) = \frac{8}{15}$$

$$P(Z_2 \rightarrow Z_4) = P(nB, nB) = \frac{6}{15}$$

c) (1) Mit dem GTR erhält man $\vec{v}_2 = U^2 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{15} \\ \frac{8}{15} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dieser Vektor beschreibt die Zustandsverteilung nach zweifachen Zuschauen. Er entspricht der zweiten Spalte von U.

$$(2) \vec{v}_5 = U^5 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{50625} \\ \frac{64}{10125} \\ \frac{454}{3375} \\ \frac{2824}{5625} \\ \frac{6026}{16875} \end{pmatrix}. \text{ Daher betr\u00e4gt die gesuchte Wahrscheinlichkeit } \frac{6026}{16875} \approx 35,71\%.$$

$$(3) \vec{b} = U^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3375} \\ \frac{104}{3375} \\ \frac{326}{1125} \\ \frac{64}{125} \\ \frac{188}{1125} \end{pmatrix}. \text{ Daher betr\u00e4gt die gesuchte Wahrscheinlichkeit } \frac{188}{1125} \approx 16,71\%.$$

(4)

n	5	10	15	16
$\vec{v}_n = U^n \cdot \vec{v}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{50625} \\ \frac{64}{10125} \\ \frac{454}{3375} \\ \frac{2824}{5625} \\ \frac{6026}{16875} \end{pmatrix}$	$\approx \begin{pmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 0,002\% \\ 10,01\% \\ 89,75\% \end{pmatrix}$	$\approx \begin{pmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 1,37\% \\ 98,63\% \end{pmatrix}$	$\approx \begin{pmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 99,09\% \end{pmatrix}$

Nach 16 Aufrufen kann sie zu 99% sicher sein, dass sie die Kombination kennt.

c) (1) Wenn ein Diagonalelement in der k-ten Spalte und Zeile den Wert 1 besitzt, bedeutet dies, dass der Prozess mit Sicherheit (Wahrscheinlichkeit = 1) in diesem Zustand Z_k verbleibt, wenn dieser einmal erreicht ist.

(2) $\vec{g}_1 = A^{100} \cdot \vec{v}_1 \approx \begin{pmatrix} 0,186 \\ 0 \\ 0,814 \end{pmatrix}$ und $\vec{g}_2 = A^{100} \cdot \vec{v}_2 \approx \begin{pmatrix} 0,543 \\ 0 \\ 0,457 \end{pmatrix}$ zeigt, dass die stabile Verteilung von der Startverteilung abh\u00e4ngt.

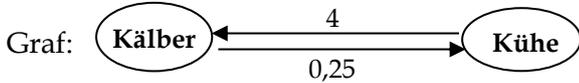
(3) Es gilt $A^{100} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0,286 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,714 & 1 \end{pmatrix}$. Dann erh\u00e4lt man $\vec{g} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0,286 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,714 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 0,286b \\ 0 \\ 0,714b + c \end{pmatrix}$

(4) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf lange Sicht ist bei dem durch A beschriebenen Prozess abh\u00e4ngig von der Startverteilung, es ergibt sich keine eindeutige Grenzverteilung, sondern eine Verteilung in Abh\u00e4ngigkeit von a, b und c. Damit kann es nicht f\u00fcr jeden stochastischen Prozess eine sich stabilisierende Wahrscheinlichkeitsverteilung geben, die unabh\u00e4ngig von der Startverteilung ist.

4 Mehrstufige Prozesse und Populationsmatrizen

Aufgabe 1

$$\text{a) } U = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$



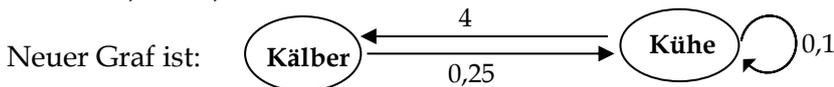
$$\text{b) } \vec{p}_1 = U \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{p}_2 = U \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Alle zwei Jahr stellt sich die Ausgangspopulation ein. Daher muss der Stall für 85 Tiere ausgerichtet sein.

$$\text{c) } \vec{p}_1 = U \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} by \\ ax \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{p}_2 = U \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} by \\ ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abx \\ aby \end{pmatrix} = ab \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wenn $ab = 1$ ist, reproduziert sich der Bestand alle zwei Jahre. Gilt $ab > 1$ vermehrt sich der Bestand. Für $ab < 1$ stirbt der Bestand aus.

$$\text{d) } V = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,25 & 0,1 \end{pmatrix}$$



e) Nach einem Jahr überleben 25 % = 0,25, nach zwei Jahren $0,25 \cdot 0,1$, nach drei Jahren $0,25 \cdot 0,1^2$ und nach vier Jahren $0,25 \cdot 0,1^3 = 0,00025 = 0,025$ % der Kälber.

$$\text{f) } \vec{p}_1 = V \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,25 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{p}_2 = U \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,25 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 28 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_0 = V \cdot \vec{p}_{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,25 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ 5 \end{pmatrix}$$

g) Langfristig nimmt der Bestand zu, da die sich die Gesamtzahl alle zwei Jahre vergrößert.

Aufgabe 2

a) Ansatz $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ liefert die Bedingung $x - 4y = 0$. Falls $x + y = 200$ gilt, folgt $x = 160$ und $y = 40$.

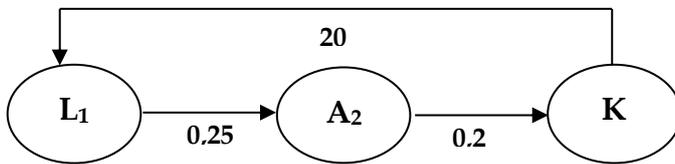
b) Ansatz: $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,25 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ liefert das LGS mit (I) $-x + 4y = 0$ und (II) $0,25x - 0,9y = 0$. Dieses LGS hat offenbar nur die im Sachzusammenhang unsinnige Lösung $x = 0$ und $y = 0$.

$$\text{c) } \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,25 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d) Ansatz: $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,25 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ergibt das LGS mit (I) $-x + 4y = 2$ und (II) $0,25x - 0,9y = 2$. Dieses LGS hat die eindeutige Lösung $x = 98$ und $y = 25$. Die stabile Verteilung des Prozesses beträgt $\vec{p} = \begin{pmatrix} 98 \\ 25 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3

$$\text{a) } U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\text{b) } \vec{p}_1 = U \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}; \vec{p}_2 = U \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{p}_3 = U \cdot \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \\ 18 \end{pmatrix} = \vec{p}_0$$

$$\text{c) } U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0,05 & 0 & 0 \end{pmatrix}; U^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Es gilt: } \vec{p}_2 = U^2 \cdot \vec{p}_0 \text{ und } \vec{p}_3 = U^3 \cdot \vec{p}_0 = \vec{p}_0$$

Aufgabe 4

$$\text{a) } U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0,05 & 0 & 0 \end{pmatrix}; U^3 = \begin{pmatrix} abv & 0 & 0 \\ 0 & abv & 0 \\ 0 & 0 & abv \end{pmatrix}.$$

Für $a \cdot b \cdot v = 1$ reproduziert sich die Ausgangspopulation, für $a \cdot b \cdot v < 1$ stirbt die Population langfristig aus, für $a \cdot b \cdot v > 1$ wächst die Population unbegrenzt.

$$\text{c) } T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Jedes zweite Tier der ersten Altersstufe überlebt das erste Jahr, jedes vierte Tier der zweiten Altersstufe überlebt das zweite Jahr. In Altersstufe 3 überlebt jedes fünfte Tier ein weiteres Jahr. Jedes Tier der Altersstufe 2 bekommt ein Junges, jedes Tier der Altersstufe 3 bekommt vier Junge.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Jungtier fünf Jahre überlebt, beträgt $0,5 \cdot 0,25 \cdot 0,2^3 = 0,1 \%$, d. h., nur jedes 1000. Jungtier überlebt mindestens fünf Jahre.

5 Kontrollaufgaben

Ohne GTR

Aufgabe 1

•	A (3x3)	B (1x3)	C (3x1)
A (3x3)	$\begin{pmatrix} 3,5 & 7,5 & 2,6 \\ 3,8 & 11,2 & -1,1 \\ 5 & -6 & 25,7 \end{pmatrix}$	nicht definiert	$\begin{pmatrix} 71 \\ 11 \\ 491 \end{pmatrix}$
B (1x3)	(111 -68 498,5)	nicht definiert	(10101)
C (3x1)	nicht definiert	$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 10 & 100 & 1000 \\ 100 & 1000 & 10000 \end{pmatrix}$	nicht definiert

Die nicht definierten Produkte entstehen, da die Spaltenzahl der ersten Matrix mit der Zeilenzahl der zweiten Matrix nicht übereinstimmt.

Aufgabe 2

$$\text{a) } S \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 \\ (1-a) \cdot x_1 + (1-b) \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + (1-a) \cdot x_1 + (1-b) \cdot x_2 = a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + x_1 - a \cdot x_1 + x_2 - b \cdot x_2 = x_1 + x_2$$

$$\text{b) } M^2 = \begin{pmatrix} a & 0,5 \\ 1-a & 0,5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & 0,5 \\ 1-a & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0,5 \\ 1-a & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 0,5a + 0,5 & 0,5a + 0,25 \\ -a^2 + 0,5a + 0,5 & -0,5a + 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

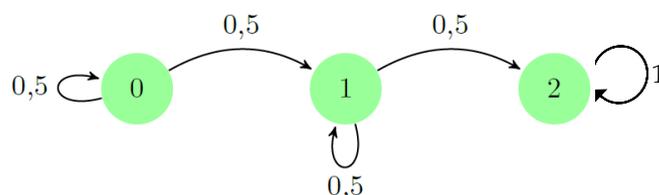
$$\Leftrightarrow a^2 - 0,5a + 0,5 = 1 \wedge 0,5a + 0,25 = 0 \wedge -a^2 + 0,5a + 0,5 = 0 \wedge -0,5a + 0,75 = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 0,5a - 0,5 = 0 \wedge a = -0,5 \wedge -a^2 + 0,5a + 0,5 = 0 \wedge a = -0,5$$

$a = -0,5$ impliziert einen Widerspruch zur Annahme, dass $0 \leq a \leq 1$.

Aufgabe 3

a) Theoretisch wäre es möglich, dass der Spieler unendlich oft die „0“ dreht und damit seinen Punktestand nicht verändert. Im Übergangsgraph ist dies an den Pfeilen zum selben Zustand erkennbar.

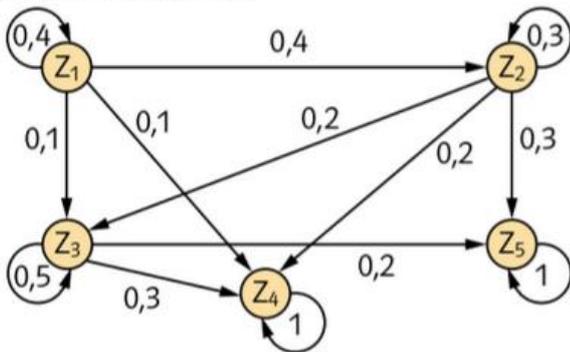


b) Dreht der Spieler „0 - 1 - 1“ oder „1 - 0 - 1“ beträgt die dazugehörige Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Endet das Spiel schon nach zwei Drehungen (der Spieler dreht „1 - 1“), liegt die Wahrscheinlichkeit hierfür bei $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Berücksichtigt man diese drei Ereignisse, beträgt die Wahrscheinlichkeit für ein Spielende nach höchstens drei Drehungen $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

Alternative Lösung über Matrizenrechnung: $\begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 \\ 0,375 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

a) Prozessdiagramm:



b) Wahrscheinlichkeitsverteilung der Systemzustände:

Zustand Z_k	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
v_k am Start	1	0	0	0	0
v_k nach 1 min	0,4	0,4	0,1	0,1	0
v_k nach 2 min	0,16	0,28	0,17	0,25	0,14
v_k nach 3 min	0,064	0,148	0,157	0,373	0,258

c) Übergangsmatrix für zwei Minuten:

$$U \cdot U = \begin{pmatrix} 0,16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,28 & 0,09 & 0 & 0 & 0 \\ 0,17 & 0,16 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,32 & 0,45 & 1 & 0 \\ 0,14 & 0,43 & 0,3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

a) $U = \begin{pmatrix} 0 & 0,8 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix}$

b) Die jährliche Überlebensrate der Jungvögel beträgt 50 %.
Die jährliche Geburtenrate beträgt 80 %, d. h. Jeder Altvogel bekommt 0,8 Junge.
Die jährliche Überlebensrate der Altvögel beträgt 60 %.

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0,8 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 88 \\ 106 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0,8 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 110 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$

d) $p = 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,18 = 18 \%$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0,8 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow 0,8y = 80 \Rightarrow y = 100$; Es müssen zehn Altvögel getötet werden.

Mit GTR

Aufgabe 6

a) $F_1 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0 & 0 \\ 0,10 & 0,90 & 0 \\ 0,15 & 0,10 & 1 \end{pmatrix}$ und $F_2 = \begin{pmatrix} 0,50 & 0,01 & 0,01 \\ 0,20 & 0,60 & 0,12 \\ 0,30 & 0,39 & 0,87 \end{pmatrix}$. Es handelt sich in beiden Fällen um Austauschprozesse, da beide Matrizen quadratisch sind, nicht negative Einträge und Spaltensumme 1 haben.

b) klar

c) $F_1^2 = \begin{pmatrix} 0,5625 & 0 & 0 \\ 0,165 & 0,81 & 0 \\ 0,2725 & 0,19 & 1 \end{pmatrix}$ und $F_2^2 = \begin{pmatrix} 0,255 & 0,0149 & 0,0149 \\ 0,256 & 0,4088 & 0,1784 \\ 0,489 & 0,5763 & 0,8067 \end{pmatrix}$. Diese beiden Matrizen beschreiben jeweils den Austauschprozess zwischen den Wirtschaftssektoren über einen Zeitraum von 20 Jahren.

d) Modell F_1 : $\vec{v}_{1990} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0 & 0 \\ 0,10 & 0,90 & 0 \\ 0,15 & 0,10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,30 \\ 0,66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,03 \\ 0,274 \\ 0,696 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_{2000} = F_1 \cdot \begin{pmatrix} 0,03 \\ 0,274 \\ 0,696 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0225 \\ 0,2496 \\ 0,7279 \end{pmatrix}$
 Modell F_2 : $\vec{v}_{1990} = \begin{pmatrix} 0,50 & 0,01 & 0,01 \\ 0,20 & 0,60 & 0,12 \\ 0,30 & 0,39 & 0,87 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,30 \\ 0,66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0296 \\ 0,2672 \\ 0,7032 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_{2000} = F_2 \cdot \begin{pmatrix} 0,0296 \\ 0,2672 \\ 0,7032 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,024504 \\ 0,250624 \\ 0,724872 \end{pmatrix}$

Für die ersten zehn Jahre scheinen beide Modelle die Realität gut abzubilden, für die zweite Dekade weicht Modell 2 gerade für den Sektor I stärker vom tatsächlichen Wert ab als Modell 1.

e) F_1^{80} beschreibt den Austauschprozess der Sektoren unter Modell 1 über einen Zeitraum von 800 Jahren. Langfristig sterben nach diesem Modell also die ersten beiden Sektoren aus. F_2^{20} beschreibt die Entwicklung über einen Zeitraum von 200 Jahren nach dem zweiten Modell. Hier werden langfristig 75 % Beschäftigte im Sektor III, 23 % in Sektor II und 2 % in Sektor I arbeiten. Realistischer schein das zweite Modell zu sein, da alle Sektoren weiter bestehen bleiben.

f) $\begin{pmatrix} 0,50 & 0,01 & 0,01 \\ 0,20 & 0,60 & 0,12 \\ 0,30 & 0,39 & 0,87 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -0,50 & 0,01 & 0,01 \\ 0,20 & -0,40 & 0,12 \\ 0,30 & 0,39 & -0,13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit der zusätzlichen Bedingung $x + y + z = 1$ erhält man mit dem TR (wähle zwei Gleichung des homogenen LGS sowie die Zusatzbedingung) die Lösungen $x = \frac{1}{51} \approx 0,02$, $y = \frac{155}{663} \approx 0,23$ und $z = \frac{165}{221} \approx 0,75$. Die stationäre Verteilung beschreibt eine Verteilung, die sich langfristig einstellt und sich unter dem Austauschprozess nicht mehr ändert.

g) $\vec{v}_{2020} = F_3^2 \cdot \vec{v}_{2020} = \begin{pmatrix} 1 & 0,10 & 0 \\ 0 & 0,50 & 0 \\ 0 & 0,40 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,24 \\ 0,74 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,60 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,24 \\ 0,74 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,056 \\ 0,06 \\ 0,884 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 0,20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,80 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 0,20y \\ 0 \\ 0,80y + z \end{pmatrix}$. Langfristig würde unter dem dritten Modell der Industriesektor aussterben.

i) $\vec{v}_{2050} = K \cdot \vec{v}_{2040} = K \cdot F_3^4 \cdot \vec{v}_{2000}$

j) Das Ergebnis würde beeinflusst werden, da K und F_3^2 nicht kommutativ (vertauschbar sind). Denn für Gleichheit müsste gelten: $K \cdot F_3^4 \cdot \vec{v}_{2000} = K \cdot F_3^2 \cdot F_3^2 \cdot \vec{v}_{2000} = F_3^2 \cdot K \cdot F_3^2 \cdot \vec{v}_{2000}$.

$$K \cdot F_3^2 = \begin{pmatrix} 0,60 & 0 & 0 \\ 0,40 & 1 & 0,40 \\ 0 & 0 & 0,60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,60 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,60 & 0,09 & 0 \\ 0,40 & 0,55 & 0,40 \\ 0 & 0,36 & 0,60 \end{pmatrix}$$

$$\neq F_3^2 \cdot K = \begin{pmatrix} 1 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,60 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,60 & 0 & 0 \\ 0,40 & 1 & 0,40 \\ 0 & 0 & 0,60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,66 & 0,15 & 0,06 \\ 0,10 & 0,25 & 0,10 \\ 0,24 & 0,60 & 0,84 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

The calculator screenshots show the following steps:

- Top Row:**
 - Left: Matrix K (2x2) and matrix F_3^2 (3x3) are displayed. The result of their multiplication is shown as a 3x3 matrix.
 - Middle: Matrix F_3^2 (3x3) and a vector of ones (2x1) are displayed. The result is a 3x1 vector.
 - Right: Matrix K (2x2) and a vector of ones (3x1) are displayed. The result is a 2x1 vector.
- Middle Row:**
 - Left: Matrix K (2x2) and a vector of ones (3x1) are displayed. The result is a 2x1 vector.
 - Middle: Matrix F_3^2 (3x3) and a vector of ones (2x1) are displayed. The result is a 3x1 vector.
 - Right: Matrix F_3^2 (3x3) and a vector of ones (2x1) are displayed. The result is a 3x1 vector.
- Bottom Row:**
 - Left: The resulting 2x1 vector from the middle-left screenshot.
 - Middle: The resulting 3x1 vector from the middle-middle screenshot.
 - Right: The resulting 3x1 vector from the middle-right screenshot.

a Über beide Wege erhält man: Für die Wahrscheinlichkeiten a_1, a_2, a_3 , von den Zuständen Z_1, Z_2 bzw. Z_3 „irgendwann“ Z_4 zu erreichen, ergibt sich:
 $a_1 = \frac{39}{44} \approx 0,8864$, $a_2 = \frac{13}{22} \approx 0,5909$, $a_3 = \frac{35}{44} \approx 0,7955$.
 Für die Wahrscheinlichkeiten b_1, b_2, b_3 , von den Zuständen Z_1, Z_2 bzw. Z_3 „irgendwann“ Z_5 zu erreichen, ergibt sich: $b_1 = \frac{5}{44} \approx 0,1136$, $b_2 = \frac{9}{22} \approx 0,4091$,
 $b_3 = \frac{9}{44} \approx 0,2045$.

LGS für Absorption in Z_4 :

$$\begin{aligned} (1) \quad a_1 &= 0,1a_1 && + 0,5a_3 + 0,4 \\ (2) \quad a_2 &= 0,4a_1 + 0,4a_2 \\ (3) \quad a_3 &= 0,5a_1 && + 0,5 \end{aligned}$$

LGS für Absorption in Z_5 :

$$\begin{aligned} (1) \quad b_1 &= 0,1b_1 && + 0,5b_3 \\ (2) \quad b_2 &= 0,4b_1 + 0,4b_2 && + 0,2 \\ (3) \quad b_3 &= && + 0,5b_2 \end{aligned}$$

b Für die mittleren Wartezeiten m_1, m_2, m_3 (Fig. 1) dafür, von den Zuständen Z_1, Z_2 bzw. Z_3 einen absorbierenden Zustand zu erreichen, ergibt sich das LGS

$$\begin{aligned} (1) \quad m_1 &= 1 + 0,1m_1 && + 0,5m_3 \\ (2) \quad m_2 &= 1 + 0,4m_1 + 0,4m_2 \\ (3) \quad m_3 &= 1 && + 0,5m_2 \end{aligned}$$

mit der Lösung: $m_1 = \frac{115}{44} \approx 2,61$, $a_2 = \frac{75}{22} \approx 3,41$,
 $a_3 = \frac{46}{17} \approx 2,70$.

Aufgabe 8

$$\text{a) } B_{RZ} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } B_{ZE} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) Ansatz: } C = B_{RZ} \cdot B_{ZE} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 14 \\ 12 & 8 \\ 10 & 37 \\ 12 & 43 \end{pmatrix}$$

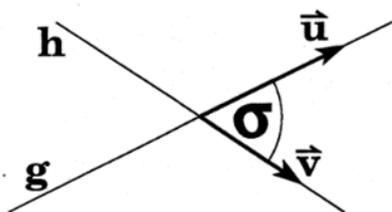
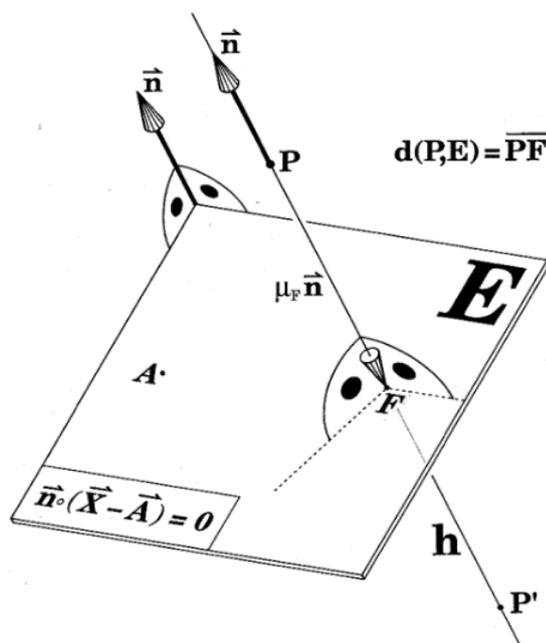
Bedeutung von **37**: Für 1 ME Q benötigt man **37** ME C.

$$\text{c) Ansatz: } \vec{x} = C \cdot \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 21 & 14 \\ 12 & 8 \\ 10 & 37 \\ 12 & 43 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1330 \\ 760 \\ 2150 \\ 2510 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ansatz: } K = \vec{k}^T \cdot C \cdot \vec{y} = \vec{k}^T \cdot \vec{x} \Leftrightarrow (0,25 \quad 2 \quad 16 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 1330 \\ 760 \\ 2150 \\ 2510 \end{pmatrix} = 43782,50 \text{ GE}$$

$$\text{d) Ansatz: } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 60 \\ 160 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3p + 2q = 70, 4p + q = 60, 8q = 160 \Leftrightarrow p = 10, q = 20.$$

Abstände und Winkel



$$\cos(\sigma) = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{v}}$$

Inhaltsverzeichnis

1 Noch fit? – Länge eines Vektors, Einheitsvektor und Längenabtragen	3
2 Normal- und Koordinatenform einer Ebene	5
3 Lagebeziehungen	12
4 Abstände von Objekten – Lotfußpunktverfahren	25
5 Winkelberechnung	32
6 Hier geht es zum Abitur	35
7 Kontrollaufgaben	37
Lösungen	44

1 Noch fit? – Länge eines Vektors, Einheitsvektor und Längenabtragen

Die **Länge eines Vektors** $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist: $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$

Will man nun den Vektor bestimmen, der die gleiche Richtung und Orientierung wie der Vektor \vec{a} hat und die Länge 1 besitzt, dividiert man \vec{a} durch seine Länge a und erhält den sogenannten

Einheitsvektor in Richtung \vec{a} : $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{1}{a} \cdot \vec{a}$.

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Entfernung zweier Punkte A ($a_1/a_2/a_3$) und B ($b_1/b_2/b_3$) bzw. Länge einer Strecke \overline{AB} :

$$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Beispiel: A(-4/1/3) und B(0/-2/3): $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{16 + 9} = 5$

Streckenabtragen: Mit den Einheitsvektoren können wir Raum zum Beispiel **Strecken** bekannter Längen in vorgegebene Richtungen **abtragen**.

Beispiel: Wir berechnen den Endpunkt Z einer Wanderung im Raum. Wir starten bei S (1/-2/-2),

- gehen zuerst 27 Einheiten in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ($u = \sqrt{7^2 + 4^2 + 4^2} = 9$),
- anschließend 15 Einheiten in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($v = \sqrt{(-11)^2 + (-10)^2 + 2^2} = 25$)
- und zuletzt 18 Einheiten in Richtung $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$ ($w = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-8)^2} = 9$).

Es folgt für den Endpunkt Z:

$$\vec{Z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + 27 \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + 15 \cdot \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} + 18 \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow Z(13/-8/-4)$$



Aufgabe 1: Länge eines Vektors

Berechne die Länge von

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 12 \\ -15 \\ 16 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -14 \\ -2 \\ -23 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 56 \\ -17 \\ 56 \end{pmatrix}$



Aufgabe 2: Umfang eines Dreiecks

Berechne den Umfang des Dreiecks ABC:

- a) $A(6 | 3 | -4)$, $B(8 | 6 | 2)$, $C(2 | 9 | 8)$
- b) $A(1 | -6 | -6)$, $B(2 | 2 | -2)$, $C(0 | -2 | 2)$
- c) $A(9 | 9 | 0)$, $B(-6 | 3 | 9)$, $C(0 | -6 | -6)$, Umkreisradius ?

Dreieck ABC ist gleichseitig, Seitenlänge $s = 3\sqrt{38}$
 Höhe $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}s = \frac{3}{2}\sqrt{114}$, Umkreisradius $R = \frac{2}{3}h = \sqrt{114}$

a) $n = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 7 + 9 + 14 = 30$

b) $n = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = 9 + 6 + 9 = 24$

c) $n = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \left| \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot 3\sqrt{38} = 9\sqrt{38}$



Aufgabe 3: Entfernung von Geradenpunkten

Durch $A(4 | -5 | 3)$ und $B(6 | -3 | 2)$ geht die Gerade g.

Bestimme die Punkte auf g,

- a) die von A die Entfernung 9 haben
- b) die von B die Entfernung 9 haben.

Richtung von AB: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ | $|\vec{r}| = 3$ Streckenabtragen:

a) $\vec{P} = \vec{A} \pm 9\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \pm 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P_1(10 | 1 | 0)$ $P_2(-2 | -11 | 6)$

b) $\vec{Q} = \vec{B} \pm 9\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \pm 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $Q_1(12 | 3 | -1)$ $Q_2(0 | -9 | 5)$



Aufgabe 4: Achsenpunkte mit gleicher Entfernung von zwei Punkten

Berechne alle Achsenpunkte, die von $A(4 | 1 | 7)$ und $B(-8 | -7 | 1)$ gleich weit entfernt sind.

$P(p | 0 | 0)$ auf x_1 -Achse; Bedingung: $\overline{AP} = \overline{BP}$, $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$
 $p^2 - 8p + 16 + 1 + 49 = p^2 + 16p + 64 + 49 + 1 \Rightarrow p = -2$
 $P(-2 | 0 | 0)$

$Q(0 | q | 0)$ auf x_2 -Achse; Bedingung: $\overline{AQ} = \overline{BQ}$, $\overline{AQ}^2 = \overline{BQ}^2$
 $16 + q^2 - 2q + 1 + 49 = 64 + q^2 + 14q + 49 + 1 \Rightarrow q = -3$
 $Q(0 | -3 | 0)$

$R(0 | 0 | r)$ auf x_3 -Achse; Bedingung: $\overline{AR} = \overline{BR}$, $\overline{AR}^2 = \overline{BR}^2$
 $16 + 1 + r^2 - 14r + 49 = 64 + 49 + r^2 - 2r + 1 \Rightarrow r = -4$
 $R(0 | 0 | -4)$



Aufgabe 5: Rationale Länge

Zeige, dass für rationales a der Vektor $\begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a \cdot (a+1) \end{pmatrix}$ eine rationale Länge hat.

$$\left| \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a \cdot (a+1) \end{pmatrix} \right|^2 = a^2 + (a+1)^2 + a^2(a+1)^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 = (a^2 + a + 1)^2$$

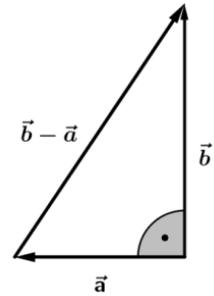
2 Normal- und Koordinatenform einer Ebene



Aufgabe 1: Wann sind zwei Vektoren senkrecht zueinander?

Nun interessiert uns eine **Bedingung**, an der man erkennen kann, **ob zwei Vektoren orthogonal zueinanderstehen**. Dafür betrachten wir ein rechtwinkliges Dreieck (vgl. Abb. rechts). Schreibt man die dazugehörigen Vektoren in Koordinatenschreibweise, erhält man:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}.$$



- a) **Begründe** die folgenden Umformungsschritte und notiere den Beweis mit Ansatz und Skizze in Deinem Heft.

$$\text{Der Satz des Pythagoras ist erfüllt} \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2$$

$$\Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$$

$$\text{Ferner gilt: } |\vec{b} - \vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

$$\text{Daher gilt: Der Satz des Pythagoras ist erfüllt} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

Satz und Definition:

Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} liegen orthogonal zueinander genau dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$. Das Produkt $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ nennt man **Skalarprodukt der Vektoren \vec{a} und \vec{b}** und wird mit $\vec{a} \circ \vec{b}$ bezeichnet.

$$\text{Beispiel: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = -1 \neq 0 \Leftrightarrow \vec{a} \not\perp \vec{b}$$

- b) **Überprüfe**, ob die folgenden Vektoren orthogonal sind:

$$(1) \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) \vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \vec{a} = \begin{pmatrix} 17 \\ -17 \\ 17 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 23 \\ -23 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$(4) \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(5) \vec{a} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$(6) \vec{a} = \begin{pmatrix} a^2b \\ ab \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

- c) **Zeige**, dass die folgenden Ortsvektoren \vec{A} , \vec{B} und \vec{C} einen Würfel aufspannen. [Hinweis: Ein Eckpunkt des Würfels ist der Ursprung.]

$$(1) \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \vec{A} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}; \vec{B} = \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}; \vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(3) \vec{A} = \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a \cdot (a+1) \end{pmatrix}; \vec{B} = \begin{pmatrix} a+1 \\ -a \cdot (a+1) \\ a \end{pmatrix}; \vec{C} = \begin{pmatrix} a \cdot (a+1) \\ a \\ -a-1 \end{pmatrix}$$

d) **Untersuche**, für welche Werte von u $\vec{A} \perp \vec{B}$, $\vec{A} \perp \vec{C}$ und $\vec{B} \perp \vec{C}$ ist.

$$(1) \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 2u \end{pmatrix}; \vec{B} = \begin{pmatrix} -u \\ 14 \\ -u \end{pmatrix}; \vec{C} = \begin{pmatrix} 2u \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \vec{A} = \begin{pmatrix} u+1 \\ 2-u \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{B} = \begin{pmatrix} u \\ u+2 \\ u+4 \end{pmatrix}; \vec{C} = \begin{pmatrix} 2-3u \\ u \\ 2+2u \end{pmatrix}$$



Aufgabe 2: Normalvektor¹

Lies den Informationstext und **notiere** die wichtigsten Aussagen mit Beispiel und Skizze im Heft.

Vor gut 200 Jahren ist das Wort „normal“ aus dem Lateinischen übernommen worden. Es leitet sich ab von normalia = der Norm entsprechend, im rechten Winkel gemacht.

Definition: Ein Vektor \vec{n} , der auf einem Vektor \vec{a} senkrecht steht, heißt **Normalvektor** von \vec{a} .

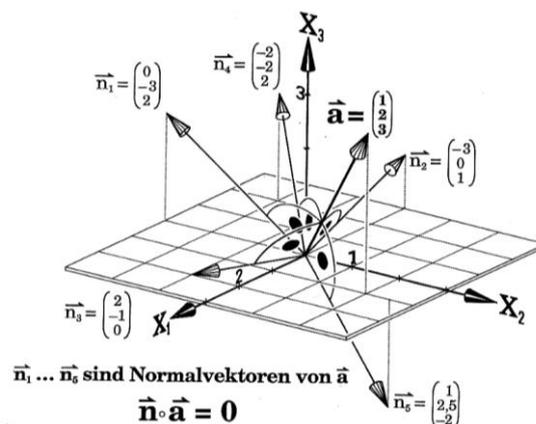
Wir wollen im Folgenden zwei Fragestellungen nachgehen:

- **Frage 1:** Wie lauten die Normalvektoren zu einem vorgegebenen Vektor?
- **Frage 2:** Wie lauten die Normalvektoren zu zwei vorgegebenen Vektoren?

Frage 1: Wie lauten die Normalvektoren zu einem vorgegebenen Vektor?

Zum Beispiel hat der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ die Normalvektoren $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, da $\vec{a} \circ \vec{n}_1 = \vec{a} \circ \vec{n}_2 = \vec{a} \circ \vec{n}_3 = 0$.

Die Aufgabe ist nicht eindeutig zu lösen, da unendliche viele Vektoren \vec{n} die Gleichung $\vec{a} \circ \vec{n} = 0$ lösen. Dies ist anschaulich klar, da es unendlich viele Vektoren gibt, die senkrecht auf einem vorgegebenen Vektor stehen (vgl. folgende Abbildung). Dabei können die unterschiedlichen Normalvektoren in Richtung und Länge variieren.

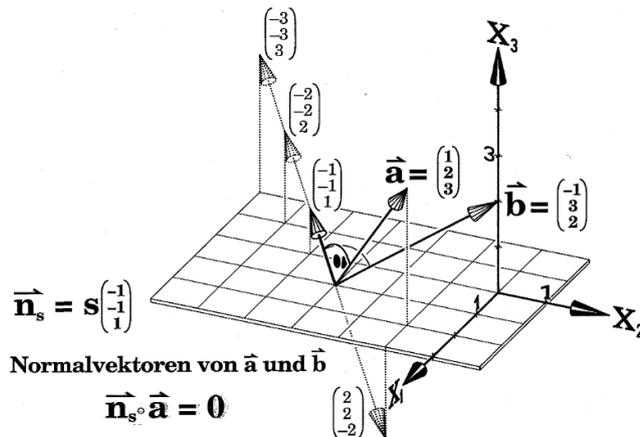


Aber auch rechnerisch lässt sich dies einfach zeigen. Setzt man $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, so ergibt sich aus $\vec{a} \circ \vec{n} = 0$ die Gleichung $n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 0$. Hier können nämlich zwei Parameter frei gewählt werden, was zu unendlichen vielen Lösungen führt. Diese beiden Freiheitsgrade entsprechen einer Variation der Normalvektoren in Richtung und Länge.

¹ Alle Abbildungen sind aus Anschauliche Analytische Geometrie von Barth, Krumbacher, Barth (2000)

Frage 2: Wie lauten die Normalvektoren zu zwei vorgegebenen Vektoren?

Sind die beiden vorgegebenen Vektoren \vec{a} und \vec{b} nicht kollinear, dann ist der Normalvektor bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt (vgl. folgenden Abbildung).



Der Normalvektor \vec{n} steht senkrecht auf den Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Daher gilt: $\vec{n} \circ \vec{a} = 0$ und $\vec{n} \circ \vec{b} = 0$

Setzt man $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, erhält man das 2x3-LGS mit ∞ -vielen Lösungen:

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 0 \text{ und } -n_1 + 3n_2 + 2n_3 = 0$$

Dieses LGS entspricht der folgenden Koeffizientenmatrix: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right)$.

Mit dem Gaußverfahren lässt sich die Ausgangsform durch Addition der beiden Zeilen in die folgende Stufenform überführen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

Wählt man $s = n_3$ beliebig aber fest, erhält man $n_2 = -s$ und $n_1 = -2n_2 - 3n_3 = -s$. Insgesamt lässt sich folgender Lösungsvektor ermitteln: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -s \\ -s \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Aufgabe 3: Normalvektor zu einem Vektor bestimmen

Bestimme drei Normalvektoren von \vec{a} , von denen jeder zu einer Koordinatenebene parallel ist:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \quad \text{od} \quad \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \quad \text{od} \quad \left(\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 8 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 8 \\ 4 \\ 0 \end{array} \right) \quad \text{od}$



Aufgabe 4: Normalvektor zu zwei Vektoren bestimmen

Bestimme einen Normalvektor von \vec{a} und \vec{b} mit teilerfremden, ganzzahligen Koordinaten:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ \pi \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 99 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \quad \text{od} \quad \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right) \quad \text{od} \quad \left(\begin{array}{c} 1 \\ 8 \\ 1 \end{array} \right) \quad \text{od}$



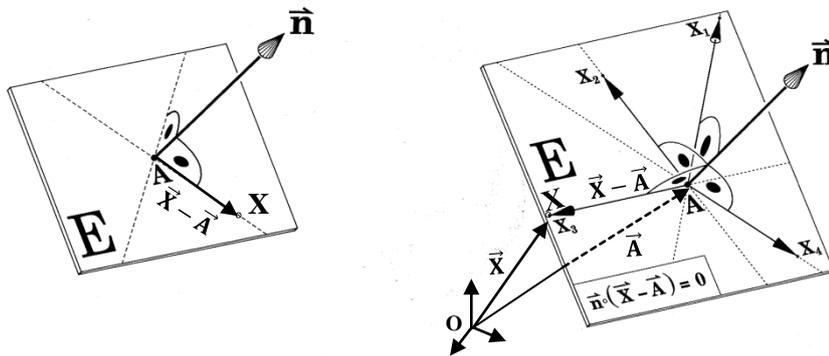
Aufgabe 5: Normal- und Koordinatenform einer Ebene²

Lies den Informationstext und **notiere** die wichtigsten Aussagen mit Beispiel und Skizze im Heft.

Bisher haben wir eine Ebene unter anderem mithilfe eines Stützvektors und zweier nicht kollinear Richtungsvektoren dargestellt. Dies führte uns zur Parametergleichung einer Ebene.

Problem 1: Ist es möglich, die Lage einer Ebene durch einen Punkt und genau einen Vektor festzulegen?

Die Beantwortung dieser Frage führt uns zum **Normalvektor** \vec{n} , der senkrecht zur Ebene E steht. In der folgenden Abbildung ist die Situation dargestellt.



Verbindet man einen beliebigen Ebenenpunkt X mit dem Aufpunkt A, steht der Normalvektor \vec{n} senkrecht auf dem Vektor \vec{AX} . Daher gilt:

$$\vec{n} \circ \vec{AX} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \circ \vec{X} - \vec{n} \circ \vec{A} = 0$$

Setzt man $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ so ergibt sich: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - d = 0$ mit $d = \vec{n} \circ \vec{A}$

Merkregel: Ist A der Aufpunkt und \vec{n} Normalvektor der Ebene. Dann wird festgelegt:

Normalform von E: $\vec{n} \circ \vec{X} - \vec{n} \circ \vec{A} = 0$ bzw. $\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$

Koordinatenform von E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - d = 0$ und $d = \vec{n} \circ \vec{A}$

Beispiele:

- a) $P(4/1/3)$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. **Bestimme** die Normal- und Koordinatenform von E.

$$\text{Normalform: } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \vec{X} - 22 = 0$$

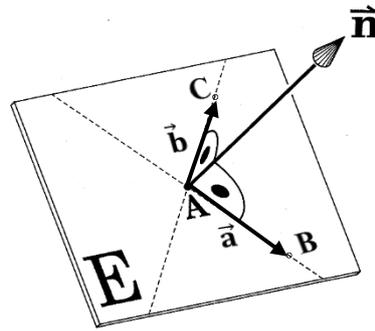
$$\text{Koordinatenform: } 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 22 = 0$$

- b) **Untersuche**, ob $Q(1/0/4)$ und $R(1/1/4)$ in E liegen und **gib** weitere Punkte an, die in E liegen.

Die Koordinaten von Q erfüllen die Koordinatenform, die von R nicht, $2 \cdot 1 - 0 + 5 \cdot 4 - 22 = 0$ (für Q). Daher liegt Q in E, nicht aber R. Z. B. liegen $(0/0/4,4)$, $(0/-22/0)$ und $(11/0/0)$ in E.

² Alle Abbildungen sind aus Anschauliche Analytische Geometrie von Barth, Krumbacher, Barth (2000)

Problem 2: Wie kann man eine Normal- bzw. Koordinatenform einer Ebene bestimmen, wenn drei Punkte bzw. ein Punkt und zwei nichtkollineare Richtungen bzw. die Parameterform einer Ebene vorgegeben sind?



Wir lernen nun ein allgemeines Standardverfahren kennen, den Normalvektor einer Ebene zu berechnen, wenn z. B. drei Punkte vorgegeben sind. Anschließend lässt sich wie bei Problem 1 die Normal- und Koordinatenform bestimmen.

Der Normalvektor \vec{n} steht senkrecht auf den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Daher gilt:

$$\vec{n} \circ \vec{a} = 0 \text{ und } \vec{n} \circ \vec{b} = 0$$

Setzt man $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ erhält man:

$$n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3 = 0 \text{ und } n_1 \cdot b_1 + n_2 \cdot b_2 + n_3 \cdot b_3 = 0$$

Die beiden Gleichungen lassen sich als 2x3-LGS mit den Unbekannten n_1 , n_2 und n_3 auffassen. Man erhält die folgende Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \end{array} \right)$$

Mit dem Gaußverfahren lässt sich die Ausgangsform durch Multiplizieren der ersten Zeile mit $-b_1$ und der zweiten Zeile mit a_1 und anschließenden Addieren in folgende Stufenform überführen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1 & 0 \end{array} \right)$$

Da uns nur eine von Null verschiedene Lösung des LGS interessiert, nimmt man folgende Festlegung für n_3 vor: $n_3 = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$. Damit erhält man für die Unbekannten n_2 und n_1 offenbar (rechne es nach!):

$$n_2 = a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \text{ und } n_1 = a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2.$$

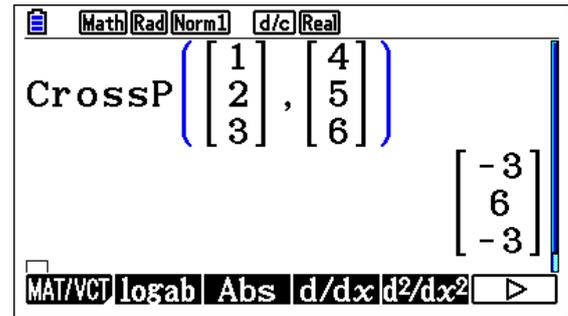
Definition: Für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ heißt $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$ (lies: „a Kreuz b“) das **Vektorprodukt** (oder **Kreuzprodukt**) **von \vec{a} und \vec{b}** .

Satz: $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu \vec{a} und $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu \vec{b} . Damit ist $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Normalvektor zur Ebene E mit den beiden nicht kollinearen Richtungsvektoren \vec{a} und \vec{b} .

Die Koordinaten des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ sehen etwas kompliziert aus, lassen sich aber über eine einfache **Eselsbrücke** leicht berechnen. Man schreibt die ersten beiden Zeilen noch einmal unter das Produkt.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Mithilfe des GTR (vgl. Abbildung oben rechts) lässt sich das Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ ebenfalls berechnen. Über $\overline{\text{OPTN}}$, $\overline{\text{F2}}$ (MAT/VCT), $\overline{\text{F6}}$ (\blacktriangleright), $\overline{\text{F6}}$ (\blacktriangleright), $\overline{\text{F3}}$ (CrossP), $\overline{\text{F1}}$ (VCT), $\overline{\text{EXIT}}$, $\overline{\text{EXIT}}$, $\overline{\text{F4}}$ (MATH), $\overline{\text{F1}}$ (MAT/VCT), F5 (3x1), Koordinaten eingeben und Komma (,) setzen, zweiten Vektor analog eingeben und (wer mag) Klammer zu setzen ()).

Beispiele:

- a) A(1/0/-8), $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. **Bestimme** Normal- und Koordinatenform von E.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist ein Normalvektor von E.}$$

$$\text{Normalform: } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{X} + 7 = 0$$

$$\text{Koordinatenform: } x - 2y + z + 7 = 0$$

- b) A (1/0/1), B (1/1/0), C (0/1/1). **Bestimme** Normal- und Koordinatenform von E.

$$\vec{a} = \overline{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \overline{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalform: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{X} - 2 = 0$$

$$\text{Koordinatenform: } x + y + z - 2 = 0$$

Übungsaufgaben zur Koordinaten- und Normalform³



Aufgabe 6 (Normalform in Koordinatenform umwandeln)

Gib eine Koordinatenform an.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = 0$ c) $\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$

³ Aus: Anschauliche Analytische Geometrie von Barth, Krumbacher, Barth (2000), S. 258-260.



Aufgabe 7 (Koordinatenform anhand von Eigenschaften bestimmen)

Gib eine Koordinatenform **an**, von der man weiß:

- a) E enthält $A(1 \mid 0 \mid -3)$ und hat die Normalrichtung $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- b) E enthält $A(1 \mid 1 \mid -2)$, $B(-2 \mid 1 \mid 0)$ und $C(0 \mid 1 \mid 2)$
- c) E enthält $A(1 \mid -1 \mid -4)$ und die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$
- d) E enthält $A(1 \mid -1 \mid -4)$ und steht senkrecht auf $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$
- e) E enthält $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- f) E enthält $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$



Aufgabe 8 (Lotgerade bestimmen)

E: $3x_1 + x_3 - 6 = 0$ enthält $P(1 \mid 7 \mid 3)$, aber nicht $Q(2 \mid 2 \mid 1)$.

- a) n sei das Lot von E in P. Gib eine Gleichung von n an.
- b) m sei das Lot von E durch Q. Gib eine Gleichung von m an.



Aufgabe 9 (Normalform aufstellen)

Stelle eine Normalform der Ebene F auf, die auf E: $3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$ senkrecht steht und g enthält

- a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$



Aufgabe 10 (Symmetrieebene aufstellen)

- a) Bestimme eine Normalform der Symmetrieebene von $A(3 \mid -1 \mid 4)$ und $B(7 \mid -5 \mid -2)$.
- b) Bestimme eine Normalform der Symmetrieebene von $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- c) Bestimme eine Normalform der Symmetrieebene von E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$ und F: $2x_1 - x_2 + 4x_3 - 8 = 0$, die durch den Ursprung geht.



Aufgabe 11 (Punktspiegelung an einer Ebene)

Spiegle den Punkt P an der Ebene E:

- a) $P(14 \mid 2 \mid 1)$, E: $3x_1 - x_2 = 0$ b) $P(11 \mid 11 \mid 3)$, E: $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$

3 Lagebeziehungen⁴

Wir haben bisher die **Parameterform** sowie die **Normal-** und **Koordinatenform** einer Ebene kennengelernt. Im Folgenden sollen spezielle Ebenen mithilfe dieser Formen dargestellt werden. Zur grafischen Veranschaulichung einer Ebenen leiten wir noch eine Variante der Koordinatenform her, die sogenannte **Achsenabschnittform**.

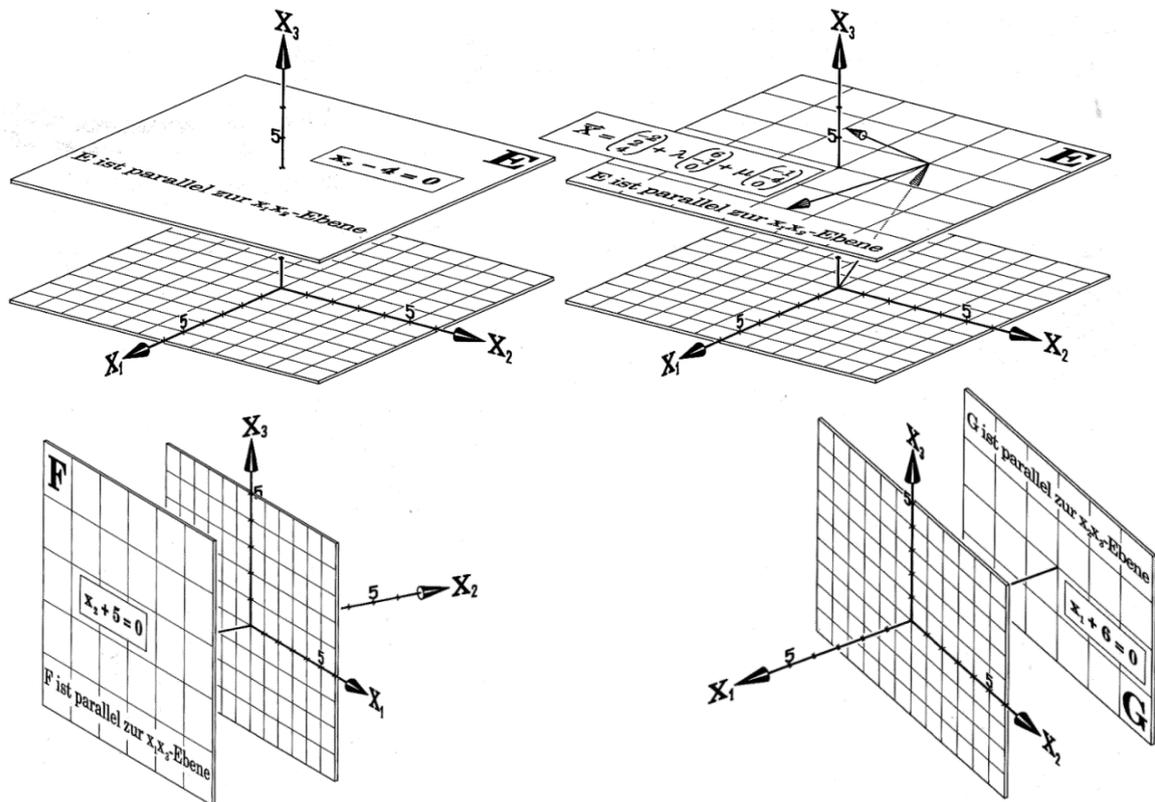
Des Weiteren werden **Lagebeziehungen von Ebene und Gerade** sowie **Ebene und Ebene** unter Berücksichtigung der Koordinatenform und dem Lösen LGS diskutiert.

Besondere Lagen von Ebenen im Raum



Aufgabe 1 (Zu den Koordinatenebenen und -achsen parallele Ebenen)

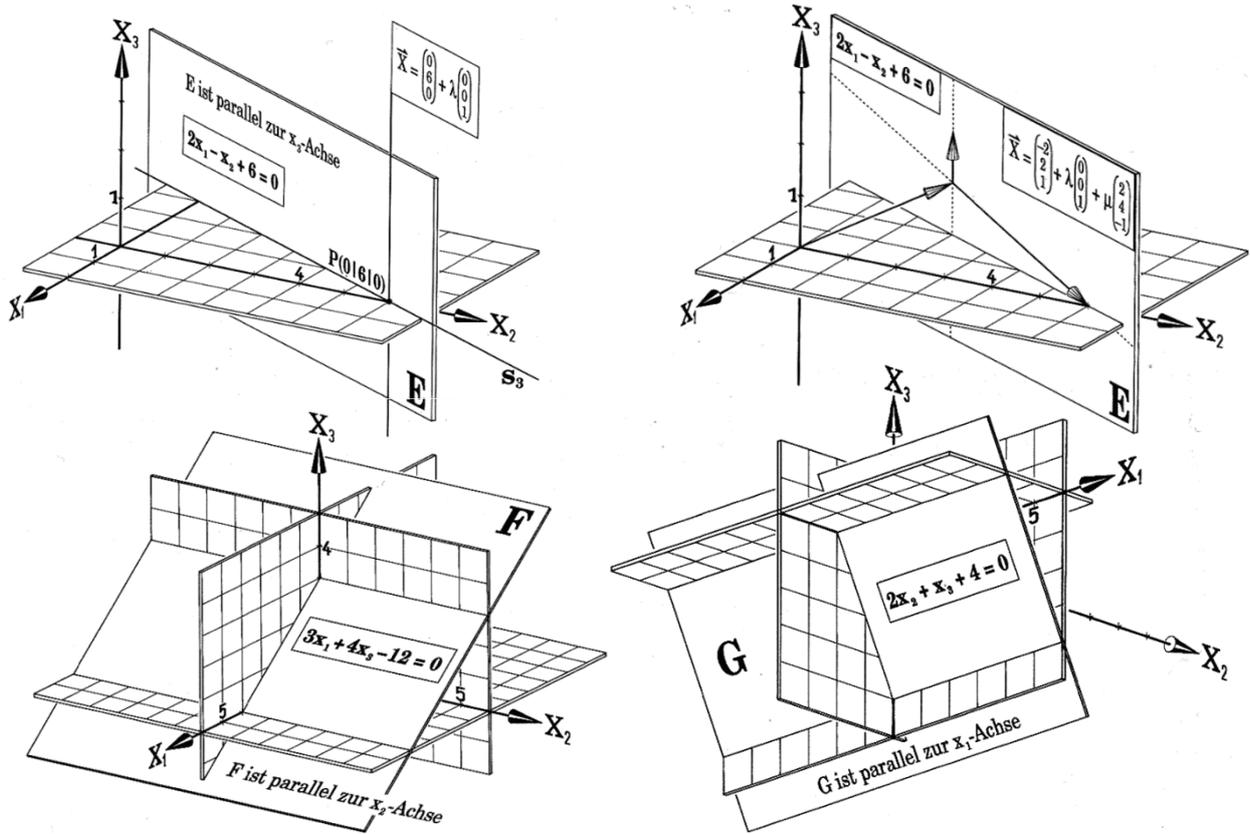
- a) Im Folgenden sind Darstellungen spezieller Ebenen angegeben. **Gib** zu den Ebenen E, F und G eine Normal- und Parameterform **an**. **Erörtere** Vor- und Nachteile der Darstellungen.



	E	F	G
PF			
NF			
KF	$x_3 - 4 = 0$	$x_2 + 5 = 0$	$x_1 + 6 = 0$

⁴ Abbildungen des Kapitels aus Anschauliche Analytische Geometrie von Barth, Krumbacher, Barth (2000)

- b) Im Folgenden sind Darstellungen spezieller zu den Koordinatenachsen paralleler Ebenen angegeben. **Gib** zu den Ebenen E, F und G eine Normal- und Parameterform **an**. **Erörtere** Vor- und Nachteile der jeweiligen Darstellungen.



	E	F	G
PF			
NF			
KF	$2x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 6 = 0$	$3x_1 + 0 \cdot x_2 + 4x_3 - 12 = 0$	$0 \cdot x_1 + 2x_2 + x_3 + 4 = 0$

- c) Untersuche, welche besondere Lage die Ebenen A bis F bzw. A bis E haben.

(1) A: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ B: $x_1 + 2x_2 = 0$ C: $x_1 = 0$ D: $x_2 - 2 = 0$ E: $x_2 + 2x_3 - 4 = 0$ F: $x_1 = x_2$

(2) A: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ B: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ C: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

D: $\vec{X} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- d) Bestimme eine Koordinatenform der Ebenen A bis E:

A ist parallel zur x_1x_2 -Ebene und geht durch den Punkt $P(1 | 2 | -3)$

B ist parallel zur x_2 -Achse und geht durch $P(1 | 0 | 0)$ und $Q(0 | 0 | 1)$

C ist senkrecht zur x_2x_3 -Ebene und geht durch O und $P(0 | 1 | 1)$

D ist parallel zur x_2 -Achse und hat die Spurgerade $s_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

E ist senkrecht zur x_3 -Achse und geht und $P(\pi | \sqrt{17} | 4)$



Aufgabe 2 (Achsenpunkte - Achsenabschnittsform - Spurgeraden und Spurdreieck)

Definition: Die Schnittstellen einer Ebene mit den Koordinatenachsen heißen **Achsenabschnitte der Ebene**.

Beispiel: Die Ebene H (siehe Abb. unten) ist gegeben durch $H: 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 6 = 0$. Für die Schnittstelle von H mit der x_1 -Achse gilt $x_2 = x_3 = 0$. Es folgt: $2x_1 - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \Rightarrow S_{23}(3/0/0)$ ($x_2 = x_3 = 0$).

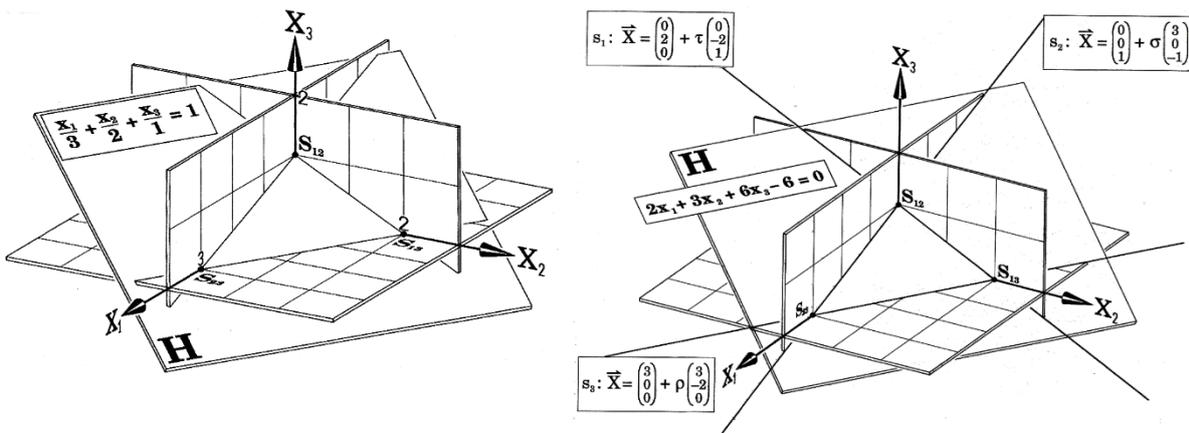
- a) **Berechne** wie oben die Schnittpunkte S_{13} und S_{12} von H mit der x_2 - und x_3 -Achse.
 b) **Erläutere** die folgende Herleitung.

Die Koordinatengleichung lässt sich schnell so umformen, dass die Achsenabschnitte direkt ablesbar sind:

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 6 \Leftrightarrow \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{1} = 1 \Rightarrow H \text{ hat die Achsenabschnitte } a_1 = 3, a_2 = 2 \text{ und } a_3 = 1.$$

Die **Achsenabschnittsform** $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1$ hat die Achsenpunkte $(a_1/0/0)$, $(0/a_2/0)$ und $(0/0/a_3)$.

Beispiel: $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{1} = 1$



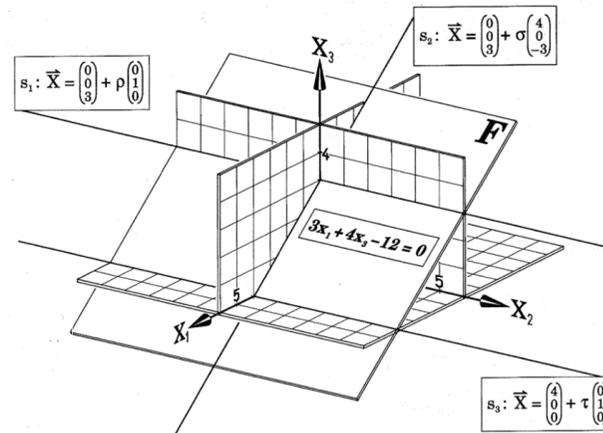
Nun kann die Ebene gut mithilfe des sogenannten **Spurdreiecks** gezeichnet werden, dass durch die drei **Spurgeraden** der Ebene H (= Schnittgeraden der Ebene H mit den Koordinatenebenen) begrenzt wird.

Beispiel: Die Spurgerade s_1 ($x_1 = 0$: Schnittgerade von H mit der x_2x_3 -Ebenen) hat z. B. den Aufpunkt $S_{13}(0/2/0)$ und als Richtungsvektor den Vektor $\overrightarrow{S_{13}S_{12}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow s_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

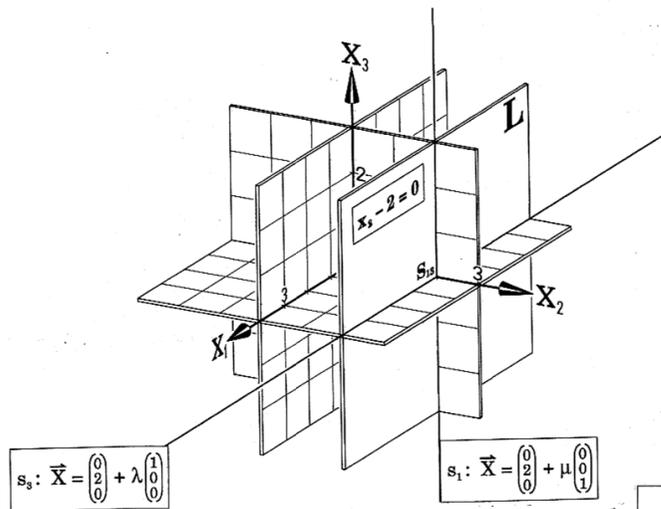
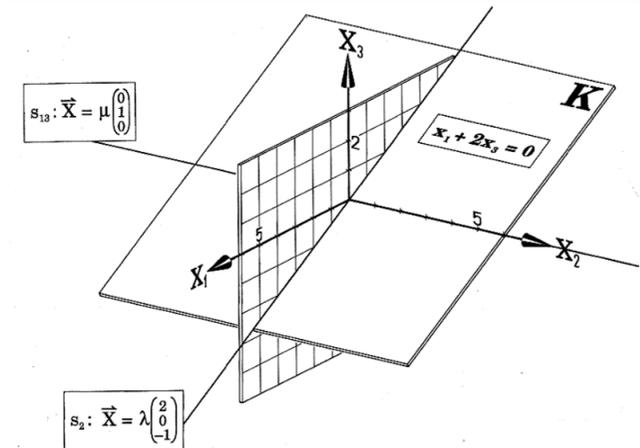
- c) **Ermittle** wie oben im Beispiel die Spurgeraden s_2 und s_3 .
 d) **Bestimme** die Achsenschnittpunkte und Spurgeraden der Ebenen A bis F und **stelle** sie mithilfe des Spurdreiecks grafisch dar (Bei C bis E vergleiche die folgende Überblicksseite).
- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| A: $7x_1 - 14x_2 - 6x_3 - 42 = 0$ | B: $x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 15 = 0$ |
| C: $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ | D: $2x_1 - x_2 + 4 = 0$ |
| E: $2x_1 = x_2$ | F: $x_2 + 2 = 0$ |

Spurgeraden bei besonderen Ebenen

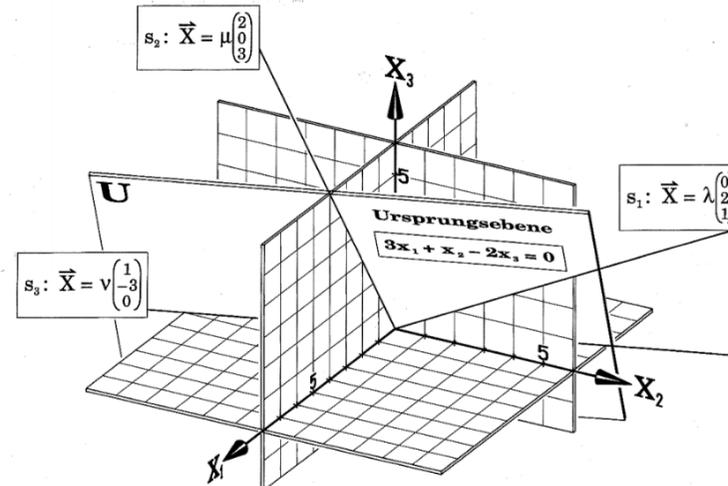
Die Ebene F hat die Koordinatengleichung $3x_1 + 4x_2 - 12 = 0$ und ist parallel zur x_2 -Achse. Da es nur zwei Achsenpunkte S_{23} und S_{12} gibt, sind die Spurgeraden s_1 und s_3 parallel und stehen senkrecht auf s_2 . Die Berechnung erfolgt über die Achsenpunkte und die Koordinatenrichtungen sowie bei s_2 über den Verbindungsvektor $\overrightarrow{S_{23}S_{12}}$.



Die Ebenen K und U verlaufen durch den Ursprung und besitzen zwei (die x_2 -Achse s_{13} ist bei K eine „doppelte“ Spurgerade) bzw. drei Spurgeraden.



Die Ebene L ist parallel zur x_1x_2 -Ebene und besitzt nur einen Spurpunkt S_{13} . Die beiden Spurgerade s_1 und s_3 verlaufen durch den Achsenpunkt S_{13} und haben die Richtungen der x_3 - und x_1 -Achse.



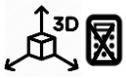
Bestimmung von s_1 bei U :

$$x_1 = 0:$$

$$\text{Also } x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3$$

$$s_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

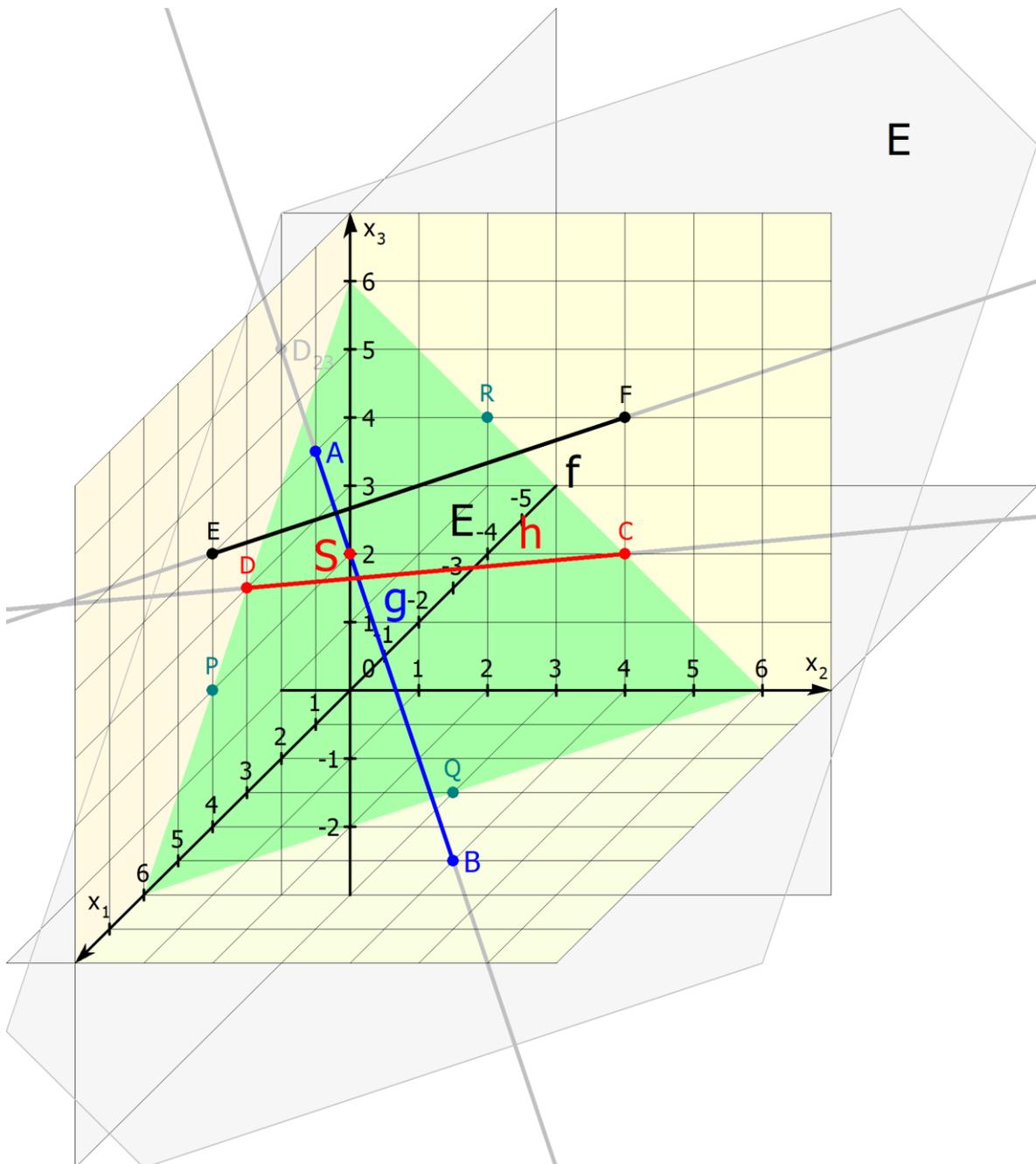
Lagebeziehung von Gerade und Ebene im Kontext von LGS



Aufgabe 3 (Möglichkeiten der Lagebeziehung)

Bei der Lagebeziehung von Gerade und Ebene sind drei Fälle zu unterscheiden: Gerade und Ebene haben einen Schnittpunkt S , Gerade liegt in der Ebene, Gerade ist echt parallel zur Ebene. Folgende Abbildung stellt die drei Fälle bildlich dar.

Gib Parametergleichungen für die Geraden f , g und h sowie Parameter-, Achsenabschnitt-, Normal- und Koordinatenform für die Ebene E **an**. **Notiere** die Lagebeziehung von f , g und h zu E . **Stelle** die Situation mit dem 3D-Modell **dar**.





Aufgabe 4 (Gerade und Ebene sind in Parameterform gegeben)⁵

Arbeite die folgenden Beispiele **durch** und **notiere** sie in Deinem Heft.

Bei der Lagebeziehung von Gerade und Ebene sind drei Fälle zu unterscheiden:

- 1. Fall: Gerade g und Ebene E haben eine Schnittpunkt S .
- 2. Fall: Gerade h liegt in E .
- 3. Fall: Gerade f ist echt parallel zu E .

1. Fall: g und E haben eine Schnittpunkt S :

$$g: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } E: \vec{X}(s; t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ein Gleichsetzen der Terme für den Geraden- und Ebenenvektor liefert ein System von drei Gleichungen mit den Unbekannten r , s und t , die mit dem GTR gelöst werden können:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{array} \xrightarrow{\text{GTR}} r = 1, s = 0, t = 1.$$

Setzt man z. B. $r = 1$ in g ein, folgt für den Schnittpunkt: $\vec{S} = \vec{X}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Also: $S(2/1/3)$.

2. Fall: h liegt in E

$$h: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } E: \vec{X}(s; t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gleichsetzen der Terme für den Geraden- und Ebenenvektor liefert:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 4 \\ -4 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{GTR}} 3 \times 3$ LGS hat unendlich viele Lösungen. Also liegt die Gerade h in E .

3. Fall: f verläuft parallel zu E

$$f: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } E: \vec{X}(s; t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gleichsetzen der Terme für den Geraden- und Ebenenvektor liefert:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{GTR}} 3 \times 3$ LGS hat keine Lösungen. Also liegt die Gerade h parallel zu E .

⁵ Wiederholung aus der Q1

Hinweis zur Nutzung des GTR: Alle drei Fälle lassen sich durch Eingabe der entsprechenden Koeffizientenmatrix in MENU A (Gleichung) mit dem GTR lösen:

1. Fall:

	a	b	c	d
1	1	1	2	3
2	1	-3	-1	0
3	-1	2	-1	-2

SOLVE DELETED CLEAR EDIT

	a	b	c	d
X	1			
Y	0			
Z	1			

REPEAT

2. Fall:

	a	b	c	d
1	3	1	2	4
2	-4	-3	-1	-4
3	1	2	-1	0

SOLVE DELETED CLEAR EDIT

	a	b	c	d
X	8			
Y	-4			
Z	1			

REPEAT

3. Fall:

	a	b	c	d
1	-1	1	2	0
2	1	-3	-1	0
3	0	2	-1	-2

SOLVE DELETED CLEAR EDIT

	a	b	c	d
X				
Y				
Z				

REPEAT



Aufgabe 5 (Gerade ist in Parameterform und Ebene ist in Koordinatenform gegeben)

Arbeite die folgenden Beispiele **durch** und **notiere** sie in Deinem Heft. Erläutere das Vorgehen, falls

die Ebene E in Normalform $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} - 6 = 0$ gegeben wäre.

1. Fall: g und E haben eine Schnittpunkt S:

$$f: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r \\ r \\ 4-r \end{pmatrix} \text{ und } E: x_1 + x_2 + x_3 = 6.$$

Durch Einsetzen der drei Koordinatengleichungen der Geraden in die Koordinatengleichung der Ebene erhält man: $1 + r + r + 4 - r = 6 \Leftrightarrow r = 1$. Setzt man z. B. $r = 1$ in g ein, folgt für den Schnittpunkt:

$$\vec{S} = \vec{X}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Also: } S(2/1/3).$$

2. Fall: h liegt in E

$$h: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3r \\ 4-4r \\ 2+r \end{pmatrix} \text{ und } E: x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

Durch Einsetzen der drei Koordinatengleichungen der Geraden in die Koordinatengleichung der Ebene erhält man: $3r + 4 - 4r + 2 + r = 6 \Leftrightarrow 0 \cdot r = 0$. Die Gleichung ist für jedes r erfüllt. Also liegt die Gerade h in E.

3. Fall: f verläuft parallel zu E

$$f: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-r \\ r \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } E: x_1 + x_2 + x_3 = 6.$$

Durch Einsetzen der drei Koordinatengleichungen der Geraden in die Koordinatengleichung der Ebene erhält man: $4 - r + r + 4 = 6 \Leftrightarrow 0 \cdot r = 6$. Die Gleichung ist unlösbar: h ist parallel zu E.



Aufgabe 6 (Überblicksblatt)

Fülle die **Überblicksblatt zur Lagebeziehung von Gerade und Ebene** aus und **klebe** es in Dein Heft ein.



Exkurs: Lagebeziehung von Gerade und Ebene im Kontext von LGS und GTR.

Erläutere die folgenden Ausführungen.

1. Fall (g und E schneiden sich): $g: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $E: x_1 + x_2 + x_3 = 6$

2. Fall (h liegt in E): $h: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $E: x_1 + x_2 + x_3 = 6$

3. Fall (f ist echt parallel zu E): $f: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $E: x_1 + x_2 + x_3 = 6$

Man kann für jeden Fall ein 4x4-LGS aufstellen mit den Unbekannten x_1, x_2, x_3 und r . Es besteht aus den Koordinatengleichungen der Geraden g und der Koordinatengleichung der Ebene. In MENU A (Gleichung) erhält man folgende Darstellungen:

1. Fall: g und E schneiden sich

	a	b	c	d	e
1	0	0	-1	1	
2	1	0	-1	0	
3	0	1	1	4	
4	1	1	0		6

SOLVE DELETE CLEAR EDIT

	a	b	c	d	e
X					2
Y					1
Z					3
T					1

REPEAT

2. Fall: h liegt in E

	a	b	c	d	e
1	1	0	0	-3	
2	0	1	0	4	
3	0	0	1	-1	
4	1	1	1		0

SOLVE DELETE CLEAR EDIT

Unendlich viele Lösungen

$X=3T$

$Y=4-4T$

$Z=2+T$

$T=T$

REPEAT

3. Fall: f ist echt parallel zu E

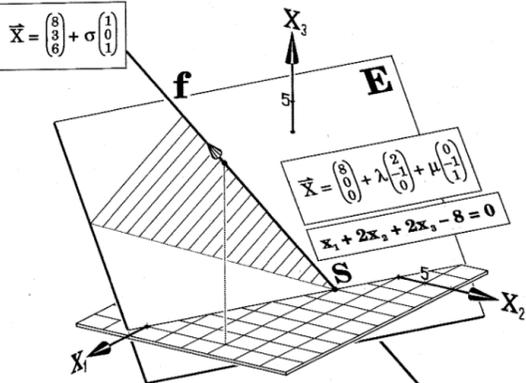
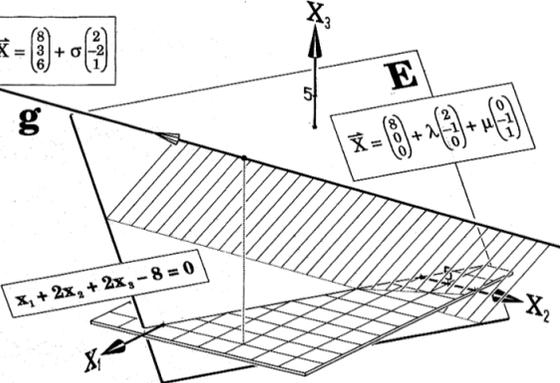
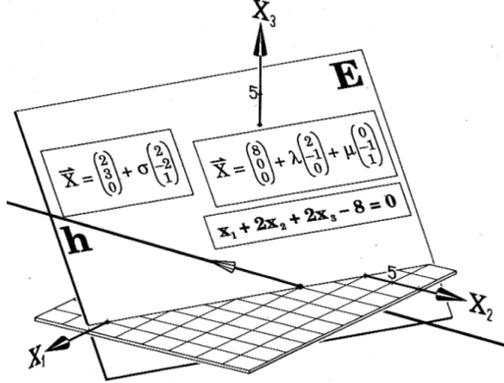
	a	b	c	d	e
1	1	0	0	1	
2	0	1	0	-1	
3	0	0	1	0	
4	1	1	1		0

SOLVE DELETE CLEAR EDIT

Keine Lösung

REPEAT

Überblickstabelle: Lagebeziehung von Gerade und Ebene

E und f haben eine Schnittpunkt S: $f \cap E = \{S\}$	E und g sind echt parallel S: $g \cap E = \{ \}$	h liegt in E: $g \cap E = h$
		
g und E in Parameterform gegeben („g = E“)		
$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2\lambda - \sigma \\ -\lambda - \mu \\ \mu - \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow[\text{TR Gau\ss}] \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S(2/3/0)$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2\lambda - 2\sigma \\ -\lambda - \mu + 2\sigma \\ \mu - \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow[\text{TR Gau\ss}] \text{LGS ist unlösbar}$ $\Rightarrow g \text{ und } E \text{ haben keine gemeinsame Punkte} \Rightarrow g \parallel E$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2\lambda - 2\sigma \\ -\lambda - \mu + 2\sigma \\ \mu - \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow[\text{TR Gau\ss}] \text{LGS hat } \infty \text{ Lösungen}$ $\Rightarrow g \text{ und } E \text{ haben } \infty \text{ gemeinsame Punkte} \Rightarrow g \text{ in } E$
g in Parameterform und E in Koordinaten- bzw. Normalform („g in E“)		
$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + \sigma \\ 3 \\ 6 + \sigma \end{pmatrix}, E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8 = 0$ $8 + \sigma + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (6 + \sigma) - 8 = 0 \Leftrightarrow \sigma = -6$ $\Rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S(2/3/0)$	$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + 2\sigma \\ 3 - 2\sigma \\ 6 + \sigma \end{pmatrix}, E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8 = 0$ $8 + 2\sigma + 2 \cdot (3 - 2\sigma) + 2 \cdot (6 + \sigma) - 8 = 0$ $\Leftrightarrow 0\sigma = -18 \text{ (f)}$ $\Rightarrow g \text{ und } E \text{ haben keine gemeinsame Punkte} \Rightarrow g \parallel E$	$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2\sigma \\ 3 - 2\sigma \\ \sigma \end{pmatrix}, E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8 = 0$ $2 + 2\sigma + 2 \cdot (3 - 2\sigma) + 2\sigma - 8 = 0$ $\Leftrightarrow 0\sigma = 0 \text{ (für jedes } \sigma \text{ erfüllt)}$ $\Rightarrow g \text{ und } E \text{ haben } \infty \text{ gemeinsame Punkte} \Rightarrow g \text{ in } E$



Aufgabe 7 (Lagebeziehung von Ebene und Ebene)

- a) **Erläutere** die folgenden Überlegungen und mathematischen Umformungen und **notiere** die wesentlichen Aussagen in Deinem Heft.

E und F sind echt parallel	E und F sind identisch	E und F schneiden sich in s
<p style="text-align: center;">$E \cap F = \{\}$</p>	<p style="text-align: center;">$E = F$</p>	<p style="text-align: center;">$E \cap F = s$</p> <p style="text-align: center;">E und F schneiden sich in s</p>

Zwei Ebenen E und F ergeben zusammen ein 2×3 -LGS. Dieses LGS hat entweder keine oder unendlich viele Lösungen mit einem Freiheitsgrad im Lösungsvektor (∞^1 – lösbar)⁶ oder unendliche viele Lösungen mit zwei Freiheitsgraden im Lösungsvektor (∞^2 – lösbar)⁷.

E und F schneiden sich in einer Geraden (∞^1 – Lösbarkeit):

$$(I) \quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12 \Rightarrow x_3 = 3 - 0,5x_2 - 0,25x_1$$

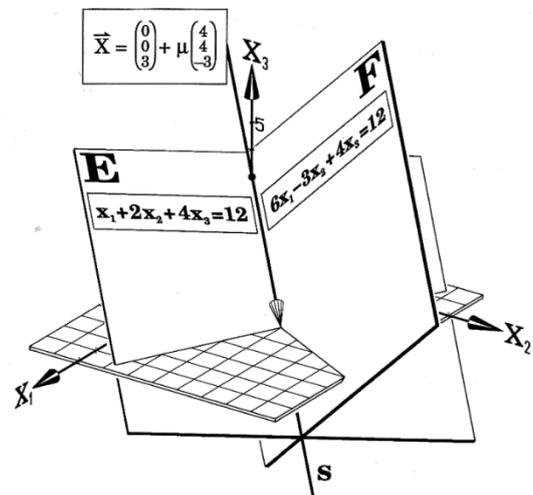
$$(II) \quad 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12$$

$$(II) + (-1) \cdot (I) \text{ ergibt } 5x_1 - 5x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_1$$

x_2 in (I) einsetzen und nach x_3 auflösen:

$$x_3 = 3 - 0,5x_1 - 0,25x_1 = 3 - 0,75x_1$$

$$\Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 3 - 0,75x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$



- b) Gegeben sind nun die Ebenen E mit E: $x_1 - x_2 + x_3 = 1$, F mit F: $x_1 - x_2 - x_3 = 1$ und die Ebene G mit G: $6x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 12$. **Untersuche** die Lagebeziehungen und **fertige** eine Skizze an.

Die Fälle **F = H (∞^2 – Lösbarkeit)** und **F ist echt parallel zu H (Unlösbarkeit)** sind leicht abgehandelt, da man am Normalvektor erkennen kann, ob die Ebenen parallel sind. Denn es gilt folgender **Merksatz**:

⁶ ∞^1 – Lösbarkeit bedeutet, dass ein LGS einen Lösungsvektor mit einem Freiheitsgrad hat. Geometrisch bedeutet der Lösungsvektor eine Gerade.

⁷ ∞^2 – Lösbarkeit bedeutet, dass ein LGS einen Lösungsvektor mit zwei Freiheitsgraden hat. Geometrisch bedeutet der Lösungsvektor eine Ebene.

Merksatz: Sind die beiden **Normalvektoren** zweier Ebenen **kollinear**, sind beide Ebenen parallel oder identisch. Bringt man beide Koordinatenformen durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor links von der Koordinatengleichung auf die gleiche Form, erkennt man am Skalar rechts, ob die Ebenen identisch oder echt parallel sind.

Beispiel: F: $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12$, H: $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -18$,
 G: $-3x_1 + 1,5x_2 - 2x_3 = -6$

Alle drei Ebenen haben kollineare Normalvektoren. Wegen $(-2) \cdot G = F$: $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12$ und der Tatsache, dass F und H den gleichen Normalvektor haben, aber das skalar rechts der Gleichung ungleich ist, gilt $F \parallel H$ und $F = G$.

c) **Gib** Beispiele zweier Ebenen E und F **an**, die echt parallel, identisch mit nicht identischem Normalvektor bzw. sich in einer Geraden schneiden. **Begründe** Deine jeweilige Angabe.



Aufgabe 8 (Geometrische Deutung von LGS)⁸

a) **Ordne** folgende drei Gleichungssysteme den drei Abbildungen **zu**. **Begründe** Deine Entscheidung. [Tipp: Betrachte die Normalvektoren.]

(1) $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$
 $-4x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 18$

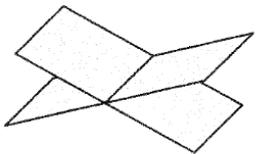


Fig. 1

(2) $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$
 $5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$

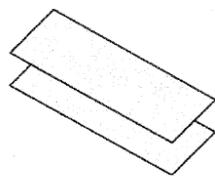


Fig. 2

(3) $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$
 $x_1 - 2x_2 = 1$

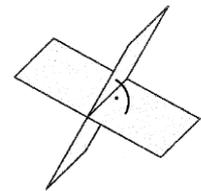


Fig. 3

b) **Berechne** für die Ebenen in Fig. 1 und Fig. 3 die Schnittgerade. **Überprüfe** mit dem GTR.

c) Gegeben sind zwei 3x3-LGS und die fünf denkbaren Lagebeziehungen dreier Ebenen.

(4) $3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4$
 $-5x_2 + 5x_3 = 1$
 $5x_2 - 5x_3 = 1$

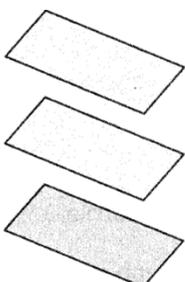


Fig. 4

(5) $-4x_1 - 8x_2 + 12x_3 = -24$
 $-5x_2 + 10x_3 = -10$
 $4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 14$

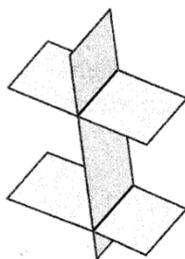


Fig. 5

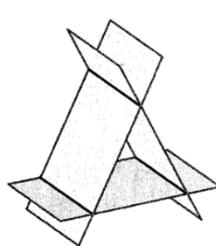


Fig. 6

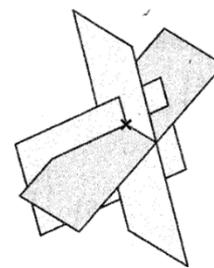


Fig. 7

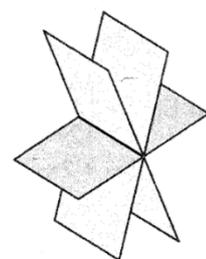


Fig. 8

Entscheide begründend, zu welcher Fig. die LGS (4) und (5) gehören. [Tipp: Betrachte auch hier die Normalvektoren.]

⁸ Modifiziert nach einer Aufgabe aus Lambacher Schweizer LK Mathematik NRW 2017.



Exkurs: Schnitt zweier nicht paralleler Ebenen mit dem GTR lösen

Arbeite mit dem GTR und den folgenden Überlegungen entsprechende Schnittpunkte der Aufgabe 7 und 8 durch. Entwickle eigene Beispiele für jeden der drei Fälle und löse sie. Übertrage die Überlegungen auf die Lagebeziehungen von Geraden.

Es werden drei Fälle bezüglich der Darstellungsmöglichkeiten der Ebenen betrachtet:

- Beide Ebenen sind in Koordinatenform gegeben.
- Beide Ebenen sind in Parameterform gegeben.
- Eine Ebene ist in Parameter-, eine Ebene in Koordinatenform gegeben.

Beide Ebenen sind in Koordinatenform gegeben

$$E_1: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6; E_2: 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 120.$$

Da beide Ebenen E_1 und E_2 nicht kollineare Normalvektoren haben, besitzen sie eine Schnittgerade s . Wurde bisher das 2×3 -LGS aus den beiden Koordinatengleichungen der Ebenen E_1 und E_2 händisch gelöst, kann durch einen kleinen „Trick“ der GTR verwendet werden. Man ergänzt das 2×3 -LGS aus den beiden Ebenengleichungen durch eine dritte Gleichung $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$. Dies ist möglich, da beim 2×3 -LGS der beiden (nicht parallelen) Ebenengleichungen eine Unbekannte immer frei wählbar ist (z. B. $x_3 = t$).

Nun notiert man in MENU A (Gleichung) die Koeffizienten des 3×3 -LGS:

	a	b	c	d
1	1	2	3	6
2	4	5	6	120
3	0	0	0	0

SOLVE DELETE CLEAR EDIT

Unendlich viele
Lösungen
X=70+Z
Y=-32-2Z
Z=Z

REPEAT

Das LGS ist ∞^1 -lösbar mit dem Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 + x_3 \\ -32 - 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ -32 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dies entspricht mit $x_3 = t$ der Schnittgeraden: $s: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 70 \\ -32 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Beide Ebenen sind in Parameterform gegeben

$$E_1: \vec{X}(x; y) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; E_2: \vec{X}(z; t) = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Durch Gleichsetzen der beiden Parametergleichungen der Ebenen E_1 und E_2 erhält man ein 3×4 -LGS, das ∞^1 -lösbar ist. Man ergänzt das 3×4 -LGS durch eine vierten Gleichung $0 \cdot t = 0$. Dies ist ohne Änderung der Lösungsmenge möglich, da beim 3×4 -LGS wegen der Nicht-Parallelität der Ebenen E_1 und E_2 stets ein Parameter frei wählbar ist (z. B. $t = \mu$). Zur Bestimmung der Schnittgeraden löst man das 4×4 -LGS in MENU A (Gleichung):

	a	b	c	d	→
1	-2	-3	5	3	
2	1	0	-4	0	
3	0	1	0	-2	
4	0	0	0	0	

SOLVE DELETE CLEAR EDIT

	a	b	c	d	→
1	-2	-3	5	3	
2	1	0	-4	0	
3	0	1	0	-2	
4	0	0	0	0	

Unendlich viele Lösungen
 $X = -32 - 4T$
 $Y = 2T$
 $Z = -8 - T$
 $T = T$

REPEAT

Die Gleichung der Schnittgeraden lässt sich für das frei wählbare $t = \mu$ z. B. berechnen durch Einsetzen des Parameters für z in die Parametergleichung der Ebene E_2 :

$$s: \vec{X}(\mu) = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-8 - \mu) \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ -32 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Eine Ebene ist in Parameter-, eine Ebene in Koordinatenform gegeben

$$\text{Gegeben sind } E_1: \vec{X}(t; u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; E_2: 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 120.$$

Zur Bestimmung der Schnittgeraden löst man in Analogie zu oben das 5×5 -LGS, das aus den drei Koordinatengleichungen der Parameterform von E_1 und der Koordinatengleichung E_2 besteht sowie der fünften Zeile $0 \cdot u = 0$. Denn beim 4×5 -LGS der beiden (nicht parallelen) Ebenengleichungen ist eine Unbekannte immer frei wählbar (z. B. $u = \mu$). Dazu notiert man in MENU A (Gleichung) die Koeffizienten des 5×5 -LGS:

	a	b	c	d	→
1	1	0	0	2	
2	0	1	0	-1	
3	0	0	1	0	
4	4	5	6	0	
5				1	

SOLVE DELETE CLEAR EDIT

	a	b	c	d	→
1	1	0	0	2	
2	0	1	0	-1	
3	0	0	1	0	
4	4	5	6	0	
5				1	

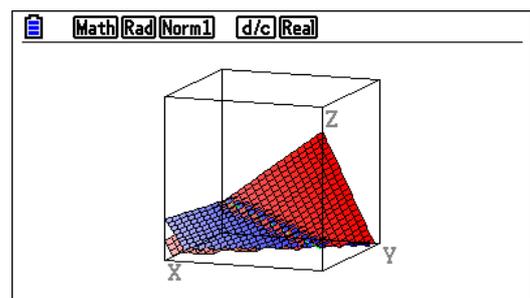
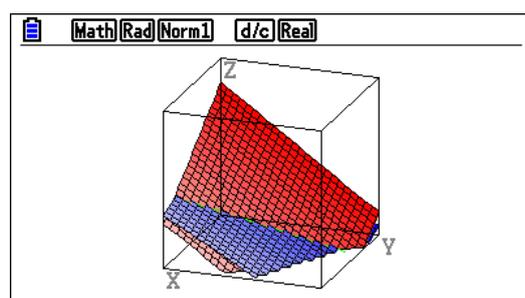
Lösungen
 $X = 70 + U$
 $Y = -32 - 2U$
 $Z = U$
 $T = -32 - 2U$
 $U = U$

REPEAT

Die Gleichung der Schnittgeraden lässt sich für das frei wählbare $u = \mu$ berechnen durch Einsetzen des Parameters für t in die Parametergleichung der Ebene E_1 :

$$s: \vec{X}(\mu) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-32 - 2\mu) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ -32 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Situation lässt sich mit entsprechender Fenstereinstellung unter MENU J (3D-Grafik) aus unterschiedlichen Perspektiven veranschaulichen.



4 Abstände von Objekten - Lotfußpunktverfahren⁹

In der Analytischen Geometrie interessieren Lösungen zu folgenden Abstandproblemen:

- Abstand zweier Punkte
- Abstand von Punkt und Ebene - Abstand paralleler Ebenen
- Abstand von Punkt und Gerade - Abstand paralleler Geraden
- Abstand windschiefer Geraden

Abstand zweier Punkte

Für die Punkte A und B mit den dazugehörigen Ortsvektoren $\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ sowie dem Vektor $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ gilt: $d(A, B) = \overline{AB} = |\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Beispiel: $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{(-4 - 1)^2 + (5 - (-2))^2 + (-6 - 3)^2} = \sqrt{155}$

Abstand von Punkt und Ebene - Abstand paralleler Ebenen

Lotfußpunktverfahren

Man legt durch P eine Normale der Ebene. Diese hat als Richtungsvektor den Normalvektor \vec{n} der Ebene E. Diese **Lotgerade h** schneidet die Ebene E im **Lotfußpunkt F** (Parameter μ_F). Als Abstand von P und E erhält man $d(P, E) = \overline{PF}$.

Beispiel: E: $2x_1 + x_2 + 3x_3 + 32 = 0$, P(1/0/-2)

Lotgerade h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\mu \\ \mu \\ -2 + 3\mu \end{pmatrix}$

h in E: $2(1 + 2\mu_F) + \mu_F + 3(-2 + 3\mu_F) + 32 = 0$

$\Rightarrow \mu_F = -2 \Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$
 $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{= \overline{PF}}$

$d = \overline{PF} = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \approx 7,48$

Hinweis: Mit dem **Lotfußpunktverfahren** lässt sich auch der an E gespiegelte Punkt P' berechnen durch $\vec{P}' = \vec{P} + 2 \cdot \overline{PF}$. Also gilt für P': $\vec{P}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix}$.

⁹ Alle Abbildungen sind aus: Anschauliche Analytische Geometrie von Barth, Krumbacher, Barth (2000)



Aufgabe 1

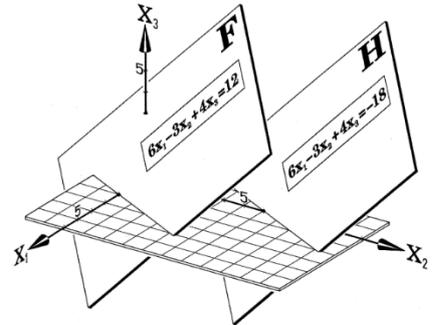
Bestimme den Abstand des Ursprungs von der Ebene E: $x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 15$.



Aufgabe 2

Gegeben sind die Ebenen F und H mit F: $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12$,
und H: $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -18$.

- Zeige, dass beide Ebenen echt parallel sind.
- Berechne den Abstand $d(F, H)$ der parallelen Ebenen F und H mithilfe des Lotfußpunktverfahrens. [Hinweis: Der Abstand paralleler Ebenen lässt sich berechnen, indem man eine Ebene und einen Punkt der zweiten Ebene wählt und darauf das obige Lotfußpunktverfahren anwendet.]
- Der Ursprung wird an beiden Ebenen gespiegelt. Ermittle die Spiegelpunkte M' bzw. M'' .



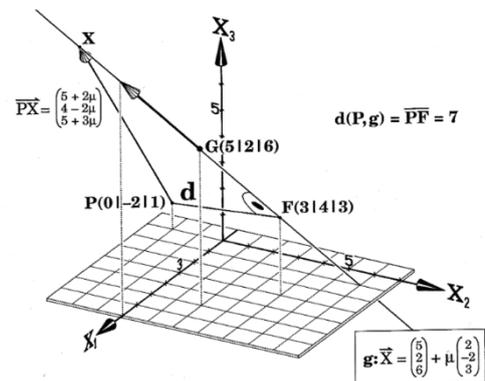
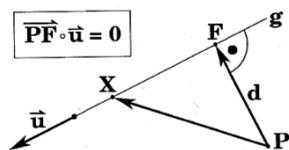
Aufgabe 3

Die Gerade g ist orthogonal zur Ebene E: $2x_1 + 6x_2 - 9x_3 = -6$ und durchstößt die Ebene im Punkt $P(0/2/2)$. Bestimme alle Punkte auf der Geraden g , die von der Ebene E den Abstand 11 haben.

Abstand von Punkt und Gerade - Abstand paralleler Geraden

Lotfußpunktverfahren über den allgemeinen Geradenpunkt

Der Abstand d eines Punkte P von einer Geraden g ist die Länge des Lots auf g . Ist X ein allgemeiner Geradenpunkt der Geraden g , also $\vec{X} = \vec{G} + \mu \cdot \vec{u}$, dann bestimmt man den Lotfußpunkt F aus der Gleichung $\overrightarrow{PF} \circ \vec{u} = 0$. Der Abstand ist dann $d(P, g) = |\overrightarrow{PF}|$.



Beispiel: Sei nun $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $P(0/-2/1)$. Dann gilt: $\overrightarrow{PF} = \vec{F} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 5 + 2\mu_F \\ 4 - 2\mu_F \\ 5 + 3\mu_F \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{PF} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} 5 + 2\mu_F \\ 4 - 2\mu_F \\ 5 + 3\mu_F \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (5 + 2\mu_F) \cdot 2 + (4 - 2\mu_F) \cdot (-2) + (5 + 3\mu_F) \cdot 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 10 + 4\mu_F - 8 + 4\mu_F + 15 + 9\mu_F = 0 \Leftrightarrow 17\mu_F = -17 \Leftrightarrow \mu_F = -1$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = |\overrightarrow{PF}| = \sqrt{49} = 7. \text{ Ferner gilt: } \vec{F} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



Aufgabe 4

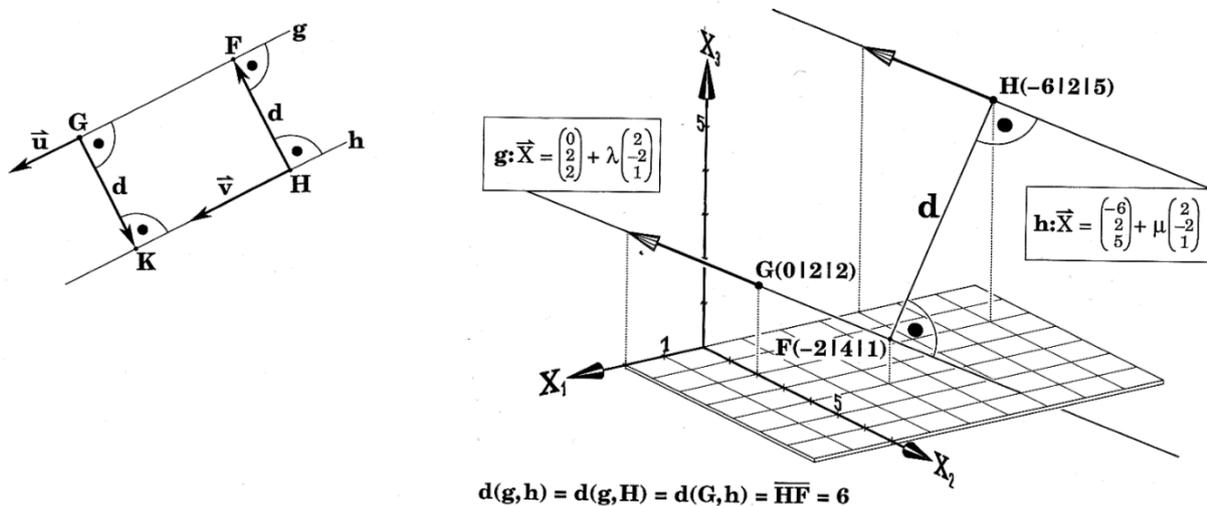
Untersuche, welcher Punkt auf der Geraden g vom Punkt R die kleinste Entfernung hat.

a) $g: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; R(-2/-1/1)$ b) $g: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; R(1/2/-3)$



Aufgabe 5

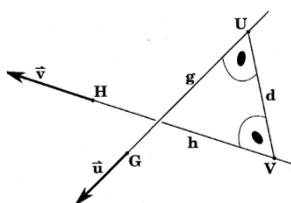
- a) Zeige, dass die beiden Geraden g und h unten parallel sind.
- b) Berechne den Abstand d(g, h) der parallelen Geraden g und h aus der folgenden Abbildung mithilfe des obigen Verfahrens. **Bestätige rechnerisch** den angegebenen Lotfußpunkt F. [Hinweis: Der **Abstand paralleler Geraden** lässt sich berechnen, indem man eine Gerade und einen Punkt der zweiten Gerade wählt und darauf das obige Lotfußpunktverfahren anwendet.]



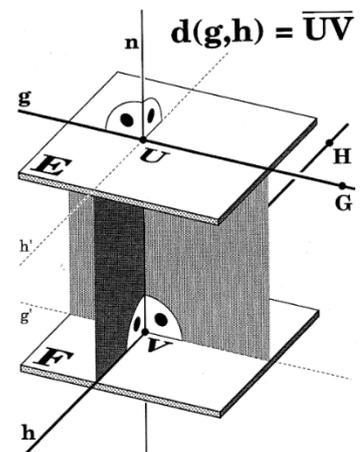
Abstand windschiefer Geraden

Was ist der Abstand zweier windschiefer Geraden?

Der **Abstand d(g, h)** zweier windschiefer Geraden g und h ist die Länge der kürzesten Strecke, die ein Punkt von g zu einem Punkt von h verbindet. Legt man durch jede der beiden Geraden eine Ebene, die parallel ist zur anderen Geraden, dann haben diese beiden Ebenen den Abstand d(g, h). Die Normalprojektion g' von g in F schneidet h im Fußpunkt V des gemeinsamen Lots n. Ebenso schneidet die Normalprojektion h' von h die Gerade g im Fußpunkt U.



Also gilt: Zu zwei windschiefen Geraden g und h gibt es genau eine Gerade n, die beide senkrecht schneidet. Die Entfernung der beiden Schnittpunkte U und V ist der Abstand von g und h. Die Gerade n heißt **Normale** oder **gemeinsames Lot von g und h**.



Methode: „Allgemeiner Geradenpunkt“

Erläutere das folgende Verfahren und übertrage die Ausführungen in Dein Heft.

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_g = \begin{pmatrix} -3 + 4\lambda \\ 9 - \lambda \\ 8\lambda \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_h = \begin{pmatrix} 8 + 4\mu \\ 4 + 3\mu \\ 4 + 4\mu \end{pmatrix}$$

$$\text{Allgemeiner Verbindungsvektor } \overrightarrow{X_g X_h} = \begin{pmatrix} 11 + 4\mu - 4\lambda \\ -5 + 3\mu + \lambda \\ 4 + 4\mu - 8\lambda \end{pmatrix}$$

μ und λ muß man so berechnen, daß $\overrightarrow{X_g X_h}$ auf den Richtungsvektoren von g und h senkrecht steht:

$$\overrightarrow{X_g X_h} \circ \vec{u} = 0: \quad 4(11 + 4\mu - 4\lambda) - (-5 + 3\mu + \lambda) + 8(4 + 4\mu - 8\lambda) = 0$$

$$\overrightarrow{X_g X_h} \circ \vec{v} = 0: \quad 4(11 + 4\mu - 4\lambda) + 3(-5 + 3\mu + \lambda) + 4(4 + 4\mu - 8\lambda) = 0$$

Das Gleichungssystem $81 + 45\mu - 81\lambda = 0$

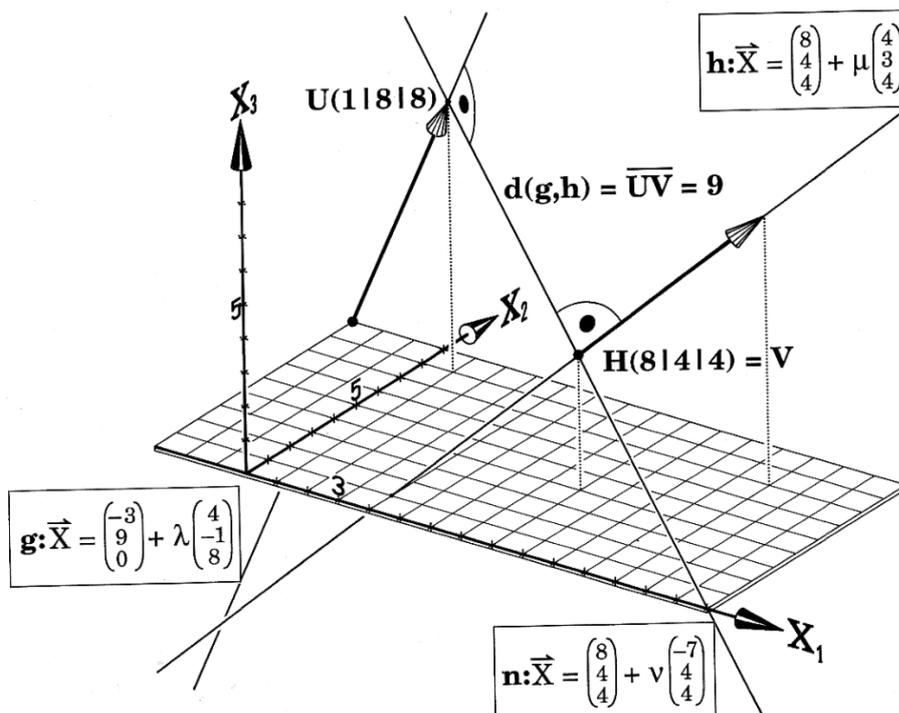
$$45 + 41\mu - 45\lambda = 0 \quad \text{hat die Lösungen } \lambda = 1, \mu = 0.$$

$\lambda = 1$ in g eingesetzt liefert $U(1|8|8)$, $\mu = 0$ in h eingesetzt liefert $V(8|4|4)$.

Abstandvektor $\overrightarrow{UV} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$, Abstand $d(g,h) = |\overrightarrow{UV}| = 9$

Gleichung der Normale $n: \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Grafische Darstellung der Situation





Aufgabe 6¹⁰

Berechne den Abstand Geraden g und h.

$$\text{a) } g: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; h: \vec{X}(s) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

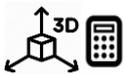
$$\text{b) } g: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; h: \vec{X}(s) = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 7¹¹

$$\text{Seien } g: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{X}(s) = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechne den Punkt U auf der Geraden g und den Punkt V auf h, so dass die Strecke von U nach V die kürzeste Verbindungsstrecke der beiden Geraden g und h ist.



Aufgabe 8¹²

Eine Flugschule hat die Ausbildung ihrer neuen Flugschüler abgeschlossen und lässt diese das erste Mal ohne jede Begleitung fliegen. Der erste Schüler verliert plötzlich die Kontrolle. Sein Flugzeug gerät in einen 13-sekündigen Sturzflug vom Punkt A (1000 | -600 | 1350) zum Punkt B (0 | 400 | 100); dann hat er wieder alles im Griff. Der zweite Flugschüler setzt gerade zum Start an. Für den Startflug von C (600 | 600 | 0) nach D (-600 | -200 | 400) benötigt er 27 Sekunden. (Alle Angaben in Metern.)

- Zeige**, dass die beiden Flugbahnen windschief sind, und **bestimme** den Abstand der windschiefen Flugbahnen.
- Wenn der Abstand zwischen zwei Flugzeugen weniger als 100 Meter beträgt, spricht man von einem „Beinahezusammenstoß“. Wäre dies der Fall, müsste der erste Schüler noch einmal Flugstunden nehmen.

Untersuche, ob der erste Schüler erneut Flugstunden nehmen muss.

- Die Fluglehrer befinden sich auf dem Flughafen im Punkt (600 | 600 | 0). Auf Grund von schlechter Sicht können sie nur 800 Meter weit sehen.

Prüfe nach, ob die Fluglehrer das Vergehen des (ehemaligen) Flugschülers überhaupt sehen konnten.

- Um den ganzen Zusammenhang im Detail rekonstruieren zu können, werden noch die Geschwindigkeiten der beiden Flugzeuge und die Steigung des zweiten Fliegers benötigt.

Bestimme die Geschwindigkeiten und Steigung des zweiten Flugzeuges.

- Stelle** die Situation im 3D-Modell **dar**.

¹⁰ Lambacher Schweizer LK Mathematik NRW (2017), S. 253.

¹¹ Lambacher Schweizer LK Mathematik NRW (2017), S. 253.

¹² Modifiziert nach EISEN, V.: Handlungsorientierter Mathematikunterricht. MUED, Appelhülsen 2017, 96.



Exkurs: Abstandsberechnung mittels Formeln

Wenn man bei Abstandsproblemen nur den Abstand und nicht den bzw. die Lotfußpunkt(e) benötigt, kann es hilfreich sein, auf Formeln zurückzugreifen. Alle Abstandsprobleme können mittels einfacher Formeln gelöst.

Formel für den Abstand Punkt - Ebene¹³

Ebene in Normalform: Der Abstand eines Punktes P zu einer Ebene E: $\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$ beträgt:

$$d = \frac{|\vec{n} \circ (\vec{P} - \vec{A})|}{|\vec{n}|}$$

Beispiel: E: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \right) = 0$ und $P_1 (3/-2/2)$.

$$d(P_1; E) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \right) \right|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{9}} = \frac{|4 + 6 + 8|}{3} = \frac{|18|}{3} = 3.$$

Ebene in Koordinatenform: Für die Ebene E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = k$ und den Punkt P($p_1 | p_2 | p_3$) ergibt sich der Abstand des Punktes P zur Ebene E:

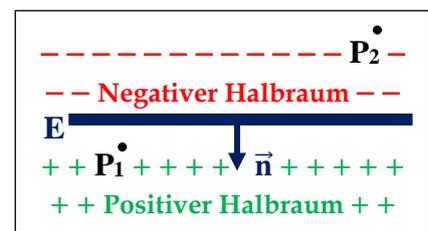
$$d = \frac{|n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - k|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

Beispiel: E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = -6$ und $P_2 (-8/6/-5)$

$$d(P_2; E) = \frac{|2 \cdot (-8) - 2 \cdot 6 + 1 \cdot (-5) - (-6)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-16 - 12 - 5 + 6|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|-27|}{\sqrt{9}} = \frac{27}{3} = 9.$$

Manchmal ist interessant, auf welcher Seite einer Ebene sich ein Punkt befindet. Man nennt die Seite, in die der Normalvektor zeigt, **positiven Halbraum**, wohingegen der andere Halbraum **negativer Halbraum** heißt. Man kann nachweisen¹⁴:

- Ist $\vec{n} \circ (\vec{P} - \vec{A}) = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - k > 0$ zeigt der Normalvektor in die Richtung des Punktes P (P liegt im positiven Halbraum).
- Für den Fall, dass $\vec{n} \circ (\vec{P} - \vec{A}) = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - k < 0$, zeigt der Normalvektor in den entgegengesetzte Richtung des Punktes P (P liegt im negativen Halbraum).



Wegen $\vec{n} \circ (\vec{P}_1 - \vec{A}) = 18$ und $n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - k = -27 < 0$ liegt der Punkt P_1 im positiven Halbraum und P_2 im negativen Halbraum. Der Ursprung liegt hier im positiven Halbraum, weil $2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - (-6) = -k = 6$.

¹³ Ein Nachweis der obigen Formeln kann z. B. unter <http://www.mathematik-oberstufe.de/vektoren/a/abstand-punkt-ebene-formel.html> (01.09.2017) betrachtet werden.

¹⁴ Vgl.: Anschauliche Analytische Geometrie von Barth, Krumbacher, Barth (2000), S. 266-268

Formel für den Abstand Punkt - Gerade¹⁵

Der Abstand eines Punktes P zu einer Geraden $g: \vec{X}(r) = \vec{G} + r \cdot \vec{u}$ lautet:

$$d = \frac{|\vec{u} \times (\vec{P} - \vec{G})|}{|\vec{u}|}$$

Beispiel: $g: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $P(0/-2/1)$.

$$d(P; g) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \right|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{17}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 22 \\ -5 \\ -18 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{22^2 + (-5)^2 + (-18)^2}}{\sqrt{17}} = 7$$

Formel für den Abstand windschiefer Geraden¹⁶

Der Abstand zweier windschiefer Geraden $g: \vec{X}(r) = \vec{G} + r \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{X}(s) = \vec{H} + s \cdot \vec{v}$ lautet:

$$d = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \circ (\vec{G} - \vec{H})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Beispiel: $g: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X}(s) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$d(g; h) = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \circ \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -28 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -28 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|308 + 80 - 64|}{\sqrt{(-28)^2 + 16^2 + 16^2}} = 9.$$

¹⁵ Ein Nachweis der obigen Formeln kann z. B. unter <http://www.mathematik-oberstufe.de/vektoren/a/abstand-punkt-gerade-formel.html> (01.09.2017) betrachtet werden.

¹⁶ Ein Nachweis der obigen Formeln kann z. B. unter <http://www.mathematik-oberstufe.de/vektoren/a/abstand-gerade-ws-formel.html> (01.09.2017) betrachtet werden.

5 Winkelberechnung¹⁷

In der Analytischen Geometrie interessieren Lösungen zu folgenden Winkelproblemen:

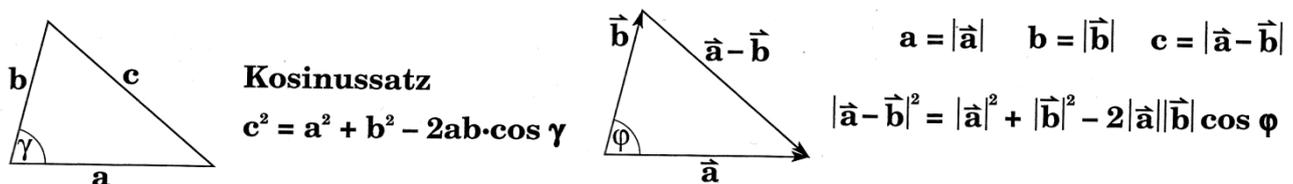
- Winkel zwischen zwei Vektoren
- Schnittwinkel zwischen zwei Geraden
- Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene
- Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen



Aufgabe 1 (Winkel zwischen zwei Vektoren)

Erläutere die Umformungsschritte für folgende Herleitung und **notiere** die Formel mit Skizze und Beispiel in Deinem Heft.

Der Winkel zwischen den beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} soll mit dem *nicht überstumpfen* Winkel φ bezeichnet werden (also ist $\varphi \leq 180^\circ$). Aus der Mittelstufe kennen wir den wichtigen Kosinussatz, mit dem wir eine Beziehung zwischen dem Winkel φ und den beiden Vektoren herstellen können.



Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$ gilt für die **linke** Seite der obigen Formel:

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 \\ &= a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 + a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2 \\ &= \mathbf{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)} \end{aligned}$$

Für die **rechte** Seite der Formel zum Kosinussatz gilt:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2ab \cos(\varphi) = \mathbf{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2ab \cos(\varphi)}$$

Da die rechte und linke Seite der Formel zum Kosinussatz gleich sind, erkennt man, dass nach Subtrahieren aller Quadrate und anschließendem Dividieren durch -2 folgende Beziehung entsteht:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = ab \cos(\varphi) \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = ab \cos(\varphi) \Leftrightarrow \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{ab}$$

Satz: Für zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} , die den Winkel φ einschließen, gilt: $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{a \cdot b}$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{a} \circ \vec{b} = (-7) \cdot 6 + (-6) \cdot (-3) + 6 \cdot (-2) = -36$, $a = \sqrt{121} = 11$,
 $b = \sqrt{49} = 7$, $\cos(\varphi) = \frac{-36}{11 \cdot 7} = -\frac{36}{77} \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(-\frac{36}{77}\right) \approx 117,9^\circ$

¹⁷ Abbildungen aus: Anschauliche Analytische Geometrie von Barth, Krumbacher, Barth (2000)



Aufgabe 2 (Innenwinkel eines Vierecks)¹⁸

Ein Viereck hat die Eckpunkte O (0/0/0), P (2/3/5), Q (5/5/6) und R (1/4/9).

Berechne die Längen der Seiten und die Größe der Innenwinkel des Vierecks.



Aufgabe 3 (Schnittwinkelberechnung I)

Erläutere die Herleitungen der Formeln für die Schnittwinkelberechnung auf der folgenden Seite und **notiere** die Formeln mit Skizze und Beispiel in Deinem Heft. Nutze dazu das **Überblicksblatt zur Schnittwinkelberechnung**, das in Dein Heft eingeklebt werden kann.



Aufgabe 4 (Schnittwinkelberechnung II)¹⁹

Gegeben sind die sich schneidenden Geraden $g: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $h: \vec{X}(s) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

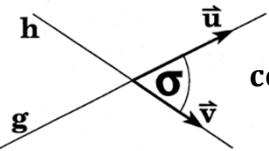
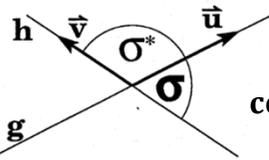
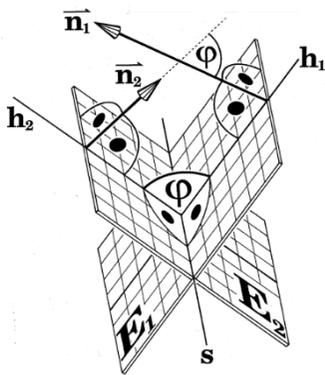
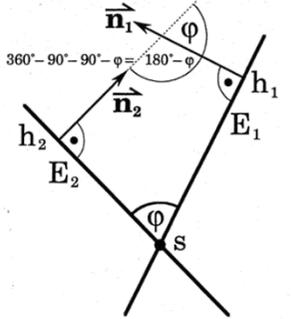
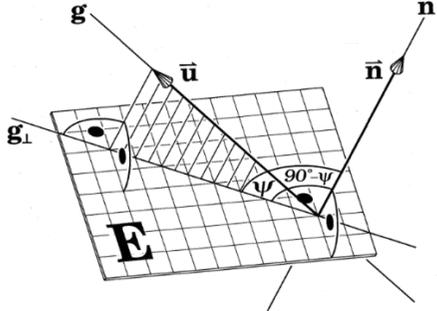
sowie die Ebenen E: $x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 7$ und F: $x_2 + x_3 = 0$.

- Berechne** die Größe des Schnittwinkels zwischen den Geraden g und h.
- Berechne** die Größe des Schnittwinkels zwischen den Ebenen E und F.
- Berechne** die Größe des Schnittwinkels zwischen der Geraden g und der Ebene E.

¹⁸ Lambacher Schweizer LK Mathematik (2017), S. 194.

¹⁹ Lambacher Schweizer LK Mathematik (2017), S. 256.

Schnittwinkel zwischen zwei Geraden, zwischen Gerade und Ebene sowie zwischen zwei Ebenen

Schnittwinkel zweier Geraden	Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen	Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene
 $\cos(\sigma) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{u} \cdot \vec{v} }$  $\cos(\sigma^*) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{u} \cdot \vec{v} }$ <p> $\cos(\sigma^*) = \cos(180 - \sigma) = -\cos(\sigma)$ $\cos(\sigma) = -\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{u} \cdot \vec{v} }$ Insgesamt gilt: $\cos(\sigma) = \frac{ \vec{u} \cdot \vec{v} }{ \vec{u} \cdot \vec{v} } = \frac{ \vec{u} \cdot \vec{v} }{ \vec{u} \cdot \vec{v} }$ </p>	  <p>Blick auf die Ebenen in Richtung der Schnittgerade s</p> $\cos(\varphi) = \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 } = \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }$ <p>Die Betragsstriche berücksichtigen die beiden Fälle, dass die beiden Normalvektoren den Winkel φ bzw. $180^\circ - \varphi$ einschließen, denn es gilt $\cos(180 - \varphi) = -\cos(\varphi)$.</p>	 $\cos(90 - \psi) = \frac{ \vec{u} \cdot \vec{n} }{ \vec{u} \cdot \vec{n} } = \frac{ \vec{u} \cdot \vec{n} }{ \vec{u} \cdot \vec{n} }$ <p>Die Betragsstriche berücksichtigen die zwei Fälle, dass \vec{n} und \vec{u} den Winkel $90^\circ - \psi$ bzw. $90^\circ + \psi$ einschließen ($\psi \leq 90^\circ$), denn es gilt der Zusammenhang $\cos(90 - \psi) = -\cos(90 + \psi)$. Mit der Beziehung $\cos(90 - \psi) = \sin(\psi)$ folgt $\sin(\psi) = \frac{ \vec{u} \cdot \vec{n} }{ \vec{u} \cdot \vec{n} }$.</p>
$\cos(\sigma) = \frac{ \vec{u} \cdot \vec{v} }{ \vec{u} \cdot \vec{v} } \Rightarrow \sigma = \cos^{-1} \left(\frac{ \vec{u} \cdot \vec{v} }{ \vec{u} \cdot \vec{v} } \right)$	$\cos(\varphi) = \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 } \Rightarrow \varphi = \cos^{-1} \left(\frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 } \right)$	$\sin(\psi) = \frac{ \vec{u} \cdot \vec{n} }{ \vec{u} \cdot \vec{n} } \Rightarrow \psi = \sin^{-1} \left(\frac{ \vec{u} \cdot \vec{n} }{ \vec{u} \cdot \vec{n} } \right)$
<p> $g: \vec{X}(r) = \vec{G} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; h: \vec{X}(s) = \vec{G} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\sigma = \cos^{-1} \left(\frac{\left \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right }{\sqrt{1^2+3^2+2^2} \cdot \sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}} \right)$ $\sigma = \cos^{-1} \left(\frac{ -2+3+2 }{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{3}{\sqrt{84}} \right) \approx 70,9^\circ$ </p>	<p> $E_1: 2x_1 + x_2 - x_3 = 12; E_2: \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = 0$ $\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{\left \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right }{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2+1^2+1^2}} \right)$ $\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{ -6+1-1 }{\sqrt{6} \cdot \sqrt{11}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{6}{\sqrt{66}} \right) \approx 42,4^\circ$ </p>	<p> $g: \vec{X}(r) = \vec{G} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; E: 2x_1 + x_2 - x_3 = 12$ $\psi = \sin^{-1} \left(\frac{\left \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right }{\sqrt{1^2+3^2+2^2} \cdot \sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2}} \right)$ $\psi = \sin^{-1} \left(\frac{ 2+3-2 }{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{3}{\sqrt{84}} \right) \approx 19,1^\circ$ </p>

6 Hier geht es zum Abitur



Chephren- und Cheops-Pyramide²⁰

Die Pyramiden von Gizeh sind das einzige noch heute erhaltene der Sieben Weltwunder der Antike. Sie liegen ca. 15 Kilometer von der Innenstadt von Kairo entfernt direkt am Stadtrand des Vorortes Gizeh in der Wüste. Der quadratische Grundriss der Pyramiden sowie die Ausrichtung nach den Himmelsrichtungen wurden beim Bau sehr exakt eingehalten. In Abbildung 1 ist die Situation vereinfacht in der Draufsicht dargestellt. Abbildung 2 zeigt die Einbettung im 3D-Koordinatensystem.

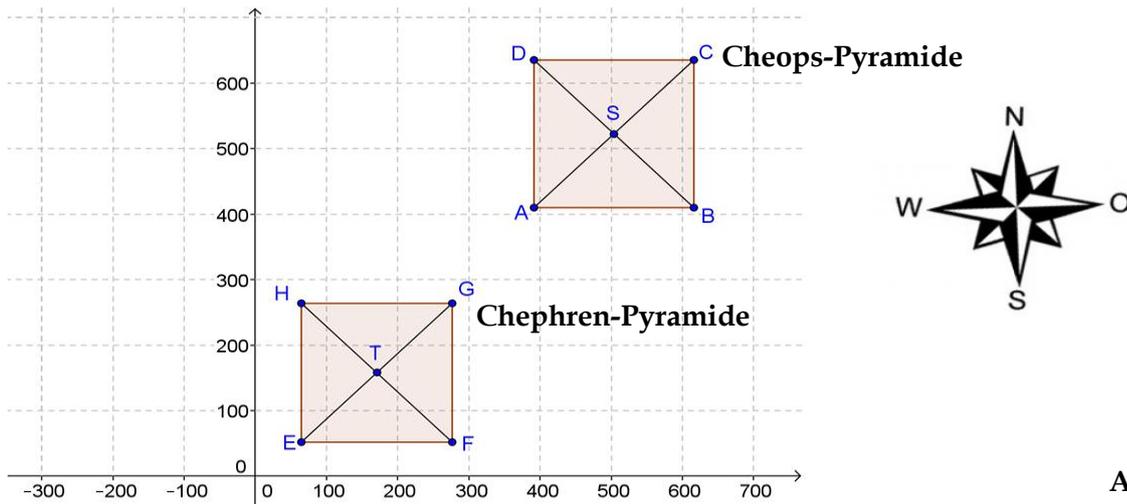


Abbildung 1

Die nachstehend in Metern angegebenen Koordinaten $(x | y | z)$ beziehen sich auf einen Koordinatenursprung $O(0 | 0 | 0)$ nahe der südwestlichen Ecke der Chephren-Pyramide (siehe Abbildung 1). Die Chephren-Pyramide steht auf der durch $z = 10$ festgelegten Ebene und liegt damit 10 m höher als die größere Cheops-Pyramide, so dass ihre Spitze die der Cheops-Pyramide noch überragt. Abbildung 2 bietet eine perspektivische Ansicht, in der die Ebene $z = 10$ grau getönt ist.

Abbildung 2

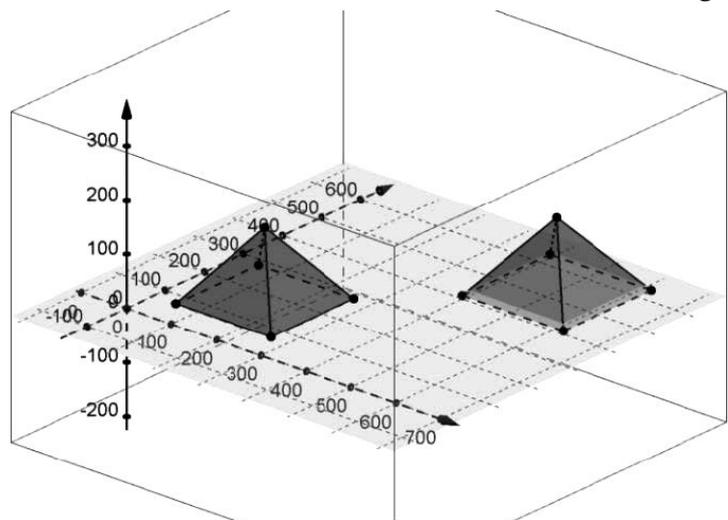
Es gelten folgende Koordinaten für die Eckpunkte der Pyramide:

Cheops-Pyramide:

A $(391 | 410 | 0)$, B $(616 | 410 | 0)$,
 C $(616 | 635 | 0)$, D $(391 | 635 | 0)$,
 S $(503,5 | 522,5 | 139)$
 Pyramidenhöhe 139 m

Chephren-Pyramide:

E $(65 | 52 | 10)$, F $(277 | 52 | 10)$,
 G $(277 | 264 | 10)$, H $(65 | 264 | 10)$,
 T $(171 | 158 | 146)$
 Pyramidenhöhe 136 m



a) Diese Teilaufgabe bezieht sich ausschließlich auf die Geometrie der Cheops-Pyramide.

²⁰ Modifiziert nach einer Vorbereitungsaufgabe auf das NRW-Zentralabitur 2017 (LK Mathematik), die sich anlehnt an eine Aufgabenidee aus Analytische Geometrie und lineare Algebra von Kroll, Reiffert, Vaupel (Dümmler-Verlag 1997, S. 41-43)

- (1) **Beschreibe**, wie sich die Koordinaten der Eckpunkte D , C , S aus den Koordinaten der Eckpunkte A , B sowie aus der Höhe der Cheops-Pyramide berechnen lassen.
- (2) **Berechne** den (Böschungs-)Winkel, den die Seitenflächen der Cheops-Pyramide mit der Grundebene einschließen.
- (3) Um auf möglichst kurzem Wege von der Ecke B zur Ecke D zu gelangen, ohne die massive Pyramide zu durchbohren, muss man einen Weg auf der Pyramidenoberfläche wählen, der durch einen Punkt der Kante \overline{AS} oder \overline{CS} führt.

Bestimme die Länge dieser kürzesten Verbindung, die auf der Cheops-Pyramide von der Ecke B zur Ecke D führt.

- b) Am Morgen des 21. März 2015 um 9:00 Uhr stand die Sonne im Südosten. Der Richtungsvektor der Sonnenstrahlen

- a) **Bestimme** die Größe der Schattenfläche der Chephren-Pyramide in der durch $z = 10$ definierten Ebene.
- b) **Erkläre** durch plausible und realistische Überlegungen, unter welchen Bedingungen kein Schatten in der durch $z = 10$ definierten Ebene entsteht.
- c) Am Nachmittag des 21. Dezember 2014 um 15:15 Uhr stand die Sonne tief im Südwesten. Der Schatten der Pyramidenspitze T ($171 \mid 158 \mid 146$) traf auf die Cheops-Pyramide in einem Punkt T' . Dabei verlief der gedachte Strahl entlang der Geraden vom Punkt T über T' nach T'' ($504 \mid 459 \mid 0$).

Nenne mit Hilfe der Abbildung die Seitenfläche der Cheops-Pyramide, in welcher der Schattenpunkt T' liegt, und berechnen Sie die Koordinaten von T' .

- c) Um die zum Bau benötigten Steinquader in die erforderliche Höhe zu bringen, wurden geradlinige Rampen entlang der Pyramide aufgeschüttet. Im Folgenden soll eine von Westen an die Südseite der Cheops-Pyramide führende Rampe durch eine Strecke betrachtet werden, welche in einem Punkt P in der durch $z = 0$ definierten Ebene beginnt, die Kante \overline{AS} in einem Punkt Q zwischen A und S schneidet und in einem Punkt R auf der Kante \overline{BS} endet. Dies ist in Abbildung 3 in Draufsicht dargestellt.

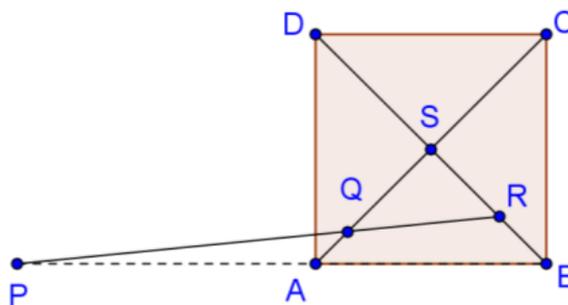


Abbildung 3

- (1) **Begründe**, weshalb die Punkte P , A , B auf einer Geraden liegen.
- (2) **Ermittle** einen Lösungsplan, wie sich der Startpunkt P der Rampe aus der Vorgabe von R und dem Steigungswinkel der Rampe gegen die Horizontale bestimmen lässt. **Gib** für jeden Schritt die notwendigen Gleichungen an.

[Hinweis: Konkrete Rechenschritte sind nicht durchzuführen.]

7 Kontrollaufgaben

Kompetenzraster

Hilfsmittelfreie Aufgaben

Ich kann ...	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
begründen, dass drei Punkte auf einer Geraden liegen	1a				
den Punkt einer Schar mit rechtem Winkel in einem Dreieck bestimmen.	1b				
eine Bedingung für Rechtwinkligkeit mittels Skalarprodukt angeben.	2a				
ein Viereck auf seine Eigenschaften untersuchen.	2b				
den Abstand Punkt - Gerade sowie den Lotfußpunkt berechnen.	3a,b				
den Bildpunkt einer Spiegelung an einer Geraden berechnen.	3c				
eine Lotgerade zu einer Ebene in Koordinatenform bestimmen.	4a				
den Schnittpunkt von Gerade und Ebene in Koordinatenform berechnen.	4b				
Abstand zweier Punkte berechnen.	4c				
Lagebeziehung von Gerade und Ebene in Koordinatenform untersuchen	5a,b				
Lagebeziehung von Ebenen auf der Basis von LGS untersuchen.	6				

Aufgaben unter Zuhilfenahme des GTR

Ich kann ...	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
begründen, dass ein Dreieck in einer Grundebene liegt.	7a				
zeigen, dass ein Dreieck gleichseitig ist.	7a				
zeigen, dass Dreiecksseiten gleich weit vom Ursprung entfernt liegen.	7a				
eine Spitze einer Pyramide bestimmen (Kantenlängen sind bekannt).	7b				
die Lagebeziehung von Gerade und Ebene beurteilen.	7c				
den Schnittpunkt von Gerade und Ebene berechnen.	7d,8h				
den Abstand zweier Punkte bestimmen.	7d,8h				
einen Geradenpunkt bestimmen, der genau unterhalb einer Strecke liegt.	7d				
eine Streckenpunkt angeben, der genau oberhalb eines Punktes liegt.	7d				
einen Schnittwinkel von Gerade und Ebene berechnen.	7d,e,8h				
ein geometrisches Problem (Abstand Punkt - Gerade) lösen.	7f				
überprüfen, ob eine Gerade oberhalb eines Punktes verläuft.	8a				
Geschwindigkeiten bei Bewegungsaufgaben berechnen.	8b				
Lagebeziehung von Geraden untersuchen und im Kontext deuten.	8c,g				
den Unterschied zwischen Flugbahnen- und Flugzeuge-Abstand erläutern.	8d				
den geringsten Flugzeuge-Abstand sowie Flugbahnen-Abstand berechnen.	8e,f				
bestimmte Ortspunkte einer Flugbahnen bestimmen.	8h				
einen Abstand eines Punktes von einer Ebene berechnen.	8h				
überprüfen, ob eine Gerade über einer Fläche verläuft.	8i				
zeigen, dass eine Gerade Schnittgerade zweier nichtparalleler Ebenen ist.	9a				
nichtparallele Ebenen bestimmen, die eine bestimmte Schnittgerade haben.	9b				



Hilfsmittelfreie Aufgaben

Aufgabe 1²¹

Gegeben sind die Punkte A $(-2|1|-2)$, B $(1|2|-1)$ und C $(1|1|4)$ sowie für eine reelle Zahl d der Punkt D $(d|1|4)$.

- Begründe** mithilfe der Vektoren \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AC} , dass A, B und C nicht auf einer Geraden liegen, und **gib** eine Gleichung der Ebene **an**, in der das Dreieck ABC liegt.
- Ermittle** den Wert von d , so dass das Dreieck ABD im Punkt B rechtwinklig ist.

Aufgabe 2

- Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ z \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ sollen senkrecht zueinander stehen.

Erläutere, welche Bedingung sich daraus für $x, z \in \mathbb{R}$ ergibt. **Bestimme** ein konkretes Zahlenbeispiel für x und z .

- Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ spannen ein Viereck auf.

Erläutere, um welches besondere Viereck es sich handelt.

Aufgabe 3

- Berechne** den Punkt F auf der Geraden $g: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, der die kleinste Entfernung vom Punkt P $(4/8/-8)$ hat. [Zur Kontrolle: F $(16/17/0)$.]
- Ermittle** den Abstand des Punktes P von der Geraden g .
- Bestimme** den Bildpunkt P', der durch Spiegelung des Punktes P an der Geraden g entsteht.

Aufgabe 4 (LK)

Gegeben sind eine Ebene und ein Punkt durch $E: 2x + y - z = 1$ und $P(5|3|0)$.

- Bestimme** die Gleichung einer Geraden g , die senkrecht auf E steht und durch P verläuft.
- Ermittle** die Koordinaten des Schnittpunktes von g und E.
- Berechne** den Abstand der Punkte P und F $(1|1|2)$.

Aufgabe 5 (LK)

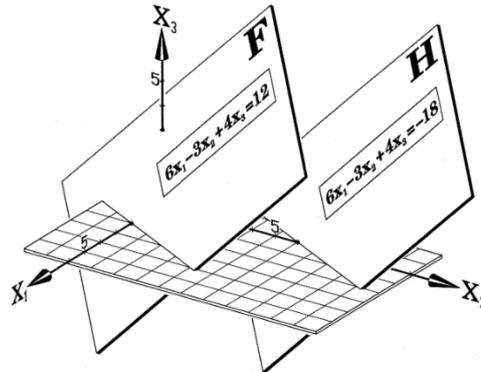
Gegeben sind eine Ebene $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$ und eine Gerade $g: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}$).

- Berechne** die Koordinaten des Schnittpunktes von g und E.
- Begründe**, dass g nicht senkrecht zu E verläuft.

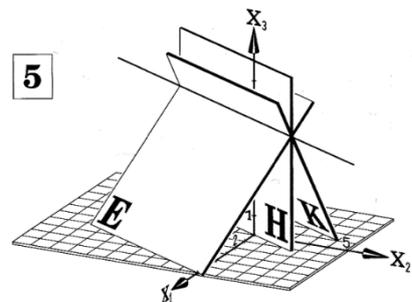
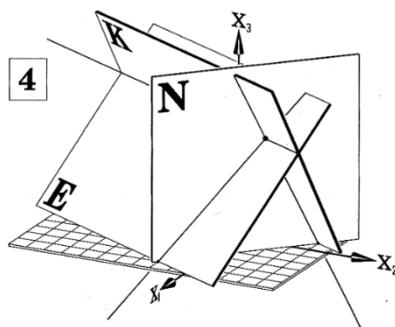
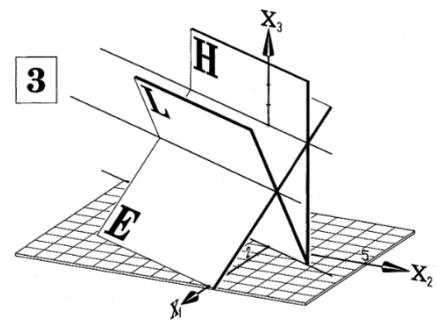
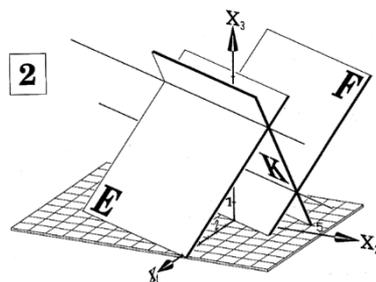
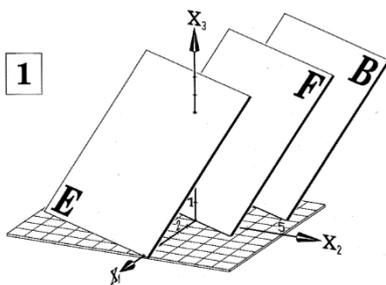
²¹ Zentralabitur GK Mathematik NRW 2017

Aufgabe 6 (LK)

- a) **Erkläre**, wie man anhand der Koordinatengleichungen von F: $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12$ und H: $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -18$ deren Lagebeziehung erkennen kann.
- b) **Untersuche**, wie sich G: $-12x_1 + 6x_2 - 8x_3 = -24$ zu F und H verhält.



- c) Für die **Lage dreier Ebenen** gibt es fünf charakteristische Fälle. Sind die Ebenen durch Koordinatengleichungen gegeben, dann müssen gemeinsame Punkte das zugehörige 3x3-Gleichungssystem erfüllen.



- (1) **Gib** zu jedem Fall **an**, ob das 3x3-Gleichungssystem der entsprechenden Koordinatengleichungen der drei Ebenen eindeutig lösbar, unlösbar oder ∞^1 -lösbar ist.

- (2) **Entscheide**, zu welchem Fall die drei folgenden LGS (A), (B) und (C) gehören.

$$(A) \quad \begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -6x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$(B) \quad \begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5 \\ -6x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$(C) \quad \begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 18 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5 \\ -6x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

[Tipp: Betrachte zunächst die Normalvektoren der jeweiligen Ebenen.]



Aufgaben unter Nutzung von Hilfsmitteln

Aufgabe 7 (Emscherblick²²)

In Bottrop im Ruhrgebiet steht auf einer Kohle-Abraumhalde das Kunstwerk „Haldenereignis Emscherblick“ – im Folgenden kurz als Kunstwerk bezeichnet (siehe Abbildung 1 links). Das Kunstwerk hat die Form einer Pyramide, die von vier gleichseitigen zueinander kongruenten Dreiecken begrenzt wird (regelmäßiges Tetraeder). Eines der Dreiecke bildet die Grundfläche der Pyramide. Die Kantenlänge beträgt jeweils 60 m. Das Kunstwerk steht auf vier 9 m hohen Betonpfeilern (vgl. Abbildung 1 links). Um das Kunstwerk begehen zu können, sind in die Konstruktion Treppen und Aussichtsplattformen eingearbeitet.

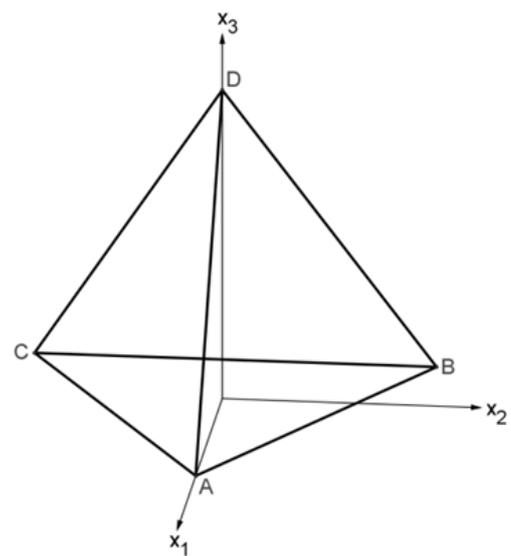
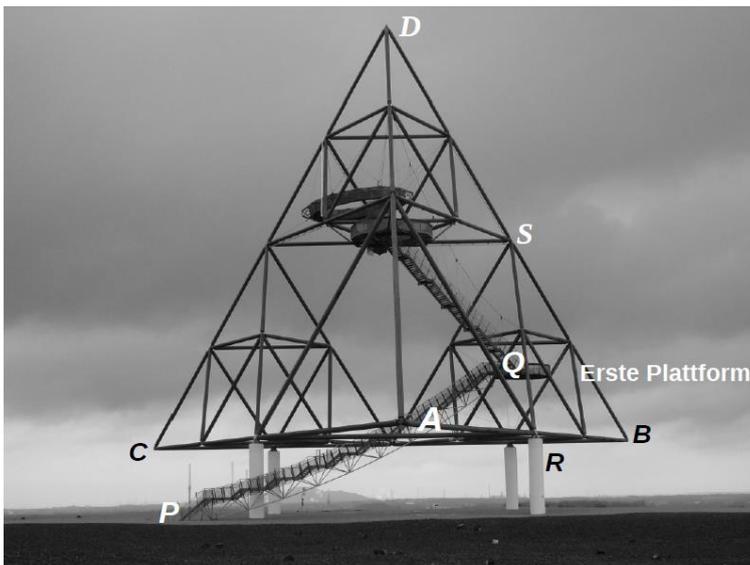


Abbildung 1

Das Kunstwerk wird in einem geeigneten Koordinatensystem durch eine regelmäßige Pyramide (alle Seiten gleich lang) modelliert. Der Ursprung des Koordinatensystems befindet sich im Schwerpunkt des Dreiecks ABC (siehe Abbildung 1 rechts), welches die Grundfläche der Pyramide bildet (Einheit: Meter [m]). Die Eckpunkte sind gegeben durch:

$$A(\sqrt{1200} \mid 0 \mid 0)$$

$$B(-\sqrt{300} \mid 30 \mid 0)$$

$$C(-\sqrt{300} \mid -30 \mid 0)$$

- a) (1) **Begründe**, dass die Grundfläche ABC des Kunstwerkes in der x_1x_2 -Ebene liegt.
- (2) **Zeige**, dass die Punkte A, B und C tatsächlich die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge 60 [m] sind und jeweils gleich weit vom Koordinatenursprung entfernt liegen.
- b) Die Spitze D liegt oberhalb des Koordinatenursprungs.
 - (1) **Bestimme** die Koordinaten der Spitze D des Kunstwerkes.
 - (2) **Gib** anschließend auch den Abstand der Spitze vom Erdboden gerundet auf zwei Nachkommastellen **an**.

²² Modifiziert nach einer Aufgabe im Zentralabitur NRW LK und GK Mathematik 2017

Zur Vereinfachung wird das Kunstwerk **im Folgenden** durch eine Pyramide mit Eckpunkten mit ganzzahligen Koordinaten modelliert. In dieser veränderten Modellierung besitzt die Pyramide die Eckpunkte $A' (35 | 0 | 0)$, $B' (-17 | 30 | 0)$, $C' (-17 | -30 | 0)$, $D' (0 | 0 | 49)$.

[Hinweis: Die gesuchten Längen- und Winkelangaben sowie die Koordinaten der gesuchten Punkte sollen im Folgenden jeweils auf 2 Nachkommastellen gerundet werden.]

Die Ebene $E_{B'C'D'}$ enthält die Eckpunkte B' , C' und D' . Eine Koordinatenform dieser Ebene lautet:

$E_{B'C'D'}: -49x_1 + 17x_3 = 833$ [Hinweis: Ebene $E_{B'C'D'}$ kann ohne Nachweis verwendet werden.]

- c) **Beurteile** die Aussage, dass die Ebene $E_{B'C'D'}$ parallel zur x_2 -Achse liegt. (LK)
- d) Die Besuchertreppe vom Boden zur ersten Plattform wird im ersten Treppenstück durch einen Abschnitt der Geraden g modelliert, der in $P (16 | 20 | 9)$ beginnt und ins Innere der Pyramide verläuft (vgl. Abbildung 1 links). Die Gerade g ist gegeben durch

$$g: \vec{X}(s) = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Die Gerade g durchstößt die Grundfläche $A'B'C'$ der Pyramide im Punkt T .

- (1) **Berechne** die Koordinaten des Punktes T , und **bestimme** die Länge des Treppenstückes, welches sich außerhalb der Pyramide befindet.

[Hinweis: Ein Nachweis, dass der Punkt T innerhalb der Dreiecksfläche $A'B'C'$ liegt, wird nicht erwartet.]

- (2) **Bestimme** die Koordinaten des Punktes auf der Geraden g , der sich genau unterhalb der Kante $\overline{A'C'}$ befindet, und **ermittle** den Abstand dieses Punktes vom vertikal darüber liegenden Punkt auf der Kante $\overline{A'C'}$.
- (3) Um die Sicherheit der Besucher des Kunstwerkes zu gewährleisten, müssen Vorschriften eingehalten werden. Dazu gehört auch, dass der Steigungswinkel der Treppe einen Wert von 30° nicht überschreiten sollte.

Zeige, dass für den durch g modellierten Abschnitt der Besuchertreppe die obige Sicherheitsvorschrift eingehalten wurde.

- e) Die Besuchertreppe soll erneuert werden. Die Planungen sehen vor, dass der Steigungswinkel der neuen Treppe gegenüber der x_1x_2 -Ebene dabei 30° betragen soll. In einem ersten Vorschlag wird die neue Treppe ausgehend vom Punkt $Q (-8,5 | 15 | 9)$ auf der ersten Plattform (vgl. Abbildung 1 links) als Teil einer Geraden der Schar g_a modelliert:

$$g: \vec{X}(s) = \begin{pmatrix} -8,5 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}).$$

Bestimme die zugehörigen Werte von a unter den vorgegebenen Bedingungen. (LK)

- f) Die erste kreisförmige Aussichtsplattform soll durch einen Kreis mit dem Mittelpunkt $Q (-8,5 | 15 | 9)$ modelliert werden, der parallel zur Grundfläche $A'B'C'$ liegt. Der mögliche Durchmesser der Aussichtsplattform wird begrenzt durch einen Stahlträger, der im Modell vom Mittelpunkt R der Kante $\overline{A'B'}$ zum Mittelpunkt S der Kante $\overline{B'D'}$ verläuft (vgl. Abbildung 1 links).

Berechne den maximal möglichen Durchmesser der Aussichtsplattform, wenn diese den Stahlträger direkt berühren würde (ohne Berücksichtigung der Dicke des Stahlträgers). (LK)

Aufgabe 8 (Bewegungsaufgabe²³)

Im Folgenden werden die Flugbewegungen in einem Koordinatensystem beschreibt die x_1 - x_2 -Ebene eine ebene Landschaft, in der sich ein Flughafen und eine Stadt befinden. Das Zentrum der Stadt liegt mit einer Kirche im Ursprung. Die x_1 -Achse weist in die Ostrichtung, die x_2 -Achse in die Nordrichtung. Im Folgenden werden die Flugbewegungen vereinfacht dargestellt. Unmittelbar nach dem Abheben des Flugzeuges F_1 im Punkt $P(-3 | -11 | 0)$ von der Startbahn geht das Flugzeug in eine geradlinige Flugbahn f_1 über:

$$f_1: \vec{X}(s) = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2,2 \\ 4 \\ 0,6 \end{pmatrix} \quad (0 \leq s \leq 15)$$

Ein zweites Flugzeug F_2 bewegt sich längs der Geraden f_2 mit:

$$f_2: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 15)$$

Dabei geben s und t jeweils die Anzahl der Minuten an, die seit dem Start von F_1 vergangen sind. Die Längeneinheit beträgt 1 km. Zum Startzeitpunkt von F_1 befindet sich F_2 im Punkt $(0 | 15 | 4)$.

- a) Es gilt in dieser Stadt für startende Flugzeuge die Bestimmung, dass die Kirche nicht überflogen werden darf.

Überprüfe, ob diese Bestimmung von F_1 eingehalten wird.

- b) **Untersuche**, welches der beiden Flugzeuge schneller fliegt, und **gib** die Geschwindigkeit des schnelleren Flugzeuges in km/h an.

- c) **Weise nach**, dass sich die Flugbahnen f_1 und f_2 **nicht** schneiden.

- d) **Erkläre** anschaulich den Unterschied zwischen dem minimalen Abstand der beiden Flugzeuge und dem kleinsten Abstand der Flugbahnen.

- e) **Ermittle** unter Zuhilfenahme des GTR den Zeitpunkt, in dem die beiden Flugzeuge ihren geringsten Abstand haben, und **gib** den minimalen Abstand an. (LK)

[Zur Kontrolle: Die Abstandsfunktion d der beiden Flugzeuge nach der Zeit t beträgt $d(t) = \sqrt{(3 + 1,8 \cdot t)^2 + (26 - 7 \cdot t)^2 + (4 - 0,6 \cdot t)^2}$.]

- f) **Berechne** den minimalen Abstand der Flugbahnen. (LK)

- g) Wir nehmen an, dass Flugzeug F_2 genau 1 km tiefer fliegt.

- (1) **Begründe**, dass die Flugbahn des Flugzeuges F_2 nun längs der Geraden h mit der Parametergleichung $h: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0 \leq r \leq 15)$ verläuft.

- (2) **Zeige**, dass sich die Flugbahnen f_1 und h der beiden Flugzeuge F_1 und F_2 im Punkt $S(8/9/3)$ schneiden.

- (3) **Beurteile**, ob es zu einer Kollision der Flugzeuge kommt.

²³ Modifiziert nach einer Abituraufgabe Zentralabitur NRW LK und GK Mathematik 2009

(4) **Bestimme** eine Gleichung der Ebene E (Flugkorridor), in der die sich schneidenden Flugbahnen f_1 und h liegen.

h) Das Flugzeug F_1 überfliegt in der Startphase (Abhebe-Phase) die Spitze $Q(12,4 | 17 | 1,3)$ eines nahe gelegenen Gebirges und taucht dann in eine Wolkenschicht W ein mit

$$W: \vec{X}(\lambda; \mu) = \begin{pmatrix} 19 \\ 30 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (-2 \leq \lambda, \mu \leq 2).$$

(1) **Berechne**, nach wie viel Minuten die Bergspitze Q überflogen wird und **ermittle** für diesen Zeitpunkt den Abstand, den das Flugzeug F_1 von der Spitze Q hat.

(2) **Bestimme** den Punkt R , in dem das Flugzeug F_1 in die Wolkenschicht W eintaucht.

[Zur Kontrolle: $R(19|29|6)$.]

(3) **Berechne** die Strecke, die das Flugzeug F_1 vom Start bis zum Eintauchen in die Wolkenschicht W zurückgelegt hat.

(4) **Ermittle** den Steigungswinkel α von Flugzeug F_1 beim Startvorgang.

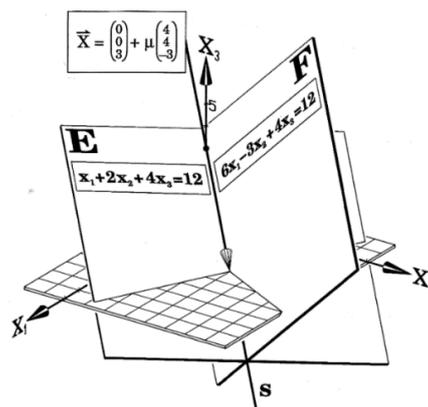
(5) **Berechne** den Abstand des Punktes Q von der Wolkenschicht W . (LK)

i) Ein in der x_1x_2 -Ebene liegendes militärisches Sperrgebiet wird beschrieben durch die Parameterform einer Ebene $E: \vec{X}(k; m) = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq k \leq 2$ und $0 \leq m \leq 7$.

Prüfe rechnerisch **nach**, ob das Flugzeug F_2 das militärische Sperrgebiet überfliegt.

Aufgabe 9 (Schnitt zweier nicht paralleler Ebenen im Kontext von LGS)

a) Bevor man Vektoren in der Analytischen Geometrie verwendete, beschrieb man eine Gerade mit einem 2×3 -Gleichungssystem (mit zwei Ebenen also). In der folgenden Abbildung werden zwei Ebenen in Koordinatenform zu Schnitt gebracht.



Zeige, dass die beiden Koordinatengleichungen von der Ebene $E: x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12$ und der Ebene $F: 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12$ die oben angegebene Schnittgerade s haben.

b) **Ermittle** zwei Koordinatengleichungen von Ebenen, die die Gerade s als Schnittgerade haben:

$$s: \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 1 + \mu \\ 1 + \mu \end{pmatrix}. \quad [\text{Tipp: Eliminiere den Parameter } \mu.]$$

Lösungen

2 Normal- und Koordinatenform einer Ebene

Aufgabe 1

b) Man bildet jeweils das Skalarprodukt und erhält genau dann Orthogonalität, falls das Skalarprodukt Null ist:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad (2) \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -42 + 18 - 12 = -36$$

$$(3) \begin{pmatrix} 17 \\ -17 \\ 17 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 23 \\ -23 \\ 23 \end{pmatrix} = 3 \cdot 17 \cdot 23 \neq 0 \quad (4) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad (5) \begin{pmatrix} 2,5 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} = 18 - 18 = 0$$

$$(6) \begin{pmatrix} a^2b \\ ab \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -a^2b^2 + a^2b = a^2(b - b^2) = 0, \text{ falls } a = 0 \text{ oder } b = 0 \text{ oder } b = 1.$$

c) Zu zeigen ist, dass die Ortsvektoren paarweise senkrecht aufeinander stehen und deren Skalarprodukt Null ergibt:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 4 + 2 = 0; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 - 2 - 2 = 0$$

$$(2) \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = -110 + 10 + 100 = 0; \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} = 20 - 70 + 50 = 0;$$

$$\begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} = -22 - 28 + 50 = 0$$

$$(2) \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a \cdot (a+1) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a+1 \\ -a \cdot (a+1) \\ a \end{pmatrix} = -110 + 10 + 100 = 0;$$

$$\begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a \cdot (a+1) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \cdot (a+1) \\ a \\ -a-1 \end{pmatrix} = 20 - 70 + 50 = 0;$$

$$\begin{pmatrix} a+1 \\ -a \cdot (a+1) \\ a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \cdot (a+1) \\ a \\ -a-1 \end{pmatrix} = -22 - 28 + 50 = 0$$

d) Es gilt $\vec{A} \perp \vec{B}$, $\vec{A} \perp \vec{C}$ und $\vec{B} \perp \vec{C}$, falls das Skalarprodukt der Vektoren Null ergibt:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 2u \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -u \\ 14 \\ -u \end{pmatrix} = -u + 14u - 2u^2 = 0 \Leftrightarrow -2u^2 + 13u = 0 \Leftrightarrow u \cdot (-2u + 13) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee u = 6,5$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 2u \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2u \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2u - 4u + 2u = 0 \text{ für jedes } u.$$

$$\begin{pmatrix} -u \\ 14 \\ -u \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2u \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -2u^2 - 56 - u = 0 \Leftrightarrow -2u^2 - u - 56 = 0 \Leftrightarrow u^2 + 0,5u + 28 = 0 \text{ (unlösbar)}$$

$$(2) \begin{pmatrix} u+1 \\ 2-u \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} u \\ u+2 \\ u+4 \end{pmatrix} = u^2 + u + 4 - u^2 - u - 4 = 0 \text{ für jedes } u$$

$$\begin{pmatrix} u+1 \\ 2-u \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2-3u \\ u \\ 2+2u \end{pmatrix} = 2u - 3u^2 + 2 - 3u + 2u - u^2 - 2 - 2u = -4u^2 - u = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee u = -0,25.$$

$$\begin{pmatrix} u \\ u+2 \\ u+4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2-3u \\ u \\ 2+2u \end{pmatrix} = 2u - 3u^2 + u^2 + 2u + 2u + 2u^2 + 8 + 8u = 14u + 8 = 0 \Leftrightarrow u = -\frac{4}{7}$$

Aufgabe 6

a) $x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 12 = 0$

b) $2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0$

c) $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 49 = 0$

Aufgabe 7

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7 = 0$

b) $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad x_2 = 1$

c) $\vec{AG} \times \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$
 $4x_1 - 8x_2 - x_3 - 16 = 0$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad x_1 + x_2 - 4x_3 - 16 = 0$

e) g und h sind echt parallel, $\vec{HG} \times \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \vec{X} = 0$
 $x_1 - x_2 - x_3 = 0$

f) g und h sind identisch, es gibt keine eindeutige Lösung.

Aufgabe 8

a) $n: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } m: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9

F wird aufgespannt von \vec{n}_E und \vec{r}_g , also $\vec{n}_F \parallel \vec{n}_E \times \vec{r}_g$

a) $\vec{n}_E \times \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad x_1 + x_2 - x_3 - 2 = 0$

b) $\vec{n}_E \times \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{0}, g \text{ ist Normale von } E, \text{ keine eindeutige Lösung}$

Alle infrage kommenden Ebenen bilden ein Büschel mit g als Trägergerade.

Aufgabe 10

- a) Die Symmetrieebene hat die Normalrichtung \overrightarrow{AB} und geht durch den Mittelpunkt von $[AB]$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 13 = 0$$

- b) Die Symmetrieebene S zweier Parallelen enthält deren Mittelparallele m und steht senkrecht auf der Ebene E, in der die Parallelen liegen oder enthält das Parallelenpaar oder steht darauf senkrecht.

$$m: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times 10 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$S: \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad 4x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 24 = 0$$

- c) Die Schnittgerade s von E und F steht senkrecht auf der Symmetrieebene S.

$$\overrightarrow{r_S} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{X} = 0 \quad x_1 + 2x_2 = 0$$

Aufgabe 11

- a) Projektionsgerade p: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneidet E in P':

$$3(14 + 3\mu) - (2 - \mu) = 0, \Rightarrow \mu = -4, P'(2 | 6 | 1)$$

$$\text{Spiegelpunkt S: } \overrightarrow{S} = \overrightarrow{P'} + \overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{P'} - \overrightarrow{P}, \quad S(-10 | 10 | 1)$$

- b) Projektionsgerade p: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ schneidet E: $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$

$$\text{in P': } 3(11 + 3\mu) + 3(11 + 3\mu) + 2(3 + 2\mu) = 6, \Rightarrow \mu = -3, P'(2 | 2 | -3)$$

$$\text{Spiegelpunkt S: } \overrightarrow{S} = \overrightarrow{P'} + \overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{P'} - \overrightarrow{P}, \quad S(-7 | -7 | -9)$$

3 Lagebeziehungen

Aufgabe 1

a)	E	F	G
PF	$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
NF	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{X} - 4 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \vec{X} + 5 = 0$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \vec{X} + 6 = 0$
KF	$x_3 - 4 = 0$	$x_1 + 5 = 0$	$x_2 + 6 = 0$

b)	E	F	G
PF	$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$
NF	$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \vec{X} + 6 = 0$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \vec{X} - 12 = 0$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{X} + 4 = 0$
KF	$2x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 6 = 0$	$3x_1 + 0 \cdot x_2 + 4x_3 - 12 = 0$	$0 \cdot x_1 + 2x_2 + x_3 + 4 = 0$

- c) (1) A geht durch den Ursprung.
 B geht durch den Ursprung und ist parallel zu x_3 -Achse, enthält also die x_3 -Achse.
 C ist die x_2x_3 -Ebene.
 D ist parallel zur x_1x_3 -Ebene und schneidet die x_2 -Achse bei 2.
 E ist parallel zur x_1 -Achse.
 F enthält x_3 -Achse und halbiert die Oktanten I, III, V und VII.
- (2) A ist parallel zur x_1x_3 -Ebene und schneidet die x_2 -Achse bei 2.
 B ist die x_2x_3 -Ebene.
 C ist parallel zur x_1x_2 -Ebene und schneidet die x_3 -Achse bei 3.
 D geht durch O.
 E ist parallel zur x_1x_2 -Ebene und schneidet die x_3 -Achse bei 3, $E = C$.
- d) A: $x_3 + 3 = 0$ B: $x_1 + x_3 - 1 = 0$ C: $x_2 - x_3 = 0$
 D: $x_1 - x_3 + 1 = 0$ E: $x_3 - 4 = 0$

Aufgabe 2

a) $x_1 = x_2 = 0$. Daher folgt: $6x_3 - 6 = 0 \Rightarrow x_3 = 1 \Rightarrow S_{12}(0/0/1)$

$x_1 = x_3 = 0$. Daher folgt: $3x_2 - 6 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \Rightarrow S_{13}(0/2/0)$

b) $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 6 = 0 \Leftrightarrow \underset{+6}{2x_1 + 3x_2 + 6x_3} = 6 \Leftrightarrow \underset{:6}{\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{1}} = 1$

$\xrightarrow{\text{Setze zwei Koordinaten Null und multipliziere mit dem Nenner unter der dritten Koordinate}}$ H hat die Achsenabschnitte $a_1 = 3$, $a_2 = 2$ und $a_3 = 1$.

$$\text{c) } \overrightarrow{S_{23}S_{13}} = \overrightarrow{S_{13}} - \overrightarrow{S_{23}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow s_3: \vec{X} = \overrightarrow{S_{23}} + \lambda \cdot \overrightarrow{S_{23}S_{13}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} (x_3 = 0!) \\ \overrightarrow{S_{12}S_{23}} = \overrightarrow{S_{23}} - \overrightarrow{S_{12}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow s_2: \vec{X} = \overrightarrow{S_{12}} + \lambda \cdot \overrightarrow{S_{12}S_{23}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} (x_2 = 0!)$$

d) Bestimme die Achsenschnittpunkte und Spurgeraden der Ebenen A bis F und **stelle** sie mithilfe des Spurdreiecks grafisch dar (Bei C bis E vergleiche die folgende Überblicksseite).

A: $(6|0|0)$, $(0|-3|0)$, $(0|0|-7)$

$$s_3: \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad s_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

B: $(-15|0|0)$, $(0|-5|0)$, $(0|0|3)$

$$s_3: \vec{X} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

C: $(0|0|0)$

$$s_3: \vec{X} = \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s_2: \vec{X} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad s_1: \vec{X} = \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D: $(-2|0|0)$, $(0|4|0)$

$$s_3: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

E: $(0|0|0)$

$$s_3: \vec{X} = \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s_{23}: \vec{X} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

F: $(0|-2|0)$

$$s_3: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

$$f: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad g: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{X}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{X}(s; t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad E: \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{6} + \frac{x_3}{6} = 1; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$E: x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0$$

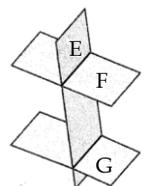
g und E haben eine Schnittpunkt S; h liegt in E; f verläuft parallel zu E

Aufgabe 5

Setze den Geradenvektor $\vec{X}(r)$ in die Normalform $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$ ein und löse die entstehende Gleichung nach r auf.

Aufgabe 7

b) E: $x_1 - x_2 + x_3 = 1$, F: $x_1 - x_2 - x_3 = 1$ haben nichtkollineare Normalvektoren. Sie schneiden sich daher in einer Geraden. G: $6x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 12$ und F haben zwar kollineare Richtungsvektoren, allerdings gilt G: $x_1 - x_2 - x_3 = 2$. G und F sind echt parallel. Die Abbildung rechts beschreibt die Situation.



c) Zum Beispiel: Echt parallel: E: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, F: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (gleicher Normalvektor und unterschiedliches Skalar auf der rechten Seite der Gleichung) identisch mit nicht identischem Normalvektor: E: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, F: $-x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0$ (Multiplikation von F mit -1 liefert E); sich schneidende Ebenen: E: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, F: $x_1 + x_2 - x_3 = 1$ (nicht kollineare Normalvektoren).

Aufgabe 8

a) (1) gehört zu Fig. 2, da Normalvektoren kollinear sind. (3) gehört zu Fig. 3, da das Skalarprodukt der beiden Normalvektoren Null ergibt und die Ebenen senkrecht aufeinander stehen. (2) gehört zu Fig. 1, da die Normalvektoren nicht kollinear mit einem Skalarprodukt ungleich Null sind.

b)

$$(I) \quad 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$$

$$(II) \quad x_1 - 2x_2 = 1 \Rightarrow \underset{II'}{x_2} = -0,5 + 0,5x_1 = -0,5 + 0,5 \cdot (1 + 0,8x_3) = \mathbf{0,4x_3}$$

$$2 \cdot (I) + (II) \text{ ergibt } (II') \quad 5x_1 - 4x_3 = 5 \Leftrightarrow \mathbf{x_1 = 1 + 0,8x_3} \text{ (} x_3 \text{ beliebig, aber fest)}$$

$$\text{Man erh\u00e4lt } \vec{X}(\mu) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0,8x_3 \\ 0,4x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

GTR-L\u00f6sung:

	a	b	c	d
1	2	1	-2	2
2	1	-2	0	1
3	0	0	0	0

0

SOLVE DELETE CLEAR EDIT

	a	b	c	d
1	2	1	-2	2
2	1	-2	0	1
3	0	0	0	0

0

SOLVE DELETE CLEAR EDIT

$X = 1 + \frac{4}{5}Z$
 $Y = \frac{2}{5}Z$
 $Z = Z$

REPEAT

$$(I) \quad 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$$

$$(II) \quad 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow \underset{I'}{x_2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}x_1 + 0,5x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{11}{9} + \frac{1}{3}x_3\right) + \frac{1}{2}x_3 = \frac{23}{9} + \frac{4}{3}x_3$$

$$(II) + 2 \cdot (I) \text{ ergibt } (I') \quad 9x_1 - 3x_3 = 11 \Leftrightarrow \mathbf{x_1 = \frac{11}{9} + \frac{1}{3}x_3} \text{ (} x_3 \text{ beliebig, aber fest)}$$

$$\text{Man erh\u00e4lt } \vec{X}(\mu) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{9} + \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{23}{9} + \frac{4}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{9} \\ \frac{23}{9} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{9} \\ \frac{23}{9} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

GTR-L\u00f6sung:

	a	b	c	d
1	2	1	-2	5
2	5	-2	1	1
3	0	0	0	0

0

SOLVE DELETE CLEAR EDIT

	a	b	c	d
1	2	1	-2	5
2	5	-2	1	1
3	0	0	0	0

0

SOLVE DELETE CLEAR EDIT

$X = \frac{11}{9} + \frac{1}{3}Z$
 $Y = \frac{23}{9} + \frac{4}{3}Z$
 $Z = Z$

REPEAT

c) LGS (4) gehört zu Fig. 5 und LGS (5) zu Fig. 8. Begründung: LGS (4) repräsentiert drei Koordinatengleichungen von Ebenen, von denen zwei echt parallel sind (Normalvektoren der zweiten und dritten Gleichung unterscheiden sich nur um das Vorzeichen; rechts vom = stehen in beiden Fällen die 1) und beide nicht parallel Ebene mit der ersten Koordinatengleichung sind (nicht kollineare Normalvektoren). Dass LGS (5) zu Fig. 8 gehört (und nicht zu Fig. 6 bzw. Fig. 7, die auch zu LGS (5) wegen der paarweise nicht kollinearen Normalvektoren passen könnten), erkennt man durch Addition von erster und dritter Gleichung; es entsteht die zweite Gleichung. Daher besitzt ist das LGS unendlich viele Lösungen.

4 Abstände von Objekten - Lotfußpunktverfahren

Aufgabe 1

$$E: x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 15, P(0/0/0)$$

$$\text{Lotgerade h: } \vec{X} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 3\mu \\ -5\mu \end{pmatrix}$$

$$\text{h in E: } \mu + 3 \cdot 3\mu - 5 \cdot (-5\mu) = 15 \Rightarrow \mu = \frac{3}{7} \Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{9}{7} \\ -\frac{15}{7} \end{pmatrix}$$

$$d = \overline{OF} = \left| \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{9}{7} \\ -\frac{15}{7} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^2 + \left(-\frac{15}{7}\right)^2} = \frac{3}{7} \sqrt{35} \approx 2,54$$

Aufgabe 2

a) F und H sind echt parallel, da beide Ebenen den gleichen Normalvektor haben, aber rechts vom „=“ unterschiedliche Zahlenwerte stehen.

$$\text{b) F: } 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12 \text{ und H: } 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -18$$

Betrachte den Abstand des Punktes (2/0/0), der auf F liegt, von H: $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -18$.

$$\text{Lotgerade h: } \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 6\mu \\ -3\mu \\ 4\mu \end{pmatrix}$$

$$\text{h in H: } 6 \cdot (2 + 6\mu) - 3 \cdot (-3\mu) + 4 \cdot 4\mu = -18 \Rightarrow 12 + 36\mu + 9\mu + 16\mu = -18$$

$$\Rightarrow \mu = -\frac{30}{61} \Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{180}{61} \\ \frac{90}{61} \\ -\frac{120}{61} \end{pmatrix}$$

$$d = \overline{PF} = \left| \begin{pmatrix} -\frac{180}{61} \\ \frac{90}{61} \\ -\frac{120}{61} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(-\frac{180}{61}\right)^2 + \left(\frac{90}{61}\right)^2 + \left(-\frac{120}{61}\right)^2} = \frac{33}{61} \sqrt{61} \approx 3,84$$

c) Betrachte die Schnittpunkte der Lotgeraden $h: \vec{X} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit den beiden Ebenen F und H

h in F: $6 \cdot 6\mu - 3 \cdot (-3\mu) + 4 \cdot 4\mu = 12 \Rightarrow \mu = \frac{12}{61}$. Damit erhält man für den Spiegelpunkt M' des Ur-

$$\text{sprungs an der Ebene F: } \vec{M}' = 2 \cdot \frac{12}{61} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{144}{61} \\ -\frac{72}{61} \\ \frac{96}{61} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,36 \\ -1,18 \\ 1,57 \end{pmatrix}$$

h in H: $6 \cdot 6\mu - 3 \cdot (-3\mu) + 4 \cdot 4\mu = -18 \Rightarrow \mu = -\frac{18}{61}$. Damit erhält man für den Spiegelpunkt M'' des

$$\text{Ursprungs an der Ebene H: } \vec{M}'' = 2 \cdot \left(-\frac{18}{61}\right) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{216}{61} \\ \frac{108}{61} \\ -\frac{144}{61} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3,54 \\ 1,77 \\ -2,36 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Die Gerade g lautet $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \\ 2+6\mu \\ 2-9\mu \end{pmatrix}$. Sie ist Lotgerade zu E . Der Schnittpunkt (Lotfußpunkt) berechnet sich als Schnittpunkt von g und E :

$$2 \cdot 2\mu + 6 \cdot (2 + 6\mu) - 9 \cdot (2 - 9\mu) = -6 \Leftrightarrow 4\mu + 12 + 36\mu - 18 + 81\mu = -6 \Leftrightarrow \mu = 0$$

Daher ist P der Schnittpunkt von g und E . Von P geht man 11 Längeneinheiten in Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$. Diese beiden Richtungsvektoren haben die Länge 11, da $\sqrt{2^2 + 6^2 + (-9)^2} = 11$. Man erhält daher für die Punkte A und B auf der Geraden g , die von P den Abstand 11 haben die folgenden Ansätze: $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 11 \cdot \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 11 \cdot \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

a) Es gilt: $g: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}$. Sei F der gesuchte Punkt auf g mit dem Parameter t .

Dann gilt: $\vec{PF} = \vec{F} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+t \\ 2-t \\ -1+t \end{pmatrix}$. Da \vec{PF} senkrecht steht zum Richtungsvektor

der Geraden, gilt: $\vec{PF} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} 3+t \\ 2-t \\ -1+t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3+t-2+t-1+t=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Es gilt: $g: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2t \\ 3+t \\ 2-t \end{pmatrix}$. Sei F der gesuchte Punkt auf g mit dem Parameter t .

Dann gilt: $\vec{PF} = \vec{F} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 2+2t \\ 3+t \\ 2-t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1+t \\ 5-t \end{pmatrix}$. Da \vec{PF} senkrecht steht zum Richtungsvektor

der Geraden, gilt: $\vec{PF} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1+t \\ 5-t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2+4t+1+t-5+t=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3} \Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

a) $g: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 2 - 2t \\ 2 + t \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 2t \\ 2 - 2t \\ 5 + t \end{pmatrix}$. Die Geraden g und h sind parallel oder identisch, da sie dieselben Richtungsvektoren haben. Da es kein t gibt, dass z. B. Punkt $(-6/2/5)$ auf g liegt (nachrechnen!), sind beide Geraden parallel.

b) Sei F der gesuchte Lotfußpunkt auf g mit dem Parameter t . Dann gilt für den Verbindungsvektor von H nach F : $\overrightarrow{HF} = \vec{F} - \vec{H} = \begin{pmatrix} 2t \\ 2 - 2t \\ 2 + t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 2t \\ -2t \\ -3 + t \end{pmatrix}$. Da \overrightarrow{HF} senkrecht steht zum Richtungsvektor der Geraden g , gilt: $\overrightarrow{HF} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} 6 + 2t \\ -2t \\ -3 + t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 12 + 4t + 4t - 3 + t = 0 \Leftrightarrow t = -1$
 $\Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $d(g, h) = d(H; g) = |\overrightarrow{HF}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = 6$.

Aufgabe 6

a) $d = 19$

b) $d = 11$

Aufgabe 7

$G(0/3/4)$ und $H(7/7/0)$

Aufgabe 8²⁴

a) Richtung von Flugzeug 1: $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 400 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1000 \\ -600 \\ 1350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1000 \\ 1000 \\ -1250 \end{pmatrix}$. Flugbahn von Flugzeug

1: $F_{AB}: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 1000 \\ -600 \\ 1350 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1000 \\ 1000 \\ -1250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 - 1000s \\ -600 + 1000s \\ 1350 - 1250s \end{pmatrix}$ ($s \geq 0$ in 13 – Sekunden – Abschnitten)

Richtung Flugzeug 2: $\overrightarrow{CD} = \vec{D} - \vec{C} = \begin{pmatrix} -600 \\ -200 \\ 400 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1200 \\ -800 \\ 400 \end{pmatrix}$. Flugbahn von Flugzeug 2:

$F_{CD}: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1200 \\ -800 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 - 1200t \\ 600 - 800t \\ 400t \end{pmatrix}$ für ($t \geq 0$ in 27 – Sekunden – Abschnitten)

Da beide Richtungsvektoren nicht kollinear sind, sind die Flugbahnen entweder windschief, oder sie besitzen einen Schnittpunkt. Setzt man die beiden Geradenvektoren gleich, erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1000 - 1000s \\ -600 + 1000s \\ 1350 - 1250s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 - 1200t \\ 600 - 800t \\ 400t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1000s + 1200t \\ 1000s + 800t \\ -1250s - 400t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -400 \\ 1200 \\ -1350 \end{pmatrix}$$

Durch die ersten beiden Koordinatengleichungen erhält man die Lösungen $s = 0,88$ und $t = 0,4$. Diese beiden Lösungen erfüllen die dritte Gleichung nicht ($-1260 \neq -1350$). Daher sind beide Geraden windschief.

²⁴ Modifiziert nach EISEN, V.: Handlungsorientierter Mathematikunterricht. MUED, Appelhülsen 2017, 96.

Der Abstand der beiden Flugbahnen beträgt (z. B. mit der Formel für den Abstand windschiefer Geraden): 63,76 m. Dieser Abstand ist kleiner oder gleich dem Abstand der Flugzeuge, da diese in der Regel nicht zugleich an den Lotfußpunkten des gemeinsamen Lots auf die Flugbahnen befinden.

b) Man wandle die Parametergleichungen nun so um, dass für beide der gleiche Parameter $s = t$ gilt:

$$F_{AB}: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 1000 \\ -600 \\ 1350 \end{pmatrix} + \frac{t}{13} \cdot \begin{pmatrix} -1000 \\ 1000 \\ -1250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 - \frac{1000}{13}s \\ -600 + \frac{1000}{13}s \\ 1350 - \frac{1250}{13}s \end{pmatrix} \quad (t \geq 0 \text{ in Sekunden})$$

$$F_{CD}: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{27} \cdot \begin{pmatrix} -1200 \\ -800 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 - \frac{1200}{27}t \\ 600 - \frac{800}{27}t \\ \frac{400}{27}t \end{pmatrix} \quad (\text{für } t \geq 0 \text{ in Sekunden})$$

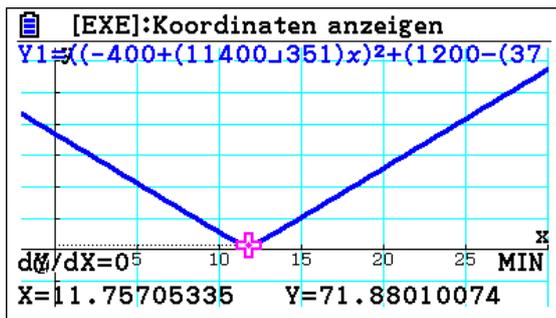
Für den zeitabhängigen Abstandsvektor beider Flugbahnen gilt:

$$\vec{d} = \vec{X}_{CD}(t) - \vec{X}_{AB}(t) = \begin{pmatrix} 600 - \frac{1200}{27}t \\ 600 - \frac{800}{27}t \\ \frac{400}{27}t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1000 - \frac{1000}{13}t \\ -600 + \frac{1000}{13}t \\ 1350 - \frac{1250}{13}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -400 + \frac{11400}{351}t \\ 1200 - \frac{37400}{351}t \\ -1350 + \frac{38950}{351}t \end{pmatrix}$$

Für die Länge des Abstandsvektors gilt:

$$|\vec{d}| = \sqrt{\left(-400 + \frac{11400}{351}t\right)^2 + \left(1200 - \frac{37400}{351}t\right)^2 + \left(-1350 + \frac{38950}{351}t\right)^2}$$

Mithilfe des GTR erhält man folgende globale Minimumstelle:



Nach ca. 12 Sekunden ist der Abstand mit ca. 72 m am geringsten. Es stehen also weitere Flugstunden an.

c) Man berechne zunächst den Punkt des ersten Flugzeuges, an dem der Abstand zum zweiten Flugzeug am geringsten ist. Er hat den Ortsvektor:

$$\vec{X}(11,76) = \begin{pmatrix} 1000 \\ -600 \\ 1350 \end{pmatrix} + \frac{11,76}{13} \cdot \begin{pmatrix} -1000 \\ 1000 \\ -1250 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 95,38 \\ 304,62 \\ 219,23 \end{pmatrix}. \text{ Der Verbindungsvektor von Flughafen zum}$$

$$\text{Ortspunkt des ersten Flugzeuges nach 11,76 Sekunden lautet: } \vec{X}(11,76) - \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -504,62 \\ -295,38 \\ 219,23 \end{pmatrix}.$$

Seine Länge beträgt $\sqrt{(-504,62)^2 + (-295,38)^2 + 219,23^2} \approx 624,46 < 800$

Die Fluglehrer konnte den „Beinahezusammenstoß“ sehen.

d) Geschwindigkeit von Flugzeug 1: $\frac{|\overline{AB}|}{13} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1000 \\ 1000 \\ -1250 \end{pmatrix} \right|}{13} \approx \frac{1887,46}{13} \approx 145,19$ m pro Sekunde = 522,68 km pro Stunde. Geschwindigkeit von Flugzeug 2: $\frac{|\overline{CD}|}{27} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1200 \\ -800 \\ 400 \end{pmatrix} \right|}{27} \approx \frac{1496,66}{27} \approx 55,43$ m pro Sekunde = 199,56 km pro Stunde.

Die Steigung des zweiten Flugzeuges ist ca. 15,5 Grad. Beweis: Der senkrechte Projektionspunkt D' von D in die x_1 - x_2 -Ebene ist $D'(-600/-200/0)$. Er bildet mit den beiden Punkten $C(600/600/0)$ und D ein rechtwinkliges Dreieck mit der längsten Seite von C nach D. Daher gilt:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{|\overline{DD'}|}{|\overline{CD'}|} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{400}{\sqrt{1200^2 + 800^2}} \right) \approx 15,5$$

e) Zur Darstellung im Modell: 100 m pro Einheit Die Flugbahn des Flugzeuges 1 lässt sich mit Punkt $P_1(4|0|6)$ und Punkt $P_2(0|4|1)$ darstellen. Die Flugbahn des Flugzeuges 2 lässt sich mit Punkt $P_3(6|6|0)$ und Punkt $P_4(0|2|2)$ darstellen.

5 Winkelberechnung

Aufgabe 2

$$\overline{OP} = \sqrt{38}; \overline{PQ} = \sqrt{14}; \overline{QR} = \sqrt{26}; \overline{RO} = 7\sqrt{2};$$
$$\sphericalangle ROP \approx 14,8^\circ; \sphericalangle OPQ = 137,5; \sphericalangle PQR \approx 54,8^\circ; \sphericalangle QRO \approx 67,9^\circ$$

Aufgabe 4

a) $84,8^\circ$

b) $67,2^\circ$

c) $7,4^\circ$

6 Hier geht es zum Abitur

Chephren- und Cheops-Pyramide

a) (1) Die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche der Cheops-Pyramide beträgt 225 m. Daraus ergeben sich die fehlenden Eckpunkte C (616 | 635 | 0) und D (391 | 635 | 0) durch Addition von 225 zur y-Koordinate von B bzw. A. Der Mittelpunkt der Strecke \overline{AC} ist M (503,5 | 522,5 | 0), zu berechnen durch Mittelung der Koordinaten von A und C. Aus der Höhe ergibt sich die z-Koordinate von S (503,5 | 522,5 | 139).

(2) Für die Cheops-Pyramide ist $\alpha = \sphericalangle(S, M_{AB}, M)$ der gesuchte Winkel im Dreieck $MM_{AB}S$. Aus $\tan(\alpha) = \frac{139}{112,5}$ ergibt sich $\alpha \approx 51,0^\circ$

(3) Gesucht ist der doppelte Abstand zwischen B und der Kante \overline{AS} . Dazu wird das Lot von B auf die Gerade g_{AS} : $\vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} 391 \\ 410 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 112,5 \\ 112,5 \\ 139 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 391 + 112,5\lambda \\ 410 + 112,5\lambda \\ 139\lambda \end{pmatrix}$ gefällt. Sei F der Lotfußpunkt auf g_{AS}

mit dem Parameter λ . Dann gilt für $\overline{BF} = \vec{F} - \vec{B} = \begin{pmatrix} 391 + 112,5\lambda \\ 410 + 112,5\lambda \\ 139\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 616 \\ 410 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -225 + 112,5\lambda \\ 112,5\lambda \\ 139\lambda \end{pmatrix}$. Da

\overline{BF} senkrecht steht zum Richtungsvektor von g , gilt: $\overline{BF} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} -225 + 112,5\lambda \\ 112,5\lambda \\ 139\lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 112,5 \\ 112,5 \\ 139 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda \approx$

0,567. Da dieser Wert im Intervall [0;1] liegt, liegt der zugehörige Lotfußpunkt F auf der Kante \overline{AS} im Abstand $d(B; g_{AS}) = |\overline{BF}| \approx \left| \begin{pmatrix} 391 \\ 410 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,567 \cdot \begin{pmatrix} 112,5 \\ 112,5 \\ 139 \end{pmatrix} \right| \approx 190,4$ von B. Die gesuchte Länge der kürzesten Verbindung beträgt also ca. 381 m.

b) (1) Zunächst ist der Schattenpunkt T' der Pyramidenspitze T (171 | 158 | 146) in der durch $z = 10$ definierten Ebene zu berechnen. Dazu ist in der Gleichung der Geraden mit der Parameter-

form $g: \vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} 171 \\ 158 \\ 146 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -0,7154 \\ 0,3468 \\ -0,6065 \end{pmatrix}$ die z-Koordinate gleich 10 zu setzen. Dies ergibt $\lambda \approx 224,24$

und damit den Schattenpunkt $T' \approx (10,6 | 235,8 | 10)$. Dieser Punkt liegt 54,4 m westlich der 212 m langen Kante \overline{EH} , so dass die gesuchte Fläche ein Dreieck mit Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot 212 \text{ m} \cdot 54,4 \text{ m} = 5766,4 \text{ m}^2$ ist.

(2) Zu einem späteren Zeitpunkt wird die Sonne höher stehen, wodurch der Schattenpunkt T' auf den Mittelpunkt der quadratischen Grundfläche zuwandert und auch in dieser Fläche liegen kann. Dann wirft die Pyramide keinen Schatten mehr auf der Ebene $z = 10$.

(3) Der Sonnenstrahl durch T folgt der durch zwei Punkte T, T'' definierten Geraden h mit der Parametergleichung $h: \vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} 171 \\ 158 \\ 146 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 333 \\ 301 \\ -146 \end{pmatrix}$. Anhand von Abb. 1 kann man aus der Lage des

Punktes T'' und der Richtung von g schlussfolgern, dass der Schattenpunkt T' auf der Seitenfläche ABS liegen muss. Die zugehörige Ebene kann mit der Ebenengleichung in Parameterform

E: $\vec{X}(\mu; \nu) = \begin{pmatrix} 391 \\ 410 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 225 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 112,5 \\ 112,5 \\ 139 \end{pmatrix}$ parametrisiert werden. Zur Berechnung des Schnittpunktes von h und E stellt man ein lineares Gleichungssystem für $(\lambda/\mu/\nu)$ auf, z. B. in Matrixform $\begin{pmatrix} -333 & 225 & 112,5 & | & 171 - 391 \\ -301 & 0 & 112,5 & | & 158 - 410 \\ 146 & 0 & 139 & | & 146 - 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,8831 \\ 0,2678 \\ 0,1228 \end{pmatrix}$. Dies führt nach Einsetzen auf ungefähr $T' (465/424/17)$.

c) (1) P liegt auf der Geraden durch die Punkte Q und R und in der durch $z = 0$ definierten Ebene. Die Gerade durch Q und R und damit auch P liegen in der durch ABS definierten Ebene E. P liegt im Schnitt der Ebene E mit der durch $z = 0$ definierten Ebene, also auf der Gerade durch die Punkte A und B.

(2) Mit \vec{A}, \vec{P} und \vec{R} werden die Ortsvektoren der Punkte A, P, R bezeichnet. Die möglichen Punkte P liegen auf dem Hilfsstrahl $g_{AB}: \vec{P}(\lambda) = \vec{A} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \geq 0$. Die Steigung der zugehörigen Rampe wird durch die gegebene z-Koordinate z_R von R sowie die Länge $l(\lambda) = |\vec{R} - \vec{P}(\lambda)|$ der Rampe berechnet: $\sin(\alpha) = \frac{z_R}{l(\lambda)}$. Da der Steigungswinkel α gegeben ist, berechnet man zunächst $l(\lambda)$ und daraus den Wert von λ aus $l(\lambda) = |\vec{R} - \vec{P}(\lambda)| = \left| \vec{R} - \vec{A} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|$. Damit ist P durch $\vec{P}(\lambda)$ bestimmt.

7 Kontrollaufgaben

Hilfsmittelfreie Aufgaben

Aufgabe 1

a) $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$. Da die beiden Vektoren nicht kollinear sind, liegen A, B und C nicht auf einer Geraden und spannen daher eine Ebene auf. Ihre Gleichung lautet $E: \vec{X}(\lambda; \nu) = \vec{A} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \nu \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Es gilt: $\overrightarrow{BD} = \vec{D} - \vec{B} = \begin{pmatrix} d-1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Das Dreieck ABD ist im Punkt B rechtwinklig genau dann, wenn $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (d-1) - 1 + 5 = 0 \Leftrightarrow 3d - 3 - 1 + 5 = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{1}{3}$.

Aufgabe 2

a) Die zwei Vektoren stehen senkrecht zueinander genau dann, wenn $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 5z = 0$.

Für $z = -1$ ergibt sich zum Beispiel $x = 5$.

b) $\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{26} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 5^2} = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right|$: Es handelt es sich um eine Raute.

Aufgabe 3

a) Sei t der Parameter zum Lotfußpunkt F, d. h., $\vec{P} = \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 20+t \\ 1-4t \\ 12+3t \end{pmatrix}$. Dann gilt für den Vektor von

P nach F: $\overrightarrow{PF} = \vec{F} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 20+t-4 \\ 1-4t-8 \\ 12+3t+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+t \\ -7-4t \\ 20+3t \end{pmatrix}$. Da der Vektor \overrightarrow{PF} senkrecht auf g steht, gilt:

$\begin{pmatrix} 16+t \\ -7-4t \\ 20+3t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 16+t+28+16t+60+9t = 0 \Leftrightarrow 26t = -104 \Leftrightarrow t = -4$. Also erhält

man insgesamt: $\vec{F} = \vec{X}(-4) = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Der gesuchte Abstand ist: $|\overrightarrow{PF}| = \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{12^2 + 9^2 + 8^2} = 17$

c) $\vec{P}' = \vec{P} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 26 \\ 8 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

a) $g: \vec{X}(\lambda) = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2\lambda \\ 3 + \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$ (Richtungsvektor von g ist Normalvektor von E)

b) Koordinaten von g in E einsetzen: $2 \cdot (5 + 2\lambda) + 3 + \lambda + \lambda = 1 \Leftrightarrow 6\lambda = -12 \Leftrightarrow \lambda = -2$. Man erhält den Schnittpunkt $F(1|1|2)$.

c) $\overline{PF} = \vec{F} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overline{PF}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Aufgabe 5

a) Setze die Koordinaten von $g: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2t \\ 1 - t \\ -2 - 4t \end{pmatrix}$ in die Koordinatengleichung von E ein: $2 \cdot (2 + 2t) - (1 - t) + 2 \cdot (-2 - 4t) = 5 \Leftrightarrow 4 + 4t - 1 + t - 4 - 8t = 5 \Leftrightarrow t = -2$. Man erhält als Schnittpunkt $(-2/3/6)$.

b) Da der Richtungsvektor der Geraden $g \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und der Normalvektor der Ebene $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ offenbar nicht kollinear zueinander sind, verläuft g nicht senkrecht zu E .

Aufgabe 6 (LK)

a) Die beiden Ebenen F und H haben den gleichen Normalvektor aber ein unterschiedliches d . Daher sind sie echt parallel.

b) Ebene G ist mit F identisch, daher ebenfalls echt parallel zu H .

c) (1) Unlösbar: Fälle 1, 2 und 3. Eindeutig lösbar: Fall 4. ∞^1 -lösbar: Fall 5.

(2) (A) gehört zu Fall 2, da die Normalvektoren der zweiten und dritten Ebene kollinear sind und beide offenbar nicht kollinear zum Normalvektor der ersten Ebene sind. Da bei (B) die Normalvektoren aller drei Ebenen untereinander nicht kollinear sind, kommen nur die Fälle 3 bis 5 in Frage. Das LGS ist allerdings unlösbar, denn $I + (-1) \cdot (II)$ liefert $-6x_2 + 4x_3 = -7$ im Widerspruch zur dritten Gleichung. Auch für (C) kommen zunächst die Fälle 3 bis 5 in Frage. Allerdings liefert $(I) + (-1) \cdot (II)$ die dritte Gleichung, so dass das LGS ∞^1 -lösbar ist. Daher handelt es sich um Fall 5.

Aufgaben unter Nutzung von Hilfsmitteln

Aufgabe 7

a) (1) Die drei Eckpunkte A, B und C besitzen alle die x_3 -Koordinate Null und liegen somit in der x_1x_2 -Ebene.

$$(2) |\vec{AC}| = \left| \begin{pmatrix} -\sqrt{300} - \sqrt{1200} \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = |\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -\sqrt{300} - \sqrt{1200} \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = |\vec{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -60 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 60, \text{ denn es gilt}$$

$$\sqrt{(-\sqrt{300} - \sqrt{1200})^2 + (\pm 30)^2} = 60.$$

Für die Länge der Ortsvektoren von A, B und C gilt: $|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}| = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3} \approx 34,64$ [m]

b) Da die Spitze D über dem Koordinatenursprung liegt, hat sie die Darstellung $D(0/0/h)$ und somit ist sein Ortsvektor: $\vec{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} = h \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei h die Höhe des Kunstwerkes ist. Die Höhe h lässt sich zum Beispiel unter Verwendung des Satzes von Pythagoras im Dreieck COD bestimmen (mit dem rechten Winkel beim Koordinatenursprung O): $h = \sqrt{|\vec{CD}|^2 - |\vec{C}|^2} = \sqrt{60^2 - (300 + 30^2)} = 20\sqrt{6} \approx 48,99$ [m]. Daher ist D $(0/0/48,99)$, und die Entfernung der Pyramidenspitze D vom Erdboden beträgt $9 + 48,99 = 57,99$ [m].

c) Ein Normalvektor der Ebene E_{BCD} : $-49x_1 + 17x_3 = 833$ ist $\vec{D} = \begin{pmatrix} -49 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$. Dieser liegt senkrecht zum Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit liegt die Ebene E_{BCD} senkrecht zur x_2 -Achse.

d) Die Ebene $E_{A'B'C'}$ liegt in der x_1x_2 -Ebene. Daher muss die x_3 -Koordinate des Punktes T auf der Geraden g Null betragen.

$$-9 + s \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow s = 4,5$$

Einsetzen von $s = 4,5$ in die Geradengleichung liefert die Koordinaten des gesuchten Schnittpunktes T $(2,5 \mid -2 \mid 0)$.

Für die Länge des gesuchten Treppenstücks gilt somit $|\vec{PT}| = \left| \begin{pmatrix} -13,5 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} \right| \approx 24,23$ [m]

e) Der Steigungswinkel der Treppe entspricht dem Winkel zwischen einer Geraden der Schar g_a und der x_1x_2 -Ebene. Es gilt in Abhängigkeit vom Parameter a:

$$\sin(30^\circ) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|a|}{\sqrt{25+a^2} \cdot 1} \stackrel{\sin(30^\circ)=0,5}{\Leftrightarrow} 0,5 = \frac{|a|}{\sqrt{25+a^2}} \Leftrightarrow 0,5 \cdot \sqrt{25+a^2} = |a|$$

$$\Leftrightarrow 0,25 \cdot (25 + a^2) = a^2 \Leftrightarrow 25 + a^2 = 4a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{25}{3} \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{25}{3}} \vee a = -\sqrt{\frac{25}{3}}$$

f) Berechnung des Schnittpunktes der zur x_1x_2 -Ebene parallelen Ebene, die den Punkt Q enthält (E_Q : $x_3 = 9$) und der Geraden, die den Stahlträger \overline{RS} enthält:

$$\vec{R} = \vec{A} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{A'B} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -52 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{S} = \vec{B} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{B'D} = \begin{pmatrix} -17 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ -30 \\ 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8,5 \\ 15 \\ 24,5 \end{pmatrix}.$$

$$g_{RS}: \vec{X}(k) = \vec{R} + k \cdot \overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -17,5 \\ 0 \\ 24,5 \end{pmatrix}; 0 \leq k \leq 1.$$

Für die Schnittpunktberechnung (Einsetzen der dritten Koordinate in E_Q : $x_3 = 9$) ergibt sich:

$$k \cdot 24,5 = 9 \Leftrightarrow k = \frac{18}{49} \approx 0,37 \quad (0 \leq k \leq 1).$$

Der Punkt L auf dem Stahlträger in der Höhe der Plattform hat somit die Darstellung

$$L \left(\frac{18}{7} / 15 / 9 \right) \text{ bzw. } L (2,57 / 15 / 9).$$

Es ergibt sich ein Abstand von $|\overrightarrow{B'D}| = \frac{155}{14} \approx 11,07$ [m]. Als maximalen Durchmesser der Aussichtsplattform erhält man einen Wert von etwa 22,14 [m].

Aufgabe 8

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2,2 \\ 4 \\ 0,6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = \frac{15}{11} \\ s = \frac{11}{4} \\ x_3 = 0,6 \cdot s \end{matrix}$. Es gibt kein eindeutiges s . Daher fliegt das Flugzeug nicht über den Kirchturm im Zentrum (0/0/0).

b) Flugzeug F_1 : $\left| \begin{pmatrix} 2,2 \\ 4 \\ 0,6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2,2^2 + 4^2 + 0,6^2} \approx 4,6 \frac{\text{km}}{\text{min}}$

Flugzeug F_2 : $\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5 \frac{\text{km}}{\text{min}} = 300 \frac{\text{km}}{\text{min}}$

Das zweite Flugzeug ist schneller als das erste Flugzeug.

c) Da die Richtungsvektoren der beiden Flugbahnen nicht kollinear zueinander sind, schneiden sich die Geraden oder sind windschief. Man setzt daher beide Terme für $\vec{X}_{f_1}(s)$ und $\vec{X}_{f_2}(t)$ gleich:

$$\begin{pmatrix} -3 + 2,2 \cdot s \\ -11 + 4 \cdot s \\ 0,6 \cdot s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot t \\ 15 - 3 \cdot t \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2,2 \cdot s - 4 \cdot t \\ 4 \cdot s + 3 \cdot t \\ 0,6 \cdot s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 26 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} s = 5 \\ \Leftrightarrow t = 2 \\ \text{GTR} \\ s = 6\frac{2}{3} \end{matrix}$$

Da es keine eindeutigen s und t gibt, die das LGS lösen, besitzen die beiden Geraden keinen Schnittpunkt und sind daher windschief.

d) Im Falle der Windschiefheit wird der minimale Abstand der Flugbahnen durch das Lot auf beide Geraden festgelegt. Dieser geringste Abstand entspricht nicht zwangsläufig dem geringsten Abstand der Flugzeuge, da sich die beiden Flugzeuge in der Regel nicht zum gleichen Zeitpunkt an den Lotfußpunkten befinden.

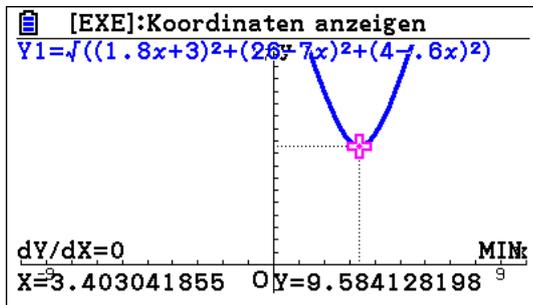
e) Sei \vec{d} der Abstandsvektor der beiden Ortspunkte der Flugzeuge. Dann gilt:

$$\vec{d} = \vec{X}_{\text{Flugzeug 1}}(t) - \vec{X}_{\text{Flugzeug 2}}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot t \\ 15 - 3 \cdot t \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 + 2,2 \cdot t \\ -11 + 4 \cdot t \\ 0,6 \cdot t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 1,8 \cdot t \\ 26 - 7 \cdot t \\ 4 - 0,6 \cdot t \end{pmatrix}.$$

Damit gilt für den Abstand d in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t :

$d(t) = |\vec{d}| = \sqrt{(3 + 1,8 \cdot t)^2 + (26 - 7 \cdot t)^2 + (4 - 0,6 \cdot t)^2}$. Mithilfe des GTR erhält man für das globale Minimum ($t \geq 0$) $d(3,40) \approx 9,58$.

Also: Beide Flugzeuge haben nach ca. 3 Minuten und 24 Sekunden mit ca. 9600 m den geringsten Abstand.



f) Formel für den Abstand der Flugbahnen: $d = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{G} - \vec{H})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$

$$d(f_1; f_2) = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 2,2 \\ 4 \\ 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2,2 \\ 4 \\ 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1,8 \\ 2,4 \\ -22,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -26 \\ -4 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1,8 \\ 2,4 \\ -22,6 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-5,4 - 62,4 + 90,4|}{\sqrt{1,8^2 + 2,4^2 + (-22,6)^2}} \approx 0,99 \text{ [km]}.$$

g) (1) h mit $h: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($0 \leq r \leq 15$) verläuft genau 1 km tiefer als f_2 , da folgendes gilt:

$$\vec{X}_{f_2}(r) - \vec{X}_h(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Da die Richtungsvektoren der beiden Flugbahnen f_1 und h nicht kollinear zueinander sind, schneiden sich die Geraden oder sind windschief. Man setzt daher beide Terme für: $\vec{X}_{f_1}(s)$ und $\vec{X}_h(r)$ gleich:

$$\begin{pmatrix} -3 + 2,2 \cdot s \\ -11 + 4 \cdot s \\ 0,6 \cdot s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot r \\ 15 - 3 \cdot r \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2,2 \cdot s - 4 \cdot r \\ 4 \cdot s + 3 \cdot r \\ 0,6 \cdot s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 26 \\ 3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{GTR}}{\Leftrightarrow} \begin{matrix} s = 5 \\ r = 2 \\ s = 5 \end{matrix}$$

Das LGS ist eindeutig lösbar mit $s = 5$ und $r = 2$. Daher schneiden sich f_1 und h . Für den Schnittpunkt

$$S \text{ gilt: } \vec{s} = \vec{X}_h(2) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 \\ 15 - 3 \cdot 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(3) Da die beiden Flugzeuge zu unterschiedlichen Zeiten am Schnittpunkt ankommen, besteht keine unmittelbare Kollisionsgefahr.

(4) Für die Ebenengleichung wählt man die nicht kollinearen Richtungsvektoren der Geraden f_1 und h sowie z. B. den Schnittpunkt oder einen der beiden Aufpunkte. Man erhält für die entsprechende

$$\text{Ebene: } E_{f_1, h}: \vec{X}(c; d) = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 2,2 \\ 4 \\ 0,6 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c, d \in \mathbb{R}).$$

h) (1) Das Flugzeug fliegt über den Wolkenkratzer $Q(12,4/17/1,3)$, wenn folgende Gleichung erfüllt

$$\text{ist: } \begin{pmatrix} 12,4 \\ 17 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2,2 \cdot s \\ -11 + 4 \cdot s \\ 0,6 \cdot s \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = 7 \\ s = 7 \\ x_3 = 4,2 \end{matrix}.$$

Damit befindet sich das Flugzeug nach 7 Minuten genau 2900 m über dem Punkt Q .

(2) Man bestimme den Schnittpunkt R von f_1 und W:

$$\vec{X}(s) = \vec{X}(\lambda; \mu) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 + 2,2 \cdot s \\ -11 + 4 \cdot s \\ 0,6 \cdot s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 30 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (-2 \leq \lambda, \mu \leq 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2,2 \cdot s - \mu \\ 4 \cdot s - \lambda \\ 0,6 \cdot s - \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 41 \\ 6 \end{pmatrix} \stackrel{\text{GTR}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} s \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Das LGS ist eindeutig lösbar, so dass man für den Schnittpunkt R erhält: } \vec{R} = \vec{X}(10) = \begin{pmatrix} 19 \\ 29 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(3) $|\vec{R} - \vec{X}_{f_1}(0)| = \left| \begin{pmatrix} 19 \\ 29 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 22 \\ 40 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 46,04 \text{ km legt } F_1 \text{ in den ersten 10 Minuten bis zum Punkt R zurück.}$

(4) Nach 10 Minuten befindet sich F_1 im Punkt R, dessen senkrechte Projektion in die x_1 - x_2 -Ebene $R^*(19/29/0)$ lautet. Der Startpunkt von F_1 , der Punkt R und der Projektionspunkt R^* bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenusenlänge von 46,04 und der Gegenkathete zum Steigungswinkel α mit der Länge 6. Daher gilt: $\sin(\alpha) = \frac{6}{46,04} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{6}{46,04}\right) \approx 7,49^\circ$. Alternative Lösung möglich über die Formel für den Schnitt von Gerade F_1 und x_1 - x_2 -Ebene:

$$\psi = \sin^{-1}\left(\frac{\left| \begin{pmatrix} 2,2 \\ 4 \\ 0,6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{2,2^2 + 4^2 + 0,6^2 \cdot 1}}\right) \approx 7,49^\circ$$

(5) Gesucht: Abstand $Q(12,4 | 17 | 1,3)$ von W: $\vec{X}(\lambda; \mu) = \begin{pmatrix} 19 \\ 30 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (-2 \leq \lambda, \mu \leq 2)$.

Die Lösung erfolgt über die Formel für den Abstand von Punkt und Ebene.

$$d(Q, W) = \frac{\left| \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \circ \left(\begin{pmatrix} 12,4 \\ 17 \\ 1,3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 \\ 30 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6,4 \\ -13 \\ -4,7 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{6,4 + 4,7}{\sqrt{2}} = \frac{11,1}{\sqrt{2}} \approx 7,85 \text{ [km]}$$

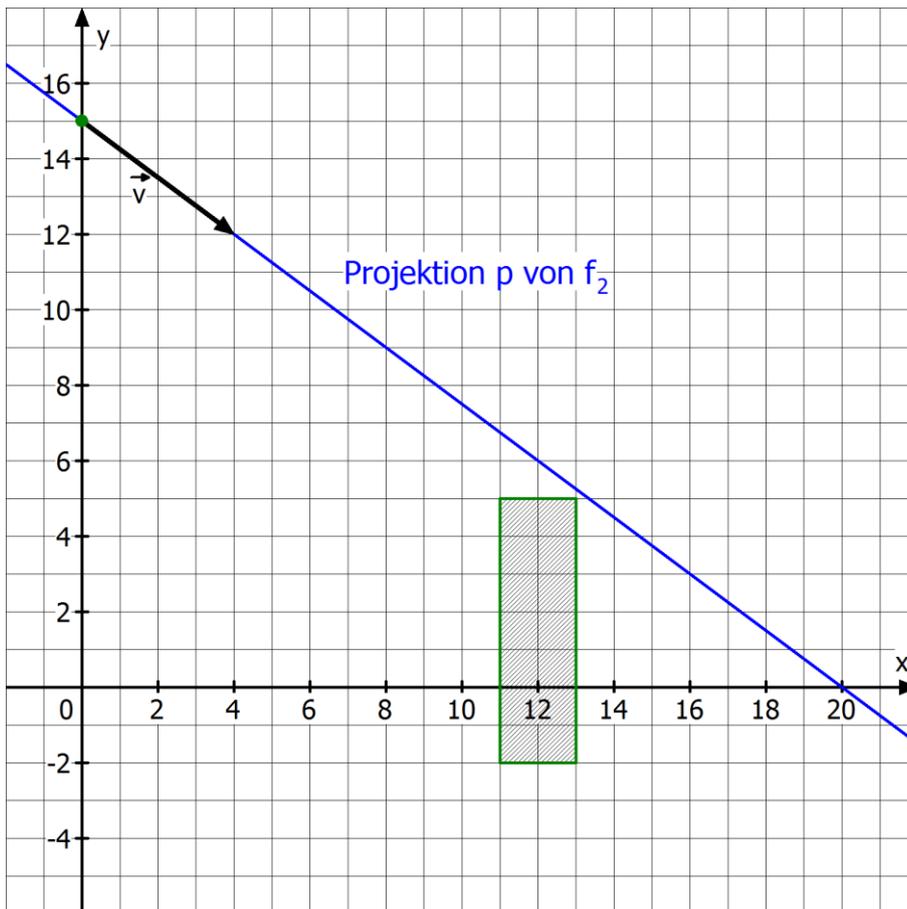
i) Man untersuche die Lagebeziehung der Projektionsgrade p und E:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq k \leq 2 \text{ und } 0 \leq m \leq 7$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4r - k \\ -3r - m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -17 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = \frac{11 + k}{4} \text{ und } r = \frac{-17 + m}{-3}$$

Mit den obigen Einschränkungen für k und m gilt für r durch Abschätzung mit k einerseits die Ungleichung $\frac{11}{4} \leq r = \frac{15-k}{4} \leq \frac{13}{4} = 3,25$ und andererseits durch Abschätzung mit m die Ungleichung $3\frac{1}{3} = \frac{10}{3} \leq r = \frac{-17+m}{-3} \leq 6\frac{1}{3}$. Da sich beide Ungleichungen widersprechen, gibt es keine Lösung des obigen LGS und daher keine gemeinsame Punkte von p und E.

Daher überfliegt F_2 das Militärspeergebiet **nicht**. Die folgende Abbildung stellt die in die x_1x_2 -Ebene projizierte Situation dar.



Aufgabe 9

a) Durch $F + (-1) \cdot E$ erhält man die Gleichung $5x_1 - 5x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \mu$. Formt man die Gleichung zu E nach x_3 um, gilt $x_3 = 3 - 0,25x_1 - 0,5x_2 = 3 - 0,75\mu$. Mit $4\lambda = \mu$ erhält man: $x_1 = x_2 = 4\lambda$ und $x_3 = 3 - 3\lambda$, also: $\vec{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda \\ 4\lambda \\ 3 - 3\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) $x_1 = \mu, x_2 = x_3 = 1 + \mu \xleftrightarrow{\mu=x_1 \text{ in } x_2=x_3} x_2 = 1 + x_1, x_3 = 1 + x_1 \Leftrightarrow -x_1 + x_2 = 1, -x_1 + x_3 = 1$

Die erste Ebene hat z. B. die Koordinatengleichung $-x_1 + x_2 = 1$, die zweite $-x_1 + x_3 = 1$.